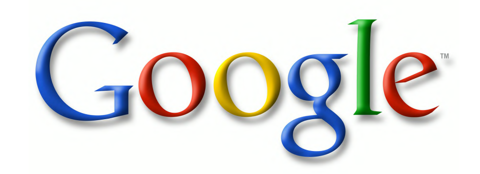
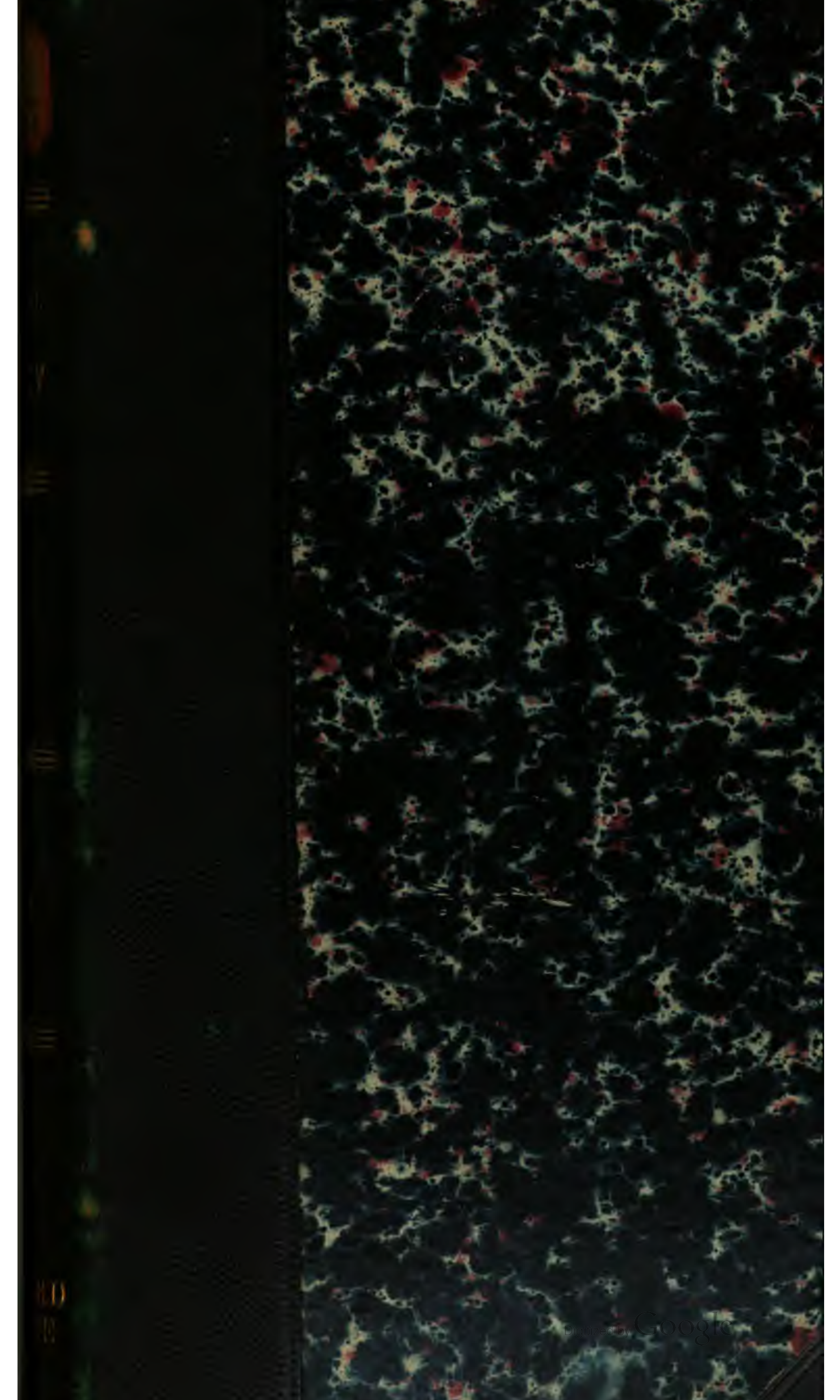
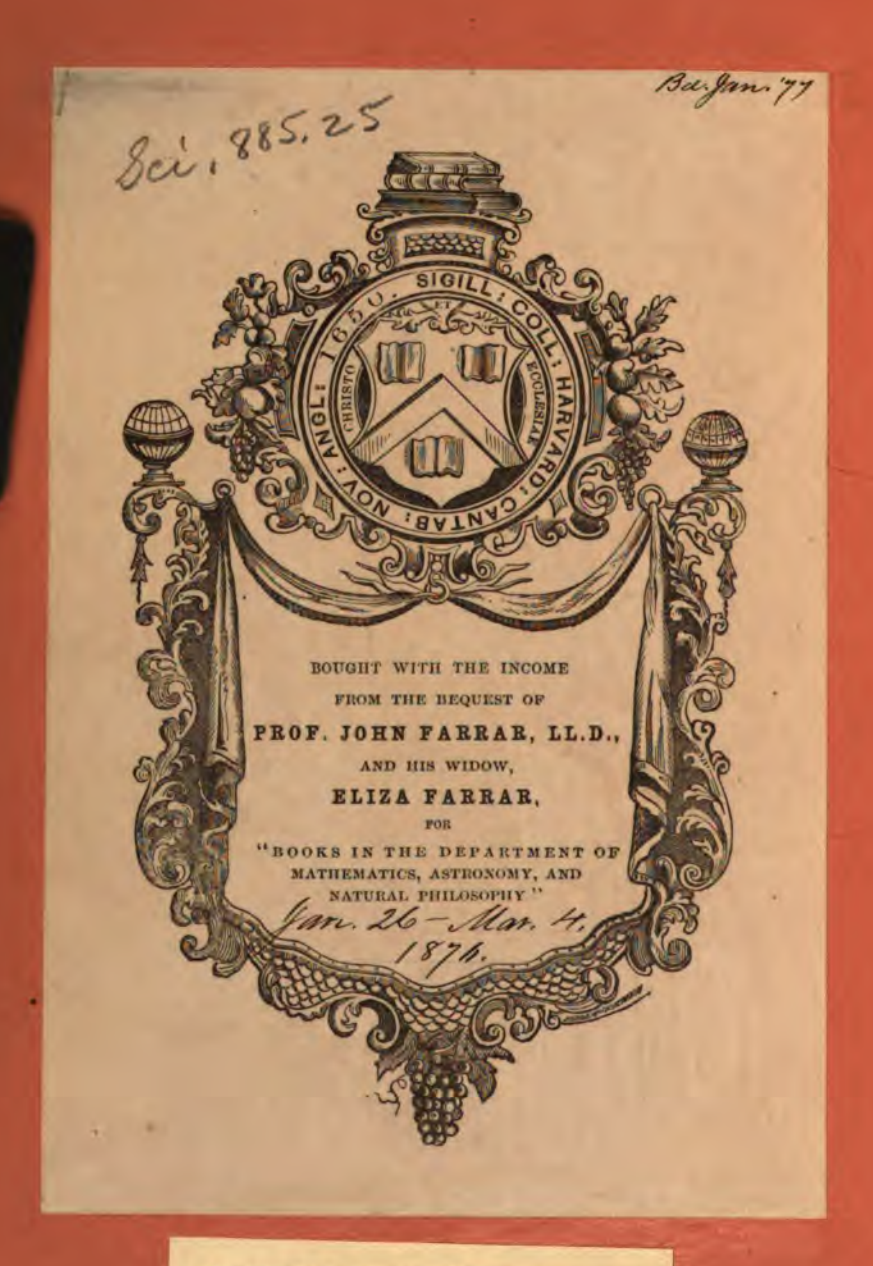





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

Jan. 26

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Siebenundfunfzigster Teil. Erstes Heft.

(Mit acht lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1874.

28
2

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Siebenundfunfzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1875.

Nanar-Times.
Jan. 26 – Mar. 4.
1876

Inhalts-Verzeichniss

des siebenundfunfzigsten Teils.

Integralrechnung.

Geometrie der Ebene.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Geometrie des Raumes.

I.

Zur Geometrie des Kreises und der Kugel.

Von

Fr. G. Affolter.

In zwangloser Reihenfolge einiger Mitteilungen gedenke ich meine Untersuchungen aus der Geometrie des Kreises und der Kugel hier zu veröffentlichen. Das sämmtliche hier vorliegende Material hatte ich schon vor drei Jahren zum Drucke bereit, und wurde mit demselben selbst auch begonnen, als besondere Umstände dessen Weiterführung verhinderten. Seither sind davon nur drei kleinere Resultate, als die Lösungen: 1) vier Kugeln durch eine fünfte[1]) und 2) fünf Kugeln durch eine sechste unter gleichen Winkeln zu schneiden[2]), wie 3) einen Beweis zur Steinerschen Construction des in der Ebene verallgemeinerten malfattischen Problems[3]), veröffentlicht worden.

In meinen Untersuchungen glaube ich zu Resultaten gelangt zu sein, welche die Geometrie des Kreises und der Kugel hinsichtlich ihres Schneidens einem gewissen Abschlusse näher bringen werden. Die vorliegende Arbeit befolgt den doppelten Zweck: Erstlich die Darstellung dieser Resultate und zweitens Darstellung derselben in einer dem Wesen der Sache angemessenen Form. Es sind daher aus den Elementen der Geometrie keine weiteren Kenntnisse als die Begriffe des Kreises und der Kugel, so wie im spätern Verlaufe die

---

1) Schlömilch's Zeitschrift, Band 16. Seite 162. 1870.
2) Clebsch und Neumann, Math. Annal. Band 4. Seite 185. 1871.
3) „ „ „ „ „ 6. „ 597. 1873.

Kenntniss der harmonischen Punkte und Strahlen notwendig. Diese Arbeit soll sich ganz an die Arbeiten Steiner's, die er im 1. Bande des Journals von Crelle 1826 unter dem Titel: Geometrische Betrachtungen, so wie deren Fortsetzungen niedergelegt hat, anschliessen. Es würde meine grösste Befriedigung sein, wenn hier diese folgenden Theorien im Sinne Steiner's durchgeführt und so weiter entwickelt wären; und es mir dadurch also gelungen wäre eine naturgemässe Kreis- und Kugelgeometrie zu geben. Dadurch wird man aber auch erkennen, dass die Arbeiten Steiner's den alleinigen Impuls zu diesen Arbeiten gaben.

Weitere Angaben über diesen Gegenstand, welche mir während der Redaction zur Vergleichung und weiteren Anhalt dienten, sind die folgenden:

1) Fr. Schweins Geometrie nach einem neuen Plane bearbeitet. I. Teil. Göttingen 1805.

2) Alle Arbeiten über das malfattische Problem; siehe deren teilweises Verzeichniss in:

3) Arnim Wittstein. Geschichte des malfattischen Problems. München 1871.

4) C. F. Geiser. Einleitung in die synthetische Geometrie. Leipzig 1869.

5) S. Lie. Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie der partiellen Differenzgleichungen. Neumann Annalen, Band 5. Seite 145. 1872.

6) G. Darboux. Sur un classe remarquables de courbes et de surfaces algebriques, et sur la theorie des imaginaires. Paris 1873.

7) G. Darboux. Sur les relations entre les groupes de points, de cercles, de sphères dans le plan et dans l'espace. Annales scientif. de l'école normale sup. t. I. serie 2. p. 323. 1872.

I. Mitteilung.

Einleitende Betrachtungen.

Obwohl ich mich vollständig an die oben genannten Arbeiten von Steiner anschliessen könnte, so ziehe ich es doch vor, seine Resultate hier dem Zweck entsprechend zu wiederholen. Hierdurch wird

manches Bekannte, das schon völlig in die Schule übergegangen ist, wiederholt werden. Ich hoffe aber dadurch möglichst ein Ganzes aus einem Gebiete der Geometrie zu bringen, welches, wie kein anderes, der Schule so nutzbar gemacht werden kann.

Bemerkung. Die Untersuchungen werden nur völlig streng für Kreise in der Ebene durchgeführt werden; jedoch für Kreise und Kugel im Raume nur dann, wenn sich die Resultate, für Kreise der Ebene erhalten, nicht ohne weiteres auf die räumlichen Gebilde übertragen lassen.

1. Abschnitt.

Theorie der Potenz.

a) Entwickelung des Potenzbegriffes.

Legen wir in der Ebene des Kreises k [1]) Fig. 1. durch den beliebig gewählten Punkt p die beiden Transversalen t_1 und t_2, welche den Kreis k beziehlich in den Punktepaaren t_1', t_1''; t_2', t_2'' schneiden; alsdann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$pt_1't_2' \text{ . und } pt_1''t_2''$$

die Proportion

$$pt_1' : pt_2' = pt_2'' : pt_1''$$

oder auch

1) $$pt_1' \cdot pt_1'' = pt_2' \cdot pt_2''$$

Halten wir die Transversale t_1 fest, während wir t_2 um p herum sich drehen lassen, so bestimmt diese mit dem Kreise k in jeder ihrer Lage t_n vom Punkte p aus gerechnet zwei Abschnitte pt_n' und pt_n'', von denen das Product ihrer Maasse gleich

$$pt_1' \cdot pt_1''$$

ist. Dieses Product hat also für alle Lagen der Transversalen t_n denselben Wert. In Folge dieses dem Product eigenen invarianten Charakters heisst es Steiner die Potenz des Punktes p in Bezug auf den Kreis k oder auch die Potenz des Kreises k in Bezug auf den Punkt p.

Es sind nun die beiden Lagen des Punktes p in Bezug auf den Kreis k genau auseinander zu halten, nämlich ob p wie in Fig. 1a.

1) Wir bezeichnen hier wie in der Folge jeden Kreis mit demselben Buchstaben wie seinen Mittelpunkt.

ausserhalb, oder wie in Fig. 1b. innerhalb des Kreises k liegt. Ist p ein äusserer Punkt, so liegen die beiden Abschnitte $pt_n' = a_1$, $pt_n'' = a_2$ in jeder Lage der Transversalen nach derselben Richtung von p aus, d. h. beide Abschnitte haben wesentlich gleiche Zeichen und die Potenz $a_1 . a_2$ ist wesentlich positiv. Ist jedoch p ein innerer Punkt, so liegen die beiden Schnitte t_n' und t_n'' vom Punkte p aus in jeder Lage der Transversalen nach verschiedenen Richtungen, d. h. die beiden Abschnitte haben wesentlich verschiedene Zeichen und die Potenz $a_1 . a_2$ ist daher wesentlich negativ.

Bezeichnen wir den absoluten Wert der Potenz eines Punktes p mit p^2, so haben wir für die äussere Potenz

2) $$pt_n' . pt_n'' = (\pm a_1) . (\pm a_2) = + p^2$$

und für eine innere

3) $$pt_n' . pt_n'' = (\pm a_1) . (\mp a_2) = - p^2$$

Legen wir die Transversale t_n, welche den Punkt p mit dem Mittelpunkte k verbindet, so ist für die äussere Potenz

4) $$+ p^2 = (x - r)(x + r) = x^2 - r^2$$

und für die innere

5) $$- p^2 = - (r - x)(x + r) = x^2 - r^2$$

wo r gleich dem Radius des Kreises k und x gleich der Entfernung des Punktes p von dem Mittelpunkt k des Kreises ist. Aus diesen beiden Gleichungen erkennt man sogleich, dass sowohl die äussere wie die innere Potenz durch denselben Ausdruck

$$x^2 - r^2$$

gegeben wird und dass ihre Werte wesentlich nur von dem Werte der Entfernung x abhängen. Wir setzen daher allgemein

6) $$p^2 = x^2 - r^2,$$

wo dann das Zeichen des Ausdrucks rechts das Zeichen von p^2 und somit p^2 als die äussere oder innere Potenz bestimmen.

Aus Gleichung 6) ergeben sich nun leicht die folgenden Sätze:

1) Alle Punkte p, welche vom Mittelpunkte des Kreises k gleiche Entfernung haben, oder alle Punkte eines mit k concentrischen Kreises besitzen in Bezug auf den Kreis k dieselbe Potenz.

2) Die Potenz aller Punkte des Kreises k ist gleich Null.

3) Die Potenz eines Punktes ist um so grösser, je grösser seine Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises k ist.

Lassen wir in Fig. 1a. die Transversale t_n in eine der Grenzlage übergehen, d. h. in die Lage wo t' mit t'' zusammenfällt, oder d. h. wo t zur Tangente wird, so ist

$$a_1 = a_2$$

und folglich

$$+p^2 = a_1^2$$

d. h.

4) Die äussere Potenz ist gleich dem Quadrat des Abschnittes, der durch den Punkt p und den Berührungspunkt auf einer der durch p an den Kreis k gehenden Tangente bestimmt wird.

Lassen wir in Fig. 1b. die Transversale t in die zu dem durch p gehenden Durchmesser normalstehenden Sehnen, d. h. zur kleinsten Sehne übergehen, so wird dem absoluten Werte nach

$$a_1 = a_2$$

oder

$$-p^2 = -a_1^2$$

d. h.

5) Die innere Potenz ist gleich dem negativen Quadrat der halben kleinsten durch den Punkt p hindurch gehenden Sehne des Kreises k.

Haben wir die beiden Punkte p_1 und p_2 mit beziehlich den Potenzen p_1^2 und p_2^2, so folgt aus Gleichung 6):

$$p_1^2 = x_1^2 - r^2 \quad \text{und} \quad p_2^2 = x_2^2 - r^2$$

und folglich erhält man durch Subtraction

$$7) \qquad p_1^2 - p_2^2 = x_1^2 - x_2^2$$

d. h. da in Gleichung 7) der Radius r nicht auftritt:

6) Die Differenz der Potenzen zweier Punkte in Bezug auf denselben Kreis ist unabhängig von der Grösse des Radius des Kreises.

Nehmen wir Fig. 1a u. b. auf irgend zwei durch den Punkt p hindurch gehenden Transversalen t_1 und t_2 je zwei Punkte so an, dass sie wie in 1a. von p aus je in gleicher oder wie in 1b. je in entgegengesetzter Richtung liegen und es sei für beide Fälle

$$pt_1'.pt_1'' = pt_2'.pt_2''$$

Legen wir durch irgend drei dieser Punkte z. B. t_1', t_1'', t_2' den Kreis k, so schneidet dieser die zweite Transversale t_2 je noch ausser dem Punkte t_2' in irgend einem zweiten Punkte z. B. T_2''. Dieser Punkt muss in Fig. 1a. von p mit t_1' in gleicher und in Fig. 1b. in entgegengesetzter Richtung liegen. Ferner folgt aus dem Begriff der Potenz

$$pt_1'.pt_1'' = pt_2'.pT_2''$$

Berücksichtigen wir obige Gleichung, so folgt

$$pt_2'' = pT_2''$$

d. h. der Punkt T_2'' fällt mit dem Punkte t_2'' zusammen; oder:

7) Bestimmt man auf jeder von zwei durch einen Punkt p hindurch gehenden Geraden je zwei Punkte, die beide auf beiden Geraden gleichzeitig vom Punkte p aus in gleicher oder entgegengesetzter Richtung liegen und ist das Product der zwei vom Punkte p aus mit den beiden Punkten gebildeten Abschnitte der einen Geraden gleich dem Product der entsprechend gebildeten Abschnitte der andern Geraden, so liegen diese vier Punkte auf einem Kreise.

b) Die Potenz in Beziehung zu zwei und mehreren Kreisen.

Liegen in derselben Ebene zwei Kreise k_1 und k_2 Fig. 2. vor, und besitzt der Punkt p in Bezug auf diese beiden Kreise die beziehlichen Potenzen p_1^2 und p_2^2, so ist, wenn man die Entfernung des Punktes p von den beiden Kreismittelpunkten mit x_1 und x_2 bezeichnet, nach Gleichung 6)

$$p_1^2 = x_1^2 - r_1^2, \quad p_2^2 = x_2^2 - r_2^2$$

wo r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreise sind. Es sei nun

8) $$\frac{p_1^2}{p_2^2} = v_{12} = \text{constante}$$

so heissen wir den Wert v_{12} das Potenzverhältniss des Punktes p in Bezug auf die Kreise k_1 und k_2. Es drängt sich nun die Frage auf: Welchen Punkten der Ebene kommt dasselbe Potenzverhältniss v_{12} zu? Um diese Frage zu erledigen ersetzen wir in Gleichung 8) die Potenzen p_1^2 und p_2^2 durch die Werte in x_1 und x_2 und wir erhalten

9) $$x_1^2 - v_{12}x_2^2 - (r_1^2 - v_{12}r_2^2) = 0$$

Wir erkennen somit, dass die Punkte der Ebene, deren Entfernungen x_1 und x_2 der Gleichung 9) genügen, dasselbe Potenzverhältniss besitzen. Um den Ort dieser Punkte zu bestimmen, verbinden wir den auf der Centrallinie $k_1 k_2 = c_{12}$ beliebig gewählten Punkt m mit dem Punkte p durch ϱ. Wir setzen ferner $k_1 m = y_1$, $k_2 m = y_2$ und $mp_1 = d$, dann ist nach bekannten elementaren Sätzen aus der Geometrie des Dreiecks

$$x_1^2 = \varrho^2 + y_1^2 - 2y_1 d$$
$$x_2^2 = \varrho^2 + y_2^2 - 2y_2 d$$

Gleichung 9) geht somit in folgende über

10) $$\varrho^2(1 - v_{12}) + y_1^2 - v_{12}y_2^2 - 2d(y_1 - v_{12}y_2) - (r_1^2 - v_{12}r_2^2) = 0$$

Für jede Lage des Punktes p ändern sich die Werte von ϱ und d. Es sei nun jedoch der Punkt m so bestimmt, dass

11) $$y_1 - v_{12}y_2 = 0$$

dann ist Gleichung 10) von d unabhängig und wir haben

12) $$\varrho^2(1 - v_{12}) + y_1^2 - v_{12}y_2^2 - (r_1^2 - v_{12}r_2^2) = 0$$

Für die Lage des Punktes m, welche die Centrallinie $k_1 k_2$ nach dem Verhältniss

$$\frac{y_1}{y_2} = v_{12}$$

teilt, bleibt also nach Gleichung 12) auch ϱ oder die Entfernung des Punktes p von m constant gleich. Berücksichtigt man, dass an Fig. 2.

$$y_1 = c_{12} + y_2$$

ist und eliminirt man aus Gleichungen 11) und 12) die Werte von y_1 und y_2, so erhält man allgemein

13) $$\varrho^2 = \frac{v_{12}c_{12}^2 - (r_1^2 - v_{12}r_2^2)(v_{12} - 1)}{(v_{12} - 1)^2}$$

Aus diesem geht hervor:

8) Der Ort der Punkte p der Ebene zweier Kreise, welche in Bezug auf diese Potenzen besitzen, deren Verhältniss einen gegebenen Wert hat, ist ein Kreis. Der Mittelpunkt dieses Kreises teilt die Centrallinie jener zwei Kreise nach dem Verhältniss, das gleich ist dem Potenzverhältniss. Der Radius des Kreises ist

durch Gleichung 13) gegeben. Diesen Kreis heissen wir den **Potenzkreis** mit dem Potenzverhältniss (v_{12}) zu den zwei Kreisen (k_1 und k_2) gehörend.

Schneiden sich Fig. 2. die Kreise k_1 und k_2 in den Punkten s, so ist für jeden dieser Punkte

$$p_1^2 = p_2^2 = 0$$

9) Jeder Potenzkreis zu zwei Kreisen geht durch die beiden Schnittpunkte dieser Kreise mit welchem Potenzverhältniss er auch behaftet sein mag.

Hieraus fliesst nun aber sogleich der folgende Satz:

10) Legt man durch die beiden Schnittpunkte zweier Kreise einen beliebigen dritten Kreis, so ist das Verhältniss der Quadrate, der Tangente (kleinsten halben Sehne), die von den Punkten des letztern Kreises nach den zwei erstern gehen, constant und gleich dem Verhältniss, nach dem die Centrallinie der zwei ersten Kreise vom Mittelpunkt der dritten geteilt wird.

Je nachdem aber die Potenzen p_1^2 und p_2^2 gleichartig oder ungleichartig sind, wird das Potenzverhältniss v_{12} positiv oder negativ. Für den absoluten Wert von v erhalten wir somit zwei Potenzkreise — einen äussern und einen innern. — Der äussere Potenzkreis enthält die Punkte p, deren Potenzen p_1^2 und p_2^2 in Bezug auf die Kreise k_1 und k_2 gleichartig und beide äussere oder beide innere sind. Der innere Potenzkreis enthält die Punkte, deren Potenzen ungleichartig, d. h. die eine äussere und die andern innere sind. Wir bezeichnen die Radien der äussern Potenzkreise mit $\varrho_{a_{12}}$ und die der innern mit $\varrho_{i_{12}}$ und die entsprechenden Mittelpunkte mit a_{12} und i_{12}, so ist also nach Gleichung 13)

$$14)\qquad \varrho_{a_{12}} = \frac{v_{12} c_{12}^2 - (r_1^2 - v_{12} r_2^2)(v-1)}{(v-1)^2}$$

$$\varrho_{i_{12}} = -\frac{v_{12} c_{12}^2 - (r_1^2 + v_{12} r_2^2)(v+1)}{(v+1)^2}.$$

Es ist nun aber nach Satz 8)

$$k_1 a_{12} : k_2 a_{12} = v_{12}; \quad k_1 i_{12} : k_2 i_{12} = -v_{12}$$

Die Mittelpunkte a_{12} und i_{12} teilen also die Centrallinien $k_1 k_2$ nach entgegen gesetzt gleichen Verhältnissen und daher bezeichnen wir diese zwei Punkte mit dem Namen beigeordneter Aehnlich-

keitspunkte, so wie wir ihre Potenzkreise als einander beigeordnet bezeichnen.

Von den Potenzkreisen geniessen einige eine ganz besondere Wichtigkeit. Es sind dies die, welche zu den speciellen Werten der Potenzverhältnisse

$$v_{12} = \pm 1; \quad = \pm \frac{r_1}{r_2}; \quad = \frac{r_1^2}{r_2^2}; \quad = \frac{r_1^n}{r_2^n}$$

gehören. Es sei nun

1) $v = +1$; dann ist

15) $$\varrho_{a_{12}} = \frac{c_{12}^2 - (r_1^2 - r_2^2)0}{0} = \infty$$

und

16) $$\varrho_{i_{12}}^2 = -\frac{c_{12}^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)}{4}.$$

Der äussere Potenzkreis besitzt also einen unendlich grossen Radius. Dies ist aber nur möglich, wenn entweder der Mittelpunkt der Kreise im Endlichen und alle Punkte der Kreise im Unendlichen der Ebene liegen; oder aber, wenn der Mittelpunkt im Unendlichen liegt und dann der Kreis in eine Gerade übergeht, die mit ihren Punkten teilweise im Endlichen oder auch ganz im Unendlichen liegt. Da aber die beiden Schnitte s der Kreise k_1 und k_2 auch auf dem Potenzkreise liegen, so geht in diesem Fall der Potenzkreis in die den Kreisen k_1 und k_2 gemeinsame Sehne über. Da $v_{12} = +1$, so ist $p_1^2 = p_2^2$ und wir haben:

11) Der Ort alle Punkte in der Ebene zweier Kreise, welche in Bezug auf diese Kreise gleiche und gleichartige Potenzen besitzen, ist die gemeinsame Sehne der beiden Kreise. Wir heissen diese Sehne die Potenzlinie der beiden Kreise.

Oder auch, da $p_1^2 = p_2^2$ und $p_1 = p_2$ ist, nach den Sätzen 4) und 5).

12) Der Ort aller Punkte, von denen aus an zwei Kreise gleich lange Tangente und kleinste Sehne gehen, ist die gemeinsame Sehne der beiden Kreise.

Der Aehnlichkeitspunkt c_{12} für $v_{12} = -1$ liegt in der Mitte der beiden Kreise k_1 und k_2 und in diesem Fall ist

$$p_1^2 = -p_2^2$$

also die absoluten Werte von p_1 und p_2 einander gleich und somit folgt:

13) Der Ort all derjenigen Punkte in der Ebene zweier Kreise, von denen aus an den einen Kreis beziehlich Tangenten oder kleinste halbe Sehnen gehen, die beziehlich gleich sind den kleinsten Sehnen oder Tangenten an den andern Kreis, ist ein Kreis der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise geht und dessen Mittelpunkt die Centrallinie dieser zwei Kreise halbirt.

Es sei $v_{12} = \pm \frac{r_1}{r_2}$, alsdann hat man aus Gleichung 13):

17) $$\varrho_{a_{12}}{}^2 = \frac{r_1 r_2 [c_{12}{}^2 - (r_1 - r_2)^2]}{(r_1 - r_2)^2}$$

und

18) $$\varrho_{i_{12}}{}^2 = -\frac{r_1 r_2 [c_{12}{}^2 - (r_1 + r_2)^2]}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Die Radien dieser Kreise bezeichnen wir mit $R_{a_{12}}$ und $R_{i_{12}}$. Es ist also:

19) $$\begin{cases} R_{a_{12}} = \varrho_{a_{12}} \\ R_{i_{12}} = \varrho_{i_{12}}, \end{cases}$$

und die Mittelpunkte seien mit A_{12} und J_{12} bezeichnet. Da in diesem Fall Fig. 3. die Proportionen

$$k_1 A_{12} : k_2 A_{12} = r_1 : r_2 = k_1 s : k_2 s$$

und

$$k_1 J_{12} : k_2 J_{12} = r_1 : r_2 = k_1 s : k_2 s$$

richtig sind, so folgt aus einem bekannten Satze des Dreiecks, dass der Radius $R_{a_{12}} = A_{12} s$ den Aussenwinkel und $R_{i_{12}} = J_{12} s$ den Innenwinkel bei s des Dreiecks $k_1 k_2 s$ halbirt. Es sind also die Radien $A_{12} s$ und $J_{12} s$ zu einander normal. Es schneiden sich also die Kreise A_{12} und J_{12} rechtwinklig. Ebenso halbirt jeder dieser Potenzkreise den Winkel, unter dem sich k_1 und k_2 schneiden [1]).

Aus all dem fliessen nachfolgende Sätze:

14) Der Ort all' der Punkte, von denen aus an zwei Kreise Tangenten oder halbe kleinste Sehnen gehen,

1) Wir sagen, zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich unter dem Winkel α, wenn die Radien, welche nach dem einen Schnittpunkte der beiden Kreise gehen, den Winkel α einschliessen.

deren Quadrate sich verhalten wie die Radien dieser zwei Kreise, ist ein Kreis, welcher durch die Schnitte der beiden Kreise hindurch geht und dessen Mittelpunkt die Centrallinine nach dem äussern Verhältniss teilt, das gleich ist dem Verhältniss der Radien der zwei Kreise.

15) Der Ort der Punkte, von denen aus nach zwei Kreisen Tangenten oder kleinste halbe Sehnen nach dem einen Kreise gehen, deren Quadrate sich verhalten zu den Quadraten der kleinsten halben Sehnen oder Tangenten, die nach dem andern Kreise gehen, wie die Radien der beiden Kreise, ist ein Kreis, der durch die Schnittte der beiden Kreise hindurch geht und dessen Mittelpunkt die Centrallinie der zwei Kreise nach dem innern Verhältniss teilt, das gleich ist dem Verhältniss der beiden Radien.

16) Diese beiden Ortskreise in Satz 14) und 15) schneiden sich rechtwinklig und wir heissen sie deshalb orthogonale Potenzkreise.

17) Jeder der beiden orthogonalen Potenzkreise zweier Kreise schneidet diese unter gleichen Winkeln, d. h. halbirt den Winkel unter dem sich diese Kreise schneiden.

Die Mittelpunkte der beiden orthogonalen Potenzkreise zweier Kreise heissen wir die Hauptähnlichkeitspunkte.

Es ist hier wichtig, die speciellen Formen der Kreise k_1 und k_2 selbst zu betrachten.

Es sei 1) $r_1 = r_2$, dann folgt aus Gleichung 17), dass

$$R_{a_{12}} = \infty \quad \text{und} \quad R_{i_{12}}{}^2 = \frac{2r_1{}^2 - c_{12}{}^2}{4}.$$

In diesem Fall geht also der äussere orthogonale Potenzkreis in die Potenzlinie der beiden Kreise und der innere in den der Potenzlinie beigeordneten Potenzkreis über.

Es seien 2) die beiden Kreise k_1 und k_2 concentrisch, d. h.

$$c_{12} = 0$$

so folgt, da $k_1 A_{12} = k_2 A_{12}$, dass

$$k_1 A_{12} = k_2 A_{12} = 0$$

und ebenso

$$k_1 J_{12} = k_2 J_{12} = 0,$$

d. h.

18) Die beiden Hauptähnlichkeitspunkte bei zwei concentrischen Kreisen fallen mit dem Centrum der beiden Kreise zusammen. Die Radien der beiden orthogonalen Potenzkreise sind gegeben durch

20) $$\begin{cases} R_{a_{12}}^2 = r_1 r_2 \\ R_{i_{12}}^2 = r_1 r_2. \end{cases}$$

Es sei 3) der Radius der Kreise k_2 gleich Null, d. h. es reducire sich der Kreis k_2 auf einen Punkt, dann ist

$$k_2 A_{12} : k_1 A_{12} = 0 : r,$$

und

$$k_2 J_{12} : k_1 J_{12} = 0 : r.$$

Also

$$k_2 A_{12} = k_2 J_{12} = 0.$$

19) Zu einem Kreise und einem Punkt lässt sich immer der Punkt als der äussere und innere Hauptähnlichkeitspunkt ansehen. Die Radien der beiden orthoganalen Potenzkreise sind gegeben durch

21) $$R_{a_{12}}^2 = R_{i_{12}} = 0,$$

d. h. der Punkt repräsentirt selbst diese beiden orthogonalen Potenzkreise.

Es degenerire 4) der eine Kreis in eine Gerade mit ihr an endlich und unendlich fernen Punkten, so ist r_2 z. B. gleich ∞, also auch c_{12}, und zwar kann man zunächst $c_{12} = r + \delta$ setzen. Setzen wir allgemein in der Proportion

$$k_1 A_{12} : k_2 A_{12} = r_1 : r_2$$

und

$$k_1 J_{12} : k_2 J_{12} = r_1 : r_2$$

den Wert $c_{12} = r_2$, so folgt

$$k_1 A_{12} = -\frac{r_1(r_2+\delta)}{r_2 - r_1} \quad \text{und} \quad k_1 J_{12} = +\frac{r_1(r_2+\delta)}{r_2 - r_1}.$$

Oder:

$$k_1 A_{12} = -\frac{r_1\left(1+\frac{\delta}{r_2}\right)}{1-\frac{r_1}{r_2}} \quad \text{und} \quad k_1 J_{12} = \frac{r_1\left(1+\frac{\delta}{r_2}\right)}{1-\frac{r_1}{r_2}}$$

und die Radien sind

$$R_{a_{12}}^2 = \frac{r_1 r_2 (\delta^2 + 2r_2(\delta + r_1) - r_1^2)}{(r_1 - r_2)^2};$$

$$R_{i_{12}}^2 = -\frac{r_1 r_2 (\delta^2 + 2r_2(\delta + r_1) - r_1^2)}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Oder auch:

$$R_{a_{12}}^2 = \frac{r_1 [2(\delta + r_1) + \frac{\delta^2 - r_1^2}{r_2}]}{\left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)^2}; \quad R_{i_{12}} = -\frac{r_1 [2(\delta - r_1) + \frac{\delta^2 - r_1^2}{r_2}]}{\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)^2}$$

Setzen wir schliesslich $r_2 = \infty$, so folgt:

$$k_1 A_{12} = -r_1; \quad k_1 J_{12} = +r_1$$

und

22) $$R_{a_{12}}^2 = 2r_1(\delta + r_1); \quad R_{i_{12}}^2 = -2r_1(\delta - r_1).$$

Es ist leicht zu erkennen, dass δ gleich ist dem Normalabstand des Mittelpunktes k_1 von der Geraden. Aus diesen Gleichungen fliesst der folgende Satz:

20) **Fällt man in der Ebene eines Kreises und einer Geraden den zu dieser normalen Durchmesser, so sind dessen beide Ecken als die Hauptähnlichkeitspunkte zu dem Kreise und der Geraden anzusehen. Insbesondere ist der Endpunkt, welcher vom Mittelpunkt des Kreises aus nicht in derselben Richtung liegt wie die Gerade, als der äussere und der andre, der also in derselben Richtung liegt, als der innere Hauptähnlichkeitspunkt anzusehen. Die Radien der beiden Potenzkreise sind durch die Gleichungen 22) gegeben.**

Hieraus fliesst der folgende Satz:

21) **Beschreibt man aus den Endpunkten des Durchmessers eines Kreises der zu einer Geraden normal steht und beschreibt man aus den beiden Endpunkten dieser Durchmesser die zwei Kreise, welche durch die zwei Schnittpunkte jener Kreise mit der Geraden gehen, so schneiden sich diese rechtwinklig und jeder von ihnen halbirt den Winkel, unter dem sich jener Kreis und die Gerade schneiden.**

Es sei 3) $v_{12} = \pm \frac{r_1^2}{r_2^2}$, alsdann ergiebt sich aus Gleichung 13):

$$23)\quad \begin{cases} \varrho_{a_{12}} = \dfrac{r_1 r_2 c_{12}}{r_1 - r_2} \\ \varrho_{i_{12}}^2 = r_1^2 r_2^2 \dfrac{2(r_1^2 + r_2^2) - c_{12}^2}{(r_1^2 + r_2^2)^2}. \end{cases}$$

Da in diesem Fall die Proportion

$$p_1^2 : p_2^2 = r_1^2 : r_2^2$$

übergeht in

$$p_1 : p_2 = r_1 : r_2$$

so folgen die Sätze:

22) Der Ort all' der Punkte in der Ebene zweier Kreise, von denen aus an beide Kreise Tangenten oder halbe kleinste Sehnen gehen, die sich verhalten wie die Radien der Kreise, ist ein Kreis, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise hindurch geht und dessen Mittelpunkt die Centrallinie beider Kreise nach dem äussern Verhältniss teilt, das gleich ist dem Verhältniss der Quadrate der Radien der beiden Kreise.

23) Der Ort all' der Punkte in der Ebene zweier Punkte, von denen aus an den einen Kreis Tangenten oder halbe kleinste Sehnen gehen, die sich verhalten zu den halben kleinsten Sehnen oder Tangenten, welche von ihnen an den andern Kreis gehen, wie die Radien der beiden Kreise, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Centrallinie beider Kreise nach dem innern Verhältniss, gleich dem Verhältniss der Quadrate der beiden Radien teilt.

Diese Kreise und ihre Mittelpunkte bezeichnen wir beziehlich mit $\mathfrak{A}_{12}$ und $\mathfrak{J}_{12}$ und ihre Radien, deren Werte durch Gleichungen 23) gegeben sind, mit $\mathfrak{R}_{a_{12}}$ und $\mathfrak{R}_{i_{12}}$.

Setzt man endlich 4) $v = \pm \frac{r_1^n}{r_2^n}$, so erhält man Resultate, welche den obigen analog sind und somit leicht weiter verfolgt werden können.

Bemerkung. Bei den bisherigen Beobachtungen über den Potenzkreis zweier Kreise wurde immer stillschweigend vorausgesetzt, dass sich die beiden Kreise k_1 und k_2 in reellen Punkten schneiden. Dieser Schnittpunktenpaar war aber bei der Herleitung der Potenzkreise als Ortskreis ohne Einfluss. Hieraus folgt sogleich, dass alle Sätze über Potenzkreise im allgemeinen gelten, sowol bei Potenzen die zu zwei sich in reellen Punkten, als zu zwei sich nicht in reellen

Punkten schneidenden Kreisen gehörend. Bei Potenzkreisen besonderer Natur werden sich einige Modificationen ergeben, die wir am geeigneten Orte betrachten, was z. B. bei den orthogonalen Potenzkreisen der Fall ist.

Nehmen wir zu den Kreisen k_1 und k_2 noch den Kreis k_3 hinzu. Es sei zu k_1 und k_2 der Potenzkreis a_3 mit dem Potenzverhältniss v_3, zu k_2 und k_3 der Potenzkreis a_3 mit dem Potenzverhältniss v_1 und endlich zu k_3 und k_1 der Potenzkreis a_2 mit dem Potenzverhältniss v_2 gegeben. Die zwei Potenzkreise a_1 und a_2 schneiden sich in dem Punktepaar P. Die Potenzen des einen Punktes P in Bezug auf die drei Kreise k seien p_1^2, p_2^2, p_3^2. Es ist alsdann:

$$\frac{p_2^2}{p_3^2} = v_1; \quad \frac{p_3^2}{p_1^2} = v_2$$

und das Potenzverhältniss in Bezug auf k_1 und k_2 sei v_3', dann ist

$$\frac{p_1^2}{p_2^2} = v_3'.$$

Der Potenzkreis a_3', der dem Potenzverhältniss v_3' entspricht, geht also auch durch den Punkt P. Wir setzen daher $v_3 = v_3'$ und haben so

$$24) \qquad v_1 . v_2 . v_3 = \frac{p_2^2}{p_3^2} . \frac{p_3^2}{p_1^2} \frac{p_1^2}{p_2^2} = +1.$$

Bei dieser Bestimmung entspricht auch dem zweiten Punkte P das Verhältniss v_3 und es gehen also bei dieser Annahme die drei Potenzkreise a durch dasselbe Punktepaar P und ihre Mittelpunkte a liegen auf einer Geraden — der Aehnlichkeisaxe.

Aus diesen fliessen folgende Sätze:

24) Sind in der Ebene drei Kreise beliebig gelegen, und man bestimmt zu je zweien einen beliebigen Potenzkreis, jedoch so, dass das Product der zugehörenden Potenzverhältnisse gleich der positiven Einheit ist, so schneiden sich die drei Potenzkreise in demselben Punktepaar.

In andere Fassung gebracht, heisst dieser Satz:

25) Schneidet man das Centraldreieck $k_1 k_2 k_3$ dreier Kreise durch eine beliebige Gerade in den Punkten a_1,

a_2, a_3 und beschreibt man beziehlich um diese Punkte als Mittelpunkte Kreise, so dass a_1 durch das Schnittpunktenpaar der Kreise k_2 und k_3, a_2 durch das der k_3 und k_1 und endlich a_3 durch das der k_1 und k_2, so schneiden sich diese Kreise in demselben Punktepaar.

Das Punktepaar P, in dem sich irgend drei Potenzkreise dreier Kreise schneiden, heissen wir Potenzpunktenpaare.

Da durch den beliebig gewählten Punkt P und die zwei Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2 der Potenzkreis a_3 bestimmt ist und zwar eindeutig, ebenso a_1 und a_2, so folgt:

26) Jeder Punkt der Ebene dreier Kreise kann als Potenzpunkt aufgefasst werden, und ihm ist immer ein zweiter Punkt als Potenzpunkt conjugirt. Durch den einen von den Punkten eines Potenzpunktepaares ist immer der andere besimmt und zwar nur auf eine Weise.

Consommiren wir zu den drei äussern Potenzkreisen a_1, a_2, a_3, derselben Aehnlichkeitsaxe die beigeordneten innern J_1, J_2, J_3, so hat man nach der Relation 24):

$$(+v_1).(+v_2).(+v_3) = +1; \qquad (+v_1).(-v_2).(-v_3) = +1$$
$$(-v_1).(+v_2).(-v_3) = +1; \qquad (-v_1).(-v_2).(+v_3) = +1$$

Hieraus folgt:

27) Gehen drei Potenzkreise durch dasselbe Punktepaar, so bilden diese mit den drei beigeordneten Potenzkreisen sechs Kreise, von denen einmal je die drei äussern und dreimal je ein äussrer mit den zwei nicht beigeordneten innern je durch dasselbe Potenzpunktepaar gehen.

Gehen wir nun zu den speciellen Fällen über. Es sei $v_3 = +1$. In diesem Fall geht a_3 in die Potenzlinie der Kreise k_1 und k_2 über, und wir haben:

28) Schneidet man das Centraldreieck dreier Kreise mit einer beliebigen, jedoch einer der drei Centrallinien parallelen Geraden und beschreibt um die Schnittpunkte der beiden übrigen Centrallinien mit dieser Geraden als Mittelpunkte Kreise, welche beziehlich durch die Schnittpunktepaare der zugehörenden zwei der drei gegebenen Kreise gehen, so schneiden sich diese zwei Kreise in zwei Punkten, die auf der Potenzlinie der

zwei Kreise liegen, deren Mittelpunkte auf der mit der Geraden parallelen Centrallinie liegen.

Es sei $v_1 = v_2 = +1$; dann ist auch $y_3 = +1$ und alle drei äussern Potenzkreise gehen in die Potenzlinie je zweier der drei Kreise über. Da die Relation 24) erfüllt ist, so müssen sich also die drei Potenzlinien dreier Kreise in demselben Punktepaar schneiden. Da sich zwei Gerade mit ihren endlichen Teilen nur in einem ihrer endlichen Punkte schneiden können, so muss der zweite Schnittpunkt auf ihren unendlich fernen Teilen liegen, und wir haben:

29) Die drei Potenzlinien, die zu je zwei von drei Kreisen gehören, schneiden sich in zwei Potenzpunkten, von denen der eine im allgemeinen im Endlichen und der zweite immer im Unendlichen der Ebene liegt. Wir heissen den im Endlichen liegenden Potenzpunkt den Hauptpotenzpunkt und bezeichnen ihn mit π.

Da für den Hauptpotenzpunkt alle Potenzverhältnisse gleich der positiven Einheit, so folgt:

30) Liegt der Hauptpotenzpunkt innerhalb oder ausserhalb einer der drei Kreise, so liegt er im Innern oder Aeussern aller drei Kreise,

oder auch:

30) In der Ebene dreier Kreise giebt es einen im Endlichen liegenden Punkt, von dem aus an alle drei Kreise entweder gleiche Tangenten oder gleiche halbe kleinste Sehnen gehen.

Beschreiben wir um den Hauptpotenzpunkt π mit diesen Tangenten oder Sehnen als Radius den dadurch bestimmten Kreis, so folgt:

31) In der Ebene dreier Kreise lässt sich immer ein solcher Kreis beschreiben, der entweder alle drei Kreise rechtwinklig und folglich auch von allen drei Kreisen rechtwinklig, oder aber, wenn dies nicht möglich, von allen drei Kreisen über seinem Durchmesser geschnitten wird. Der Mittelpunkt dieser Kreise ist der Hauptpotenzpunkt dieser drei Kreise.

Diesen Kreis mit dem Mittelpunkt π heissen wir den Orthogonalkreis der drei Kreise k, und wir sagen auch: Jeder Kreis, der einen zweiten entweder rechtwinklig oder über seinem

Durchmesser schneidet, habe diesen zweiten Kreis zu seinem **Orthogonalkreis.**

Setzen wir $v_1 = +1$; $v_2 = v_3 = -1$, so folgt, dass sich die Potenzlinien k_2 und k_3 wie die zu den zwei andern Potenzlinien beigeordneten innern Potenzkreise in demselben Punktepaar schneiden und hieraus folgt:

32) Auf jeder Potenzlinie von zwei zu drei Kreisen giebt es je zwei Punkte, von denen aus an die zur Potenzlinie gehörenden zwei Kreise ebenso lange Tangenten oder halbe kleinste Sehnen gehen, wie an den dritten Kreis kleinste halbe Sehnen oder Tangenten.

Setzen wir

$$v_1 = \pm \frac{r_2}{r_3}; \quad v_2 = \pm \frac{r_3}{r_1} \text{ und } v_3 = \pm \frac{r_1}{r_2},$$

so ist:

$$v_1 . v_2 . v_3 = +1; \qquad (-v_1).(+v_2)(-v_3) = +1$$
$$v_1 .(-v_2).(-v_3) = +1; \qquad (-v_1).(-v_2)(+v_3) = +1.$$

Hieraus ergiebt sich:

33) Drei Kreise einer Ebene besitzen sechs orthogonale Potenzkreise und sechs Hauptähnlichkeitspunkte. Von diesen liegen vier mal je drei auf einer Geraden — den Hauptähnlichkeitsaxen und zwar einmal je die drei äussern und dreimal je ein äusserer mit den zwei nicht beigeordneten innern. Von den orthogonalen Potenzkreisen gehen somit auch viermal je drei durch dasselbe Hauptpotenzpunktepaar und zwar je die drei äussern und je ein äusserer mit den zwei nicht zugehörenden innern.

Aehnlich verhält es sich mit den oben betrachteten Kreisen $\mathfrak{A}_{x,y}$ und $\mathfrak{J}_{x,y}$.

c) Ueber Kreisschaaren.

Schneiden sich die zwei Kreise k_1 und k_2 (Fig. 4.) in dem Punktepaar s und sei h_{12} ihre Potenzlinie oder gemeinsame Sehne. Fällt man aus irgend einem Punkte p derselben die Tangenten t_1 und t_2 nach den Kreisen k_1 und k_2, so ist

$$t_1 = t_2 = t$$

Beschreiben wir um p mit dem Radius t den Kreis p, so schneidet dieser die beiden Kreise k_1 und k_1 rechtwinklig; halten wir die Kreise k_1 und p fest und lassen k_2 in irgend einen andern durch die Punkte s hindurch gehenden Kreis übergehen, so ist für jeden beliebigen dieser Kreise k_n die Gerade h die Potenzlinie zu k_1 und k_n. Es schneidet also auch der Kreis p den beliebig gewählten Kreis k_n rechtwinklig. Alle Kreise k_n, welche durch das Punktepaar s hindurch gehen, heisst man eine Kreisschaar. Die Mittelpunkte der Kreise derselben liegen auf der Geraden k_1, k_2, die wir Axe heissen. Da jeder Punkt der Axe nur Mittelpunkt eines Kreises k_n ist, der den Kreis k_n rechtwinklig schneidet, so folgt:

34) Alle Kreise, welche einen Kreis rechtwinklig schneiden und ihre Mittelpunkte auf einer bestimmten Geraden haben, bilden eine Kreisschaar. Die beiden Grundpunkte s der Schaar liegen auf einer Geraden, welche durch den Mittelpunkt jener Kreise geht und zur Axe der Schaar normal steht. Diese Gerade ist die Potenzlinie der Schaar, oder der Kreis derselben, welcher in eine Gerade mit ihrem endlichen und unendlichen Teil übergeht.

Nehmen wir aber in Fig. 4. den Punkt p nicht ausserhalb der beiden Grundpunkte s, vielmehr zwischen denselben in p' an, so gehen von p' keine Tangenten als vielmehr die kleinsten halben Sehnen S_1 und S_2. Beschreiben wir um p' mit diesen Sehnen, als Radius den dadurch bestimmten Kreis, so wird dieser sowol durch k_1 wie k_2 über seinem Durchmesser geschnitten. Durch vollständig gleiche weitere Betrachtungen wie oben, ergiebt sich:

35) Alle Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf einer Geraden haben und einen Kreis über seinem Durchmesser schneiden. bilden eine Kreisschaar. Die Potenzlinie derselben geht durch die Kreise, welche von allen der Schaar über ihren Durchmessern geschnitten werden.

Beschreiben wir aus all den Punkten p der Potenzlinie h_{12} die Kreise, welche den Kreis k_1 und folglich alle Kreise k_n rechtwinklig schneiden, so bilden diese nach Satz 34) eine neue Kreisschaar, die wir die der ersten conjugirte Schaar nennen. Hieraus folgt sogleich:

36) Von zwei einander conjugirten Schaaren ist die Potenzlinie der einen die Axe der andern.

Wir haben die erste Schaar in Fig. 4. definirt als die Gesammt-

heit aller Kreise, welche durch zwei Punkte s gehen. Die zweite Schaar hat nun aber die Eigenschaft, keine zwei solche (reelle) Grundpunkte zu besitzen, d. h. von dieser Schaar schneiden sich zwei Kreise in zwei (reellen) Punkten. Um dies einzusehen, hat man nur zu zeigen, dass es zwei Kreise der Schaar so giebt, die sich nicht schneiden. Betrachten wir die Grundpunkte s der ersten Schaar als Kreise vom Radius Null, so sind dies Kreise p, welche jeden Kreis k_n rechtwinklig schneiden, und sind somit als Kreise der zweiten Schaar zu nehmen. Hieraus folgt:

37) Von zwei conjugirten Kreisschaaren besitzt die zweite die Grundpunkte der ersten als Kreise ihrer Schaar mit dem Radius gleich Null. Wir heissen diese Punkte deshalb Grenzkreise der zweiten Schaar.

Nehmen wir von der einen von den beiden conjugirten Kreisschaaren zwei Kreise heraus, so folgt:

38) Alle Kreise, welche zwei Kreise reehtwinklig schneiden, bilden eine Kreisschaar, deren Axe die Potenzlinie jener zwei Kreise ist.

Nehmen wir zwei der Kreise p, welche von allen Kreisen der Schaar k_n über ihren Durchmessern geschnitten werden, so folgt umgekehrt:

39) Alle Kreise, welche zwei Kreise über ihren Durchmessern schneiden, bilden eine Kreisschaar.

Nehmen wir endlich einen Kreis p, welcher von allen Kreisen der Schaar k_n rechtwinklig, und einen Kreis p_1, welcher von allen Kreisen k_n über seinen Durchmessern geschnitten werden, so folgt umgekehrt:

40) Alle Kreise, welche einen Kreis rechtwinklig und einen zweiten über seinen Durchmesser schneiden, bilden eine Kreisschaar.

Die drei letzteren Sätze 38)—40) lassen sich im folgenden zusammen fassen:

41) Alle Kreise, welche zwei Kreise zu Orthogonalkreisen besitzen, bilden eine Kreisschaar.

Bei den Kreisen p liegen die Grundpunkte s vom Mittelpunkte p in derselben, bei den Kreisen p_1 aber in entgegengesetzter Richtung. Bezeichnen wir die Radien dieser Kreise mit r und r_1, so folgt aus dem Begriff der Potenz, wenn wir diese beiden Grundpunkte zur Unterscheidung mit r_1 und r_2 bezeichnen, für den Kreis p

$$ps_1 . ps_2 = r_1^2$$

und für den Kreis p_1 ergiebt sich

$$p_1 s_1 . p_1 s_2 = - r_1^2.$$

Hieraus folgt, in beiden Kreisen liegt der eine Grundpunkt innerhalb und der andre ausserhalb. Die beiden Punkte heissen wir sowol in Bezug auf den Kreis p wie p_1 polarreciproke Punkte. Hieraus ergiebt sich sogleich:

42) Jeder Durchmesser eines Kreises schneidet einen zweiten Kreis in einem Paar polarreciproker Punkte in Bezug auf den ersten Kreis, wenn dieser in Bezug auf den zweiten Kreis ein Orthogonalkreis ist und umgekehrt.

43) Jeder Kreis, der durch zwei polarreciproke Punkte eines Kreises geht, besitzt diesen zum Orthogonalpunkt.

Beachten wir obige Relationen und den Satz 7), so folgt:

44) Durch zwei Paar gleichartige polarreciproke Punkte eines Kreises geht immer ein Kreis, der jenen Kreis zum Orthogonalkreis hat.

Lassen wir von zwei Kreisen den einen in einen solchen mit dem Radius Null und in einen Punkt übergehen, so folgt aus Lehrsatz 42):

45) Alle Kreise, welche durch einen Punkt gehen und einen Kreis zum Orthogonalkreis haben, bilden eine Kreisschaar.

Haben wir einen Kreis k_1 und zwei Punkte k_2 und k_3, so folgt aus Satz 30), sobald man diese Punkte als Kreise mit dem Radius Null ansieht:

46) Durch zwei Punkte geht immer ein Kreis, welcher zu einem Kreis Orthogonalkreis ist

und aus Satz 45):

47) Durch zwei Punkte gehen immer zwei Kreise, welche einen beliebigen Kreis zum Orthogonalkreis haben. Der eine schneidet diesen über seinem Durchmesser und der andre rechtwinklig.

Zu zwei Kreisen haben wir durch die Sätze 38)—42) vier verschiedene Kreisschaaren kennen gelernt, nämlich 1) die Schaar der Kreise die jene zwei rechtwinklig, 2) die Schaar der Kreise, welche

jene zwei je über ihrem Durchmesser, 3) welche den ersten rechtwinklig und den zweiten über seinem Durchmesser schneidet. Zu diesen vier Schaaren gesellt sich noch die folgende, welche zu jenen in eigentümlicher Beziehung steht; — es ist dies die Schaar der Kreise, welche durch die Mittelpunkte der beiden Kreise hindurch gehen.

Wir bezeichnen die Axe dieser Schaar mit grossen Buchstaben, wie wir die Mittelpunkte der Kreise der Schaaren selbst mit den gleichnamigen kleinen Buchstaben bezeichnen.

Wir bezeichnen die Kreise, welche die zwei Kreise k_1 und k_2 rechtwinklig schneiden, mit o_{12}, ihre Axe somit mit O_{12}; die Kreise, welche k_1 und k_2 über ihren Durchmessern schneiden, mit d_{12} und ihre Axe mit D_{12}; die Kreise, welche k_1 rechtwinklig und k_2 über dem Durchmesser schneiden, mit $d_{1,2}$ und die Axe mit $D_{1,2}$ und die Kreise, welche k_2 rechtwinklig und den Kreis k_1 über dem Durchmesser schneiden, mit $d_{2,1}$ und die Axe mit $D_{2,1}$, und schliesslich die Kreise, welche durch die Mittelpunkte von k_1 und k_2 gehen, mit m_{12} und ihre Axe mit M_{12}.

Es schneide der beliebig gewählte Kreis d_{12} die beiden Kreise k_1 und k_2 über den Durchmessern $s_1's_1''$ und $s_2's_2''$, dann schneiden sich diese als Potenzlinie aufgefasst im Punkte o_{12} der Potenzlinie O_{12}. Beschreiben wir den Kreis o_{12} um o_{12}, so ist dieser der Orthogonalkreis zu k_1, k_2 und d_{12}, und zwar schneidet er alle drei rechtwinklig. Schneiden sich o_{12} und d_{12} in dem Punktepaar q, so sind also die Winkel Fig. 5.

$$d_{12} k_1 o_{12}; \quad d_{12} q\, o_{12} \quad \text{und} \quad d_{12} k_2 o_{12}$$

je rechte d. h. die sechs Punkte

$$d_{12}, \quad k_1, \quad q, \quad o_{12}, \quad k_2$$

liegen auf demselben Kreise m_{12}. Der Mittelpunkt m_{12} liegt also mit den Mittelpunkten o_{12} und d_{12} in derselben Geraden und halbirt die Centrallinie $o_{12} d_{12}$. Hieraus folgt:

48) Die Axen der Kreisschaaren, deren erste zwei Kreise rechtwinklig und deren andere dieselben zwei Kreise je über ihren Durchmessern schneidet, liegen zu der Axe der Kreisschaar, deren Kreise durch die Mittelpunkte jener zwei Kreise gehen, symmetrisch. In den Schaaren O_{12}, D_{12} und M_{12} giebt es je einen Kreis, beziehlich o_{12}, d_{12}, m_{12}, welche alle drei sich in demselben Punktepaar schneiden und wo die Mittelpunkte o_{12}

und d_{12} auf einem Durchmesser, als dessen Endpunkte, des Kreises m_{12} liegen.

Drei Kreise o_{12}, d_{12} und m_{12}, welche durch dasselbe Punktepaar 9) gehen, heissen wir zusammengehörende Kreise. Die Centrallinie k_1k_2 ist Fig. 5. die allen Kreisschaaren O_{12}, D_{12} etc. gemeinsame Potenzlinie. Die Gerade qq schneidet k_1k_2 in dem Punkte $\mathfrak{A}_{12}$. Dieser Punkt ist Punkt gleicher Potenzen oder Hauptpotenzpunkt zu den drei Kreisen o_{12}, d_{12} und m_{12} und folglich, da er auf k_1k_2 liegt, zu allen Kreisen der drei Schaaren O_{12}, D_{12}, M_{12}. Ausserdem ergiebt sich wie leicht einzusehen, dass er ausserhalb der endlichen Strecke der beiden Mittelpunkte k_1 und k_2 liegen muss. Beschreiben wir daher um $\mathfrak{A}_{12}$ als Mittelpunkt den zugehörenden Orthogonalkreis zu den drei Kreisen o_{12}, d_{12} und m_{12}, so ist dieser Orthogonalkreis in Bezug auf alle Kreise der zugehörenden Kreisschaaren O_{12}, D_{12}, M_{12}. Weil der Kreis $\mathfrak{A}_{12}$ Orthogonalkreis zu allen o_{12} ist, so ist $\mathfrak{A}_{12}$ einer der Kreise der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar. Um nun den Radius des Kreises $\mathfrak{A}_{12}$ zu bestimmen, setzen wir $k_1\mathfrak{A}_{12} = y_1$ und $k_2\mathfrak{A}_{12} = y_2$, so ist

$$\alpha)\quad y_1 = y_2 + c_{12}$$

wo $c_{12} = k_1k_2$. Es sei ferner

$$\beta)\quad \frac{y_1}{y_2} = v_{12}$$

so ist, wenn man $\mathfrak{A}_{12}$ als Potenzkreis der Kreise k_1 und k_2 auffasst, sein Radius nach Gleichung 13) gegeben durch

$$\gamma)\quad \varrho_a^2 = \frac{v_{12}c_{12}^2 - (r_1^2 - v_{12}r_2^2)(v_{12}-1)}{(v_{12}-1)^2}$$

Da nun $\mathfrak{A}_{12}$ den Kreis m_{12} rechtwinklig schneidet, so ist, wenn wir den Kreis wählen, welcher k_1k_2 zum Durchmesser hat; oder auch aus dem Begriff der Potenz:

$$\delta)\quad \varrho_a^2 = \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{c_{12}}{2}\right)^2 = y_1y_2$$

Aus diesen 4 Gleichungen ergeben sich nun sogleich die folgenden Resultate

$$v_{12} = \frac{r_1^2}{r_2^2},\quad k_1\mathfrak{A}_{12} = \frac{r_1^2c_{12}}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$k_2\mathfrak{A}_{12} = \frac{r_2^2c_{12}}{r_1^2 - r_2^2}$$

und schliesslich

25) $$\varrho_{a_{12}} = \mathfrak{R}_{a_{12}} = \frac{r_1 r_2 c_{12}}{r_1^2 - r_2^2}$$

Aus diesem geht hervor, dass der Kreis $\mathfrak{A}_{12}$ identisch mit dem oben betrachteten Kreise $\mathfrak{A}_{12}$ ist. Da $\mathfrak{A}_{12}$ Hauptpotenzpunkt in Bezug auf alle Kreise o_{12}, d_{12} und m_{12} ist, so folgt

49) Irgend zwei beliebig gewählte Kreise o_{12} und d_{12} schneiden sich in zwei Punkten, durch welche immer einer der Kreise m_{12} geht. Die Potenzlinie drei solcher Kreise teilt immer die Centrallinie der zwei Kreise k_1 und k_2 nach dem äusseren Verhältniss, das gleich ist dem Verhältniss der Quadrate der Radien der beiden Kreise k_1 und k_2. Dieser Teilpunkt ist Mittelpunkt eines Kreises, der zur Schaar der Kreise k_1 und k_2 gehört und Orthogonalkreis ist zu allen Kreisen der drei Schaaren O_{12}, D_{12} und M_{12}.

Nehmen wir die zwei Kreisschaaren $D_{1,2}$ und $D_{2,1}$ und betrachten aus jeder dieser Schaaren je einen Kreis, ausser dass sich diese zwei rechtwinklig schneiden, sonst beliebig gewählt wie in Fig. 6., so erkennt man, dass der Mittelpunkt $d_{1,2}$ auf dem Durchmesser von k_1 liegt, über welchem $d_{2,1}$ den Kreis k_1 schneidet. Es ist also

$$\angle\, d_{2,1} k_1 d_{1,2} = 90^0$$

Ebenso findet man

$$\angle\, d_{1,2} k_2 d_{2,1} = 90^0$$

Bezeichnen wir mit q_i die Schnittpunkte von $d_{1,2}$ und $d_{2,1}$, so sind die Winkel

$$\angle\, d_{1,2} q_i d_{2,1} = 90^0$$

Es liegen also die sechs Punkte

$$d_{1,2},\quad k_1;\quad d_{2,1},\quad q_i$$

auf einem Kreise m_{12} mit $d_{1,2}$, $d_{2,1}$ als Durchmesser. Wir haben:

50) Die beiden Kreisschaaren $D_{1,2}$ und $D_{2,1}$ haben ihre Axen symmetrisch gelegen zur Axe der Schaar M_{12}. Je zwei Kreise $d_{1,2}$ und $d_{2,1}$, welche sich rechtwinklig schneiden, schneiden sich in zwei Punkten, durch welche ein Kreis m_{12} geht, der auch die Mittelpunkte $d_{1,2}$ und $d_{2,1}$ fasst. Sobald sich $d_{1,2}$ und $d_{2,1}$ rechtwinklig schneiden, sind ihre Mittelpunkte immer die Endpunkte eines Durchmessers eines bestimmten Kreises m_{12}.

Durch den Obigen vollständig analoge Betrachtungen ergiebt sich:

51) Durch die zwei Schnittpunkte, in denen sich irgend zwei der Kreise $d_{1,2}$ und $d_{2,1}$ schneiden, geht immer ein Kreis m_{12}. Die Potenzlinie dreier solchen Kreise teilt in ihrem Schnitte mit der Centrallinie k_1k_2 diese nach dem inneren Verhältniss, das gleich ist dem Verhältniss der Quadrate der Radien der beiden Kreise k_1 und k_2. Dieser Punkt ist Mittelpunkt eines Kreises, der zu allen Kreisen der drei Schaaren M_{12}, $D_{1,2}$ und $D_{2,1}$ Orthogonalkreis ist. Diesen Kreis bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}_{12}$.

52) Der Kreis $\mathfrak{A}_{12}$ wird von allen Kreisen der Schaaren O_{12}, D_{12} und M_{12} rechtwinklig und der Kreis $\mathfrak{J}_{12}$ wird von allen Kreisen der Schaaren $D_{1,2}$, $D_{2,1}$ und M_{12} über seinem Durchmesser geschnitten. Da $\mathfrak{J}_{12}$ zu o_{12} nicht Orthogonalkreis sein kann, so gehört also $\mathfrak{J}_{12}$ nicht zu den Kreisen der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar. Die beiden Kreise $\mathfrak{A}_{12}$ und $\mathfrak{J}_{12}$ schneiden sich auf dem Kreise m_{12}, welcher die Centrallinie k_1k_2 zum Durchmesser hat.

Der Radius des Kreises $\mathfrak{J}_{12}$ bestimmt sich somit aus Fig. 6. mit Hülfe des letzten Teils des obigen Lehrsatzes 52) wie folgt. Es ist, da $\mathfrak{A}_{12}$ den Kreis m_{12}, der c_{12} zum Durchmesser hat, rechtwinklig schneidet:

$$\mathfrak{R}_i^2 = \mathfrak{R}_a^2 - \mathfrak{J}_{12}\mathfrak{A}_{12}^2 = \mathfrak{R}_a^2 - (k_1\mathfrak{A}_{12} - k_1\mathfrak{J}_{12})^2$$

folglich schliesslich, da

$$k_1\mathfrak{J}_{12} = \frac{r_1^2 c_{12}}{r_1^2 + r_2^2}.$$

und die übrigen Werte oben bestimmt sind, so folgt

26) $$\mathfrak{R}_i = \frac{r_1 r_2 c_{12}}{r_1^2 + r_2^2}$$

Nehmen wir zu den zwei Kreisen k_1 und k_2 noch den Kreis k_3 hinzu, so erhalten wir zu je zwei von diesen drei Kreisen fünf Kreisschaaren, sie sind Fig. 7.

$$M_{12},\quad M_{23},\quad M_{31};$$
$$O_{12},\quad O_{23},\quad O_{31};\quad D_{12},\quad D_{23},\quad D_{31};$$
$$D_{1,2},\quad D_{2,3},\quad D_{3,1};\quad D_{2,1},\quad D_{3,2},\quad D_{1,3}.$$

Es schneiden sich nun die Axen O in dem Hauptpotenzpunkt Π_{123} der drei Kreise. Die Axen D_{12} und D_{23} schneiden sich in dem

Punkte Δ_{123}. Dieser Punkt ist also Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Kreispaare k_1 und k_2 wie k_2 und k_3 über je den Durchmessern dieser drei Kreise schneidet, also auch insbesondre die Kreise k_3 und k_1 d. h. durch Δ_{123} geht auch D_{31}. Auf gleiche Weise findet man, dass sich je 9 mal drei der funfzehn Axen in je einem Punkte schneiden. Es schneiden sich so insbesondere:

M_{12},	M_{23},	M_{31}	in	dem	Punkte	V_{123}
D_{12},	D_{23},	D_{31}	„	„	„	Δ_{123}
O_{12},	O_{23},	O_{31}	„	„	„	Π_{123}
$D_{1,2}$,	$D_{3,2}$,	O_{31}	„	„	„	$\Delta_{31,2}$
$D_{2,3}$,	$D_{1,3}$,	O_{12}	„	„	„	$\Delta_{12,3}$
$D_{3,1}$,	$D_{2,1}$,	D_{23}	„	„	„	$\Delta_{23,1}$
$D_{3,2}$,	$D_{3,1}$,	D_{12}	„	„	„	$\Delta_{3,12}$
$D_{1,3}$,	$D_{1,2}$,	D_{23}	„	„	„	$\Delta_{1,23}$
$D_{2,1}$,	$D_{2,3}$,	D_{31}	„	„	„	$\Delta_{2,31}$

Da die Axen M zu je zwei der übrigen symmetrisch liegen, so folgt sogleich, dass von diesen 9 Punkten viermal je zwei mit V_{123} auf derselben Geraden und symmetrisch liegen. Es liegen mit V_{123} symmetrisch je die Punktepaare

$$\Delta_{123} \text{ und } \Pi_{123}; \quad \Delta_{12,3} \text{ und } \Delta_{3,12}$$
$$\Delta_{23,1} \text{ und } \Delta_{1,23}; \quad \Delta_{31,2} \text{ und } \Delta_{2,31}$$

Componirt man die diesen 9 Punkten zugehörigen Kreise, so folgt, dass der Kreis V_{123}, der durch die Mittelpunkte der drei Kreise k_1, k_2, k_3 geht, je durch die Schnittpunktenpaare der Kreise geht, die zu diesen vier Punktenpaaren gehören. Auf diese Weise entstehen vier Kreistripel, deren Potenzlinien je die Centrallinie der drei Kreise k_1, k_2, k_3 nach den Sätzen 49)—52) in den Verhältnissen teilten, welche beziehlich gleich sind den Verhältnissen der Quadrate der Radien der zugehörenden Kreise k_1, k_2 und k_3. Die Potenzlinie zu den Kreisen

1)	V_{123}, Δ_{123}, Π_{123}	geht	durch	$\mathfrak{A}_{12}$,	$\mathfrak{A}_{23}$,	$\mathfrak{A}_{31}$
2)	V_{123}, $\Delta_{1,23}$, $\Delta_{23,1}$	„	„	$\mathfrak{J}_{12}$,	$\mathfrak{A}_{23}$,	$\mathfrak{J}_{31}$
3)	V_{123}, $\Delta_{2,31}$, $\Delta_{31,2}$	„	„	$\mathfrak{J}_{12}$,	$\mathfrak{J}_{23}$,	$\mathfrak{A}_{31}$
4)	V_{123}, $\Delta_{3,12}$, $\Delta_{12,3}$	„	„	$\mathfrak{A}_{12}$,	$\mathfrak{J}_{23}$,	$\mathfrak{J}_{31}$

Aus all dem ergiebt sich:

53) **Zu drei Kreisen, in derselben Ebene liegend, giebt es einen Kreis, welcher durch ihre Mittelpunkte geht; einen Kreis, der sie rechtwinklig, und einen, der**

sie über ihren Durchmessern schneidet. Es giebt ferner drei Kreise der je zwei von jenen dreien rechtwinklig und den dritten je über seinen Durchmesser schneidet und endlich giebt es noch drei Kreise, welche je zwei von jenen drei über ihren Durchmessern und den dritten rechtwinklig schneiden. Von den acht letzton sind viermal je zwei so einander beigeordnet, dass sie sich in zwei Punkten des ersteren schneiden.

Beachten wir nun die Kreise Π_{123} und Δ_{123} mit dem Kreise V_{123}, so ergeben sich die folgenden Sätze, sobald wir uns diese drei Kreise fest, jedoch k_1, k_2, k_3 in der Ebene veränderlich denken.

54) Alle Kreise, welche einen Kreis rechtwinklig schneiden und ihre Mittelpunkte auf einem zweiten Kreise haben, werden von einem dritten Kreise, der zu der durch jene zwei Kreise bestimmten Kreisschaar gehört, je über ihren Durchmessern geschnitten.

55) Alle Kreise, welche von zwei Kreisen, vom einen rechtwinklig und vom anderen über ihren Durchmessern geschnitten werden, haben ihre Mittelpunkte auf einem Kreise, der zu der durch die zwei ersten bestimmten Kreisschaar gehört.

56) Alle Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf einem Kreise haben und von einem zweiten Kreise über ihren Durchmessern geschnitten werden, schneiden einen dritten Kreis rechtwinklig. Diese drei Kreise gehören derselben Kreisschaar an.

57) In allen drei vorhergehenden Sätzen liegt der Mittelpunkt des Kreises, auf dem die Mittelpunkte des veränderlichen Kreises liegen, in der Mitte der Mittelpunkte der zwei übrigen Kreise. Die gemeinsame Potenzlinie der drei Kreise teilt immer die Centrallinie zweier der veränderlichen Kreise nach dem Verhältniss, das gleich ist dem Verhältniss der Quadrate dieser zwei Kreise.

d) Fortsetzung der Theorie der Potenzpunkte und der Potenzkreise.

Es sei (Fig. 8.) Π der Orthogonalkreis zu den drei Kreisen k_1, k_2, k_3, und a_{12}, a_{23}, a_{31} die drei äusseren Potenzkreise, welche zur Aehnlichkeitsaxe g_{123} gehören; so schneiden sich diese drei Kreise nach Satz 24) in demselben Potenzpunktenpaar P. Aus dem Begriff

der Kreisschaaren folgt nun, dass Π der Orthogonalkreis zu allen drei Potenzkreisen, wie überhaupt zu allen Potenzkreisen ist. Hieraus folgt:

58) Zwei einander conjugirte Potenzpunkte dreier Kreise liegen mit dem Hauptpotenzpunkt derselben in einer Geraden und sind in Bezug auf den Orthogonalkreis der drei Kreise polar reciproke Punkte.

Lassen wir die Aehnlichkeitsaxe parallel mit sich selbst verschieben, so entsprechen ihr in jeder Lage zwei Potenzpunkte, welche immer in der durch den Hauptpotenzpunkt hindurch gehenden zur Axenrichtung normal stehenden Geraden liegen und wir haben:

59) Die Potenzpunkte allen Aehnlichkeitsaxen conjugirt, die mit einer gegebenen Richtung parallel sind, liegen auf der Geraden, welche durch den Hauptpotenzpunkt hindurch geht und zur Aehnlichkeitsaxenrichtung normal ist.

Haben wir irgend zwei Aehnlichkeitsaxen, welche sich Fig. 9. in dem Punkte N schneiden, so bilden also ihre conjugirten Potenzpunkte zwei Paar reciproker Punkte in Bezug auf den Orthogonalkreis Π und liegen somit nach Satz 43) auf einem Kreise, welcher Π zum Orthogonalkreis besitzt. Da die beiden Aehnlichkeitsaxen durch die Mitten der conjugirten Punktepaare gehen und zu ihren Verbindungsgeraden normal stehen, so folgt, dass ihr Schnittpunkt N der Mittelpunkt dieses Kreises, auf dem die vier Potenzpunkte liegen, ist. Auf diesem Kreise liegen somit die Potenzpunkte aller Aehnlichkeitsaxen conjugirt, die durch den Punkt N gehen. Wir heissen diesen Kreis den Potenzpunktenkreis des Poles N oder auch Kreis N und wir haben:

60) Die Gesammtheit der Potenzpunkte, welche den Aehnlichkeitsaxen conjugirt sind, die durch einen bestimmten Pol N gehen, bilden einen Kreis, welcher den Pol N zum Mittelpunkt und den Orthogonalkreis Π der drei Kreise k zum gleichartigen Orthogonalkreis hat.

Unter Beachtung des Satzes 45) folgt:

61) Alle Potenzpunktenkreise, welche durch einen bestimmten Punkt gehen, gehen noch durch einen zweiten, durch den dem ersten conjugirten polar reciproken, und bilden so eine Kreisschaar. Diese beiden Punkte sind Potenzpunkte, der Axe der Potenzpunktenkreisschaar als Aehnlichkeitsaxe beigeordnet.

Ferner ist ohne weiteres klar:

62) **Jeder Kreis, der den Orthogonalkreis Π dreier Kreise zum Orthogonalkreis hat, ist als Potenzpunktenkreis dieser drei Kreise anzusehen und jeder Punkt N ist als Mittelpunkt eines Potenzpunktenkreises zu betrachten.**

Durch Beachtung der Sätze 43) und 61) folgt:

63) **Durch zwei beliebig gewählte Punkte geht nur ein Potenzpunktenkreis. Dieser Kreis geht auch durch die den zwei Punkten polarreciprok entsprechenden Punkte.**

Zu diesem Satz hat man nun noch folgende Anwendung:

Es seien in der Ebene der drei Kreise k_1, k_2, k_3 noch drei andere beliebige Kreise (Fig. 10.) gegeben, diese seien K_1, K_2, K_3. Bezeichnen wir das Paar Schnittpunkte, je zwei der drei letzteren Kreise, beziehlich mit s_{12}, s_{23}, s_{31}, so geht durch s_{12} der Potenzpunktenkreis N_{12} in Bezug auf die drei Kreise k_1, k_2, k_3, durch das Punktepaar s_{23} der Kreis N_{23}. Die beiden Potenzpunktenkreise N_{12} und N_{23} schneiden sich in dem Potenzpunktenpaar P der Centrallinie N_{12}, N_{23} beigeordnet. Nach den Sätzen 61) und 62) ist jeder Kreis, der durch das Punktepaar P geht, ein Potenzpunktenkreis in Bezug auf die drei Kreise k_1, k_2, k_3. Wählen wir von diesen allen den, dessen Mittelpunkt N_{31} im Schnitte der Centrallinien K_1K_3 und $N_{12}N_{23}$ liegt, dann folgt:

64) **Liegen in der Ebene irgend 6 Kreise vor, welche man in zwei Gruppen zu je dreien absondert. Legt man durch jedes der Schnittpunktenpaare von je zwei der drei Kreise der einen Gruppe die Potenzpunktenkreise in Bezug auf die drei Kreise der anderen Gruppe, so schneiden sich diese Potenzpunktenkreise in denselben zwei Punkten, den Potenzpolen der ersten Kreisgruppe in Bezug auf die zweite. Die Mittelpunkte der drei Potenzpunktenkreise liegen auf derselben Geraden, der Potenzaxe der zweiten Kreisgruppe in Bezug auf die erste.**[1]

---

1) Diese Sätze über die Potenzkreise und Potenzpunktenkreise, so einfacher Natur sie auch sind, besonders Satz 64), bieten die völlig ausreichenden Mittel, das System von sechs Kreisen in der Ebene in erschöpfender Weise und in elementarster Darstellung zu untersuchen. Besonders Satz 64) scheint

Liegen auf der Aehnlichkeitsaxe g_{123} der drei Kreise k_1, k_2, k_3 die drei Mittelpunkte a_{12}, a_{23}, a_{31} der gleichnamigen Potenzkreise und componirt man zu diesen die beigeordneten Potenzkreise mit den gleichnamigen Mittelpunkten i_{12}, i_{23}, i_{31}, so liegen von diesen sechs Mittelpunkten a und i nach Satz 27) viermal je drei auf einer Geraden, so liegen insbesondere

$$a_{12},\ a_{23},\ a_{31} \text{ auf } g_{123}$$
$$a_{12},\ i_{23},\ i_{31} \text{ auf } g_{12,3}$$
$$i_{12},\ a_{23},\ i_{31} \text{ auf } g_{23,1}$$
$$i_{12},\ i_{23},\ a_{31} \text{ auf } g_{31,2}$$

Dreht sich g_{123} um den Pol N_{123}, so werden in jeder ihrer Lagen drei neue beigeordnete Aehnlichkeitsaxen entsprechen. Verbinden wir Fig. 11. den Punkt N_{123} mit k_3 durch die Gerade, welche $g_{12,3}$ und k_1k_2 beziehlich in den Punkten $N_{12,3}$ und S_3 schneidet. Die vier Punkte k_3, $N_{12,3}$, S_3, N_{123} stehen in derselben Beziehung zu einander wie die vier Punkte k_3, i_{23}, k_2, a_{23}, d. h. da:

$$k_2 a_{23} : k_3 a_{23} = k_2 i_{23} : k_3 i_{23} = v_{23}$$

so ist auch:

$$S_3 N_{123} : k_3 N_{123} = S_3 N_{12,3} : k_3 N_{12,3} = v_{23} \text{ [1])}$$

Ist also die zweite Relation erfüllt, so ist es auch die erste. Drehen

---

den Schlüssel zur Aufdeckung der Beziehungen zwischen sechs Kreisen in der Ebene zu enthalten und ist etwa mit dem Satz von Pascal zu vergleichen, mit dem er die hauptsächlichsten Eigenschaften gemein hat; und wo, wie sich für den Kreis ergeben wird, dieser nur ein höchst specieller Fall von jenem ist. Eine specielle und einfache Anwendung dieses Satzes 64) habe ich bei dem Beweis der Steiner'schen Construction des Malfatti'schen Problems für drei Kreise einer Ebene gegeben. (Neumann's Annalen, Bd. 6. Seite 597.) Man ersieht also hieraus, dass sich diese Construction des erweiterten Malfatti-schen Problems ohne weiteres aus dem Begriff der Potenz ergiebt und also nicht nur, wie Herr Schröter in Borchhardt's Journal Bd. 77. Seite 230. gezeigt hat, für das geradlinige Dreieck. Ausserdem ist ein Beweis der Construction für das geradlinige Dreieck nur ein Wahrscheinlichkeitsbeweis für die Construction des erweiterten Problems — für drei nicht durch einen Punkt gehende Kreise.

Aus dem Satz 64), übertragen auf acht Kugeln im Raume, werden wir zu einer Kugelgeometrie gelangen, welche die von S. Lie, die er in der genannten Abhandlung niedergelegt hat, nur als speciellen Fall in sich schliesst.

1) Es ist dies leicht elementar zu zeigen ohne von dem Begriff der harmonischen Punkte und Strahlen Gebrauch zu machen. Ich setze daher diese Beziehungen hier als bekannt voraus.

wir nun g_{123} um N_{123}, so bleiben die zwei Punkte k_3 und S_3 fest, also auch der dritte Punkt $N_{12,3}$. Es dreht sich somit die Aehnlichkeitsaxe $g_{12,3}$ um den Punkt $N_{12,3}$. Ebenso findet man, dass sich also auch die Aehnlichkeitsaxen $g_{23,1}$ und $g_{31,2}$ beziehlich um die Pole $N_{23,1}$ und $N_{31,2}$ drehen. Ebenso wie N_{123} und $N_{12,3}$ mit k_3 auf einer Geraden liegen, findet man, dass je folgende 6 Punktetripel auf einer Geraden liegen.

N_{123}, $N_{12,3}$, k_3	$N_{12,3}$, $N_{23,1}$, k_2
N_{123}, $N_{23,1}$, k_1	$N_{23,1}$, $N_{31,2}$, k_3
N_{123}, $N_{31,2}$, k_2	$N_{31,2}$, $N_{12,3}$, k_1

Die vier Punkte N_{123}, $N_{12,3}$, $N_{23,1}$, $N_{31,2}$ heissen wir **einander beigeordnete Pole** und wir haben:

65) **Dreht sich von vier Aehnlichkeitsaxen die eine um einen Pol, so drehen sich auch die drei übrigen um je einen Pol — um die dem ersteren beigeordneten Pole. Zu einem Potenzpunktenkreis gehören also noch drei beigeordnete Potenzpunktenkreise. Die Mittelpunkte von vier beigeordneten Potenzpunktenkreisen sind vier beigeordnete Pole. Von diesen liegen sechsmal je zwei mit je einem Mittelpunkte der drei Kreise (*k*) in derselben Geraden.**

2. Abschnitt.

Das Prinzip der reciproken Radien.

In diesem Teile der Mitteilung gehen wir zu einer elementaren Darstellung des Prinzips der reciproken Radien über, wie sich dasselbe ohne weiteres aus dem Begriff der Potenz darstellt.

a) Entwickelung des Prinzips der reciproken Radien.

Ziehen wir Fig. 12. z. B. durch den äusseren Hauptähnlichkeitspunkt A_{12} der Kreise k_1 und k_2 die Aehnlichkeitslinie t_x, welche die Kreise beziehlich in den Punkten

$$a_1', a_1''; \quad a_2', a_2''$$

schneidet und ziehen wir die Radien nach diesen Schnittpunkten, so folgt, da nach dem Begriff von A_{12} die Relation

$$k_1 A_{12} : k_2 A_{12} = r_1 : r_2$$

besteht und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$A_{12}k_1a_1' \text{ und } A_{12}k_2a_2'$$
$$A_{12}k_1a_1'' \text{ und } A_{12}k_2a_2''$$

$$\text{dass } k_1a_1' \text{ parallel mit } k_2a_2'$$
$$\text{und } k_1a_1'' \quad ,, \quad ,, \quad k_2a_2''$$

ist. Drehen wir t_x um A_{12} bis sie zur Tangente an den Kreis k_1 wird oder bis sich die beiden Punkte a_1' und a_1'' bis zum Zusammenfallen genähert haben. In diesem Fall müssen sich auch die beiden Punkte a_2' und a_2'' bis zum Zusammenfallen nähern, d. h. t_x wird auch Tangente an den Kreis k_2 und wir haben:

66) Durch den äusseren Hauptähnlichkeitspunkt gehen zwei beiden Kreisen gemeinsame Tangenten.

Ebenso findet man:

67) Durch den inneren Hauptähnlichkeitspunkt zweier Kreise gehen zwei den beiden Kreisen gemeinsame Tangenten.

Die Punktepaare a_1' und a_2' wie a_1'' und a_2'' heissen wir äussere directe Punktepaare. Die Punktepaare a_1' und a_2'' wie a_1'' und a_2' heissen wir äusssere inverse Punktepaare.

Auf ähnliche Weise erhält man innere directe und innere inverse Punktepaare.

Berührt die äussere gemeinsame Tangente Fig. 12. die Kreise k_1 und k_2 beziehlich in den Punkten b_1 und b_2, so ergiebt sich aus dem Begriff der Potenz:

$$\alpha) \quad \begin{cases} A_{12}a_1' \, . \, A_{12}a_1'' = A_{12}b_1^2 \\ A_{12}a_2' \, . \, A_{12}a_2'' = A_{12}b_2^2 \end{cases}$$

Durch Multiplication folgt:

$$\beta) \quad A_{12}a_1' . A_{12}a_2'' . A_{12}a_1'' . A_{12}a_2' = (A_{12}b_1 \, . \, A_{12}b_2)^2$$

Nun ist aber die Proportion

$$A_{12}a_1' : A_{12}a_2' = A_{12}a_1'' : A_{12}a_2''$$

und folglich auch die Productengleichheit

$$\gamma) \quad A_{12}a_1' . A_{12}a_2'' = A_{12}a_1'' . A_{12}a_2'$$

richtig. Aus Gleichung β) und γ) folgt:

27) $$A_{12}a_1' . A_{12}a_2'' = A_{12}a_1'' . A_{12}a_2' = A_{12}b_1 \, . \, A_{12}b_2$$

Den Wert dieses Productes bezeichnen wir mit A_{12}^2 und sehen, welche Lage die Transversale t_n auch haben mag, sein Wert ist constant. Wir bezeichnen A_{12}^2 daher mit dem Namen der äusseren den Kreisen k_1 und k_2 gemeinsamen Potenz. Auf gleiche Weise erhalten wir eine innere den beiden Kreisen k_1 und k_2 gemeinsame Potenz, die wir mit J_{12}^2 bezeichnen.

Lassen wir die Transversale t_n in die Centrallinie $k_1 k_2$ übergehen, so folgt, wenn $e_{12} = k_1 k_2$,

$$A_{12}^2 = (A_{12}k_1 - r_1)(A_{12}k_2 + r_2)$$

Nun ist aber

$$A_{12}k_1 = \frac{r_1 e_{12}}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad A_{12}k_2 = \frac{r_2 e_{12}}{r_1 - r_2}$$

folglich hat man

28) $$A_{12}^2 = \frac{r_1 r_2 [e_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2]}{(r_1 - r_2)^2}$$

Ebenso findet man

29) $$J_{12}^2 = -\frac{r_1 r_2 [e_{12}^2 - (r_1 + r_2)^2]}{(r_1 + r_2)^2}$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit denjenigen, welche die Werte der Radien des äusseren und inneren orthogonalen Potenzkreises geben, so findet man, dass

$$R_{a_{12}}^2 = A_{12}^2 \quad \text{und} \quad R_{i_{12}}^2 = i_{12}^2$$

Hieraus folgt:

68) Die äussere, beziehlich innere gemeinsame Potenz zweier Kreise ist gleich dem Quadrat des Radius des äusseren, beziehlich inneren orthogonalen Potenzkreises.

Schneiden wir die zwei Kreise k_1 und k_2 durch einen Kreis R, welcher durch zwei inverse Punkte (äussere) z. B. durch a_1'' und a_2' geht, und bezeichnen wir Fig. 12. die beiden übrigen Schnitte mit a_1' und a_2''. Verbinden wir a_1' mit A_{12} durch eine Gerade, so schneidet diese den Kreis R noch in dem zweiten Punkte a_1'' und den Kreis k_2 in dem Punkte a_2'; welcher inverser Punkt zu a_1' ist. Es ist also

$$A_{12}^2 = A_{12}a_1' . A_{12}a_2' = A_{12}a_1'' . A_{12}a_2'$$

Es ist aber auch in Bezug auf den Kreis R

$$A_{12}^2 = A_{12}a_1'' . A_{12}a_2' = A_{12}a_1' . A_{12}a_1''$$

Durch Vergleichung folgt

$$A_{12}\alpha_1'' = A_{12}\alpha_2'$$

Es fallen also die Punkte α_1'' und α_2' zusammen und liegen somit in dem Punkte α_2', d. h. auch α_1' und α_2'' sind ein Paar inverser Punkte. Hieraus folgt:

69) **Schneidet ein Kreis zwei Kreise in einem Paar äusserer, beziehlich innerer inverser Punkte, so schneidet jener Kreis diese zwei noch in einem zweiten Paar äusserer, beziehlich innerer inverser Punkte.** Einen solchen Kreis heissen wir einen äusseren, beziehlich inneren Kreis zu den zwei übrigen Kreisen.

Da die Potenz des (äusseren oder inneren) Hauptähnlichkeitspunktes in Bezug auf jeden (äusseren oder inneren) Kreis gleich ist dem Quadrat des Radius des (äusseren oder inneren) orthogonalen Potenzkreises, so folgt, dass:

70) **Jeder äussere oder innere Kreis zweier Kreise hat den äusseren oder inneren orthogonalen Potenzkreis dieser zwei Kreise zum Orthogonalkreise.**

Aus diesem Satze folgen ohne weiteres die nachfolgenden unter Beachtung der Sätze:

71) **Alle äusseren oder inneren Kreise, welche durch einen bestimmten Punkt gehen, gehen noch durch einen zweiten Punkt, durch den dem ersten in Bezug auf den äusseren oder inneren orthogonalen Potenzkreis entsprechenden polarreciproken Punkt.**

72) **Durch zwei beliebig gewählte Punkte geht immer ein äusserer und ein innerer Kreis.**

72a) **Jeder Punkt ist Mittelpunkt eines äusseren und eines inneren Kreises.**

Aus Satz 71) folgt:

73) **Sind irgend zwei Kreise in Bezug auf zwei andere Kreise äussere oder innere Kreise, so liegt der eine oder andere Aehnlichkeitspunkt der zwei letzteren Kreise auf der Potenzlinie der beiden ersteren.**

Haben wir Fig. 12. z. B. den äusseren Kreis $\mathfrak{K}$, welcher in dem einen inversen Punktepaar $a_1''a_2'$ schneidet, und dessen Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ sei. Ziehen wir die Radien R_1a_1'', k_2a_2', $\mathfrak{K}a_1''$ und $\mathfrak{K}a_2'$, und die Aehnlichkeitslinien $A_{12}a_1''a_2'$, so ist:

$$\angle \mathfrak{K} a_1'' a_2' = \angle \mathfrak{K} a_2' a_1''$$
$$\angle k_1 a_1'' a_2' = \angle k_2 a_2' a_1''$$

folglich auch:

$$\angle k_1 a_1'' \mathfrak{K} = \angle k_2 a_2' \mathfrak{K}$$

Das heisst, der Kreis $\mathfrak{K}$ schneidet die beiden Kreise k_1 und k_2 gleichwinklig und wir haben:

74) Alle äusseren und inneren Kreise zweier Kreise schneiden diese je gleichwinklig.

Umgekehrt folgt nun leicht:

75) Alle Kreise, welche zwei Kreise gleichwinklig schneiden, sind in Bezug auf diese äussere oder innere Kreise.

Bezeichnet man den Radius eines äusseren oder inneren Kreises $\mathfrak{K}$ der zwei Kreise k_1 und k_2 mit $\mathfrak{r}$, die äussere oder innere gemeinsame Potenz dieser Kreise allgemein mit S^2 und die Entfernung des Mittelpunktes $\mathfrak{K}$ von dem äusseren oder inneren Hauptähnlichkeitspunkte mit L, so folgt aus Satz 70) sogleich die Gleichung:

30) $$L^2 = P^2 \pm \mathfrak{r}^2$$

Es ist also L für alle Kreise $\mathfrak{K}$ mit demselben Radius constant und wir haben:

76) Alle äusseren oder inneren Kreise mit gleichen Radien haben ihre Mittelpunkte auf einem Kreise liegen, dessen Centrum mit dem äusseren oder inneren Hauptähnlichkeitspunkte der beiden Kreise zusammenfällt.

Setzt man $\mathfrak{r} = 0$, so folgt:

$$L = P = R_a \text{ oder } = R_i$$

und man erhält:

77) Alle Punkte des äusseren oder inneren orthogonalen Potenzkreises zweier Kreise sind als äussere oder innere Kreise mit dem Radius gleich Null anzusehen.

Aus Satz 74) ergiebt sich:

78) Wenn ein äusserer oder innerer Kreis zweier Kreise den einen dieser Kreise berührt, so berührt er auch den anderen und die beiden Berührungspunkte sind zwei äussere oder innere inverse Punkte.

Schneiden wir die zwei Kreise k_1 und k_2 durch einen beliebigen dritten Kreis $\mathfrak{r}$ in den vier Punkten a_1', a_1'', a_2', a_2'' und bestimmen wir zu diesen Punkten die inversen (in Fig. 13. die äusseren), so erhalten wir die vier Punkte

$$\mathfrak{a}_2'', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_1'', \mathfrak{a}_1'$$

Legen wir durch die drei Punkte $\mathfrak{a}_2''$, $\mathfrak{a}_2'$ und $\mathfrak{a}_1''$ den Kreis $\mathfrak{r}'$, so schneidet dieser den Kreis k_1 noch in einem zweiten Punkte, er sei α_1'. Es schneiden sich die Potenzlinien

1) $a_1' a_1''$ und $a_2' a_2''$ im Punkte p der Potenzlinie der Kreise k_1 und k_2. Da durch die vier inversen Punkte $a_1' a_1'' \mathfrak{a}_2'' \mathfrak{a}_2'$ ein Kreis geht, so gehen also auch

2) die Geraden $a_1' a_1''$ und $\mathfrak{a}_2'' \mathfrak{a}_2'$ d. h. insbesondere $\mathfrak{a}_2'' \mathfrak{a}_2'$ durch den Punkt p. Ebenso zeigt man, dass

3) die Gerade $\mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_1''$ durch p hindurch geht. Da sich nun auch die zwei Potenzlinien $\mathfrak{a}_2' \mathfrak{a}_2''$ und $\mathfrak{a}_1'' \alpha_1'$ auf der Potenzlinie der Kreise k_1 und k_2 schneiden, so folgt, dass, da $\mathfrak{a}_2' \mathfrak{a}_2''$ durch p geht, auch $\mathfrak{a}_1'' \alpha_1'$ durch p gehen muss. Es ist also

$$\mathfrak{a}_1'' \mathfrak{a}_1' \text{ identisch mit } \mathfrak{a}_1'' \alpha_1'$$

oder der Punkt α_1' fällt mit $\mathfrak{a}_1'$ zusammen.

Wir haben so, wenn wir noch beachten, dass der Punkt p Hauptpotenzpunkt in Bezug auf k_1, k_2, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ ist:

79) **Schneidet man irgend zwei Kreise durch einen Kreis und bestimmt zu den vier Schnittpunkten die äusseren oder inneren inversen Punkte, so liegen diese vier Punkte auf einem neuen Kreise. Diese zwei Kreise heissen wir äussere oder innere inverse Kreise. Sie schneiden sich in zwei Punkten des äusseren oder inneren orthogonalen Potenzkreises jener zwei Kreise.**

Da in Bezug auf die beiden inversen Kreise jene vier Paar inversen Punkte a und $\mathfrak{a}$ der Kreise k_1 und k_2 auch inverse Punkte in Bezug auf die inversen Kreise selbst sind, so folgt:

80) **Irgend zwei äussere oder innere inverse Kreise zweier Kreise besitzen mit diesen beiden Kreisen die gleiche gemeinsame äussere oder innere Potenz und denselben äussern oder innern Hauptähnlichkeitspunkt.**

Ziehen wir die Radien $k_1 a_1'$ und $\mathfrak{b} \mathfrak{a}_1'$ wie $k_2 \mathfrak{a}_2''$ und $\mathfrak{b}' \mathfrak{a}_2''$ so ist

$$\angle k_1 a_1' \mathfrak{a}_2'' = \angle k_2 \mathfrak{a}_2'' a_1'$$

$$\angle \mathfrak{b} a_1' \mathfrak{a}_2'' = \angle \mathfrak{b}' \mathfrak{a}_2'' a_1'$$

d. h. $$\angle k_1 a_1' b = \angle k \mathfrak{a}_2'' \mathfrak{b}'.$$

Oder auch:

81) Von zwei inversen Kreisen zweier Kreise schneidet der eine den einen von diesen, unter demselben Winkel wie der andere den zweiten von diesen[1]).

Nach einem frühern Satze besitzt jeder Kreis $\mathfrak{K}$, der durch irgend zwei (äussere oder innere) inverse Punkte geht, den zugehörigen orthogonalen Potenzkreis zum Orthogonalkreis. Es sind also zwei inverse Punkte in Bezug auf den zugehörenden orthogonalen Potenzkreis polar reciproke Punkte. Wir sehen so, dass allen Punkten des einen Kreises k_2 alle Punkte der Kreise k_1 als polar reciproke Punkte in Bezug auf jeden der beiden orthogonalen Potenzkreise entsprechen. Die Punkte des äussern oder innern Kreises $\mathfrak{K}$ entsprechen sich paarweise selbst und zwar liegen die Paar polar reciproke Punkte je auf einer Geraden mit dem zugehörenden Hauptähnlichkeitspunkt. Es sei zunächst $\mathfrak{K}$ ein äussrer Kreis, so ist die gemeinsame Potenz A_{12}^2 der Kreise k_1 und k_2 die Potenz des Hauptähnlichkeitspunktes A_{12} in Bezug auf $\mathfrak{K}$. Schneiden sich die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\varDelta_{12}$ rechtwinklig, so ist A_{12}^2 wesentlich positiv und die beiden je polar reciproke entsprechenden Punkte des Kreises $\mathfrak{K}$ liegen von A_{12} aus in gleicher Richtung. Ist jedoch A_{12}^2 wesentlich negativ, so liegen die je reciproke polar entsprechenden Punkte von A_{12} an in entgegengesetzter Richtung und der orthogonale Potenzkreis A_{12} wird von dem Kreise $\mathfrak{K}$ über seinem Durchmesser geschnitten. Gleich verhält sich die Sache für den inneren orthogonalen Potenzkreis oder die innere gemeinsame Potenz J_{12}^2.

Bezeichnen wir nun allgemein den einen der zwei orthogonalen Potenzkreise, sowie seinen Radius mit P und die Entfernungen zweier reciproker Punkte vom Mittelpunkt P der Kreise P mit x_1 und x_2, so ist also

31) $$P^2 = x_1 x_2.$$

Ist nun $x_1 > P$, so ist offenbar $x_2 < P$, d. h. von den zwei re-

1) Steiner hat diese Sätze 79)—81) auch in seinen genannten Arbeiten ausgesprochen. Es kann daher gar keinem Zweifel unterliegen, dass Steiner von seinen Consequenzen, oder was dasselbe ist, von dem Princip der reciproken Radien den vollsten Gebrauch gemacht hat.



ciprok polaren Punkten des Kreises P liegt der eine ausserhalb und der andere innerhalb. Bedenkt man nun, dass durch den einen Punkt immer sein polar reciproker gegenseitig nur auf eine Weise bestimmt ist, und dass zu jedem Punkt ein polar reciproker gehört, so kann man also alle Punkte im inneren des Kreises P eindeutig auf alle Punkte im äusseren des Kreises P beziehen. Hieraus folgt: Allen Punkten einer Figur entspricht die Gesammtheit der Punkte einer zweiten Figur. Zwei solche Figuren heissen wir polar reciproke Figuren in Bezug auf den Kreis P und zwar heissen wir die eine die Transformation der anderen des Originals. Die Art der Herleitung der einen Figur aus der andern heissen wir das Princip der reciproken Radien und die Ausführung selbst die Transformation. Den Kreis P heissen wir dann Transformationskreis und sein Centrum das Transformationscentrum und das Quadrat des Radius P oder die Potenz P die Transformationspotenz. Endlich heissen wir jeden Durchmesser des Kreises P, auf dem je zwei entsprechende Punkte liegen, Transformationsstrahl.

Nach dem Vorhergehenden haben wir also zwei, jedoch nur unwesentlich verschiedene Arten der Transformation nach dem Princip der reciproken Radien zu unterscheiden, je nach dem die Transformationspotenz positiv oder negativ ist. Für beide Arten gehen nun aber nach den vorhergehenden Sätzen die folgenden wichtigen Resultate hervor:

82) Allen Punkten eines Transformationsstrahles entsprechen einer gewissen Folge nach die Punkte dieser Strahlen selbst; oder jeder Transformationsstrahl transformirt sich in sich selbst.

83) Die transformirte Figur eines Kreises ist wieder ein Kreis. Diese beiden Kreise besitzen den Transformationskreis zum orthogonalen Potenzkreise.

84) Bei der ersten Art der Transformation transformiren sich Kreise in sich selbst, wenn sie den Transformationskreis rechtwinklig und bei der zweiten Art, wenn sie denselben über seinem Durchmesser schneiden. Oder allgemein: Ein Kreis transformirt sich in sich selbst, so bald er den Transformationskreis zum Orthogonalkreis besitzt.

Wir haben früher gesehen, dass zu einer Geraden und einem Kreise jeder der Endpunkte des Durchmessers der Kreise, der zur

den normal ist, als einer der zwei Hauptähnlichkeitspunkte kann angesehen werden. Hieraus folgt sogleich:

85) Die Transformation einer Geraden ist ein Kreis, der durch das Transformationscentrum hindurch geht und umgekehrt.

86) Jeder Kreis, der durch das Transformationscentrum geht, transformirt sich in eine Gerade.

Es entspricht also Figur 14 jedem Punkt p der Geraden g ein Punkt des Kreises G und zwar der Schnittpunkt p' des Strahles cp P mit G der nicht im Centrum P liegt, und so auch umgekehrt entspricht jedem Punkte p' des Kreises G, der nicht mit P zusammenfällt, ein Punkt p der Geraden g. Lassen wir den Punkt p auf g sich immer weiter und weiter entfernen, so erkennt man, dass sich p immer mehr und mehr dem Punkte P nähert und zwar kann die Bewegung von p sowol nach der einen wie nach der andern Richtung der Geraden g hingerichtet sein. Rückt endlich p in den unendlich fernen Teil der Geraden g, so wird der Strahl p P mit G parallel, berührt den Kreis G. p' fällt in den Berührungspunkt des Strahles p P mit dem Kreise G, d. h. mit dem Centrum P zusammen. Hieraus folgt: Allen Punkten des unendlich fernen Teiles der Geraden g entspricht das Transformationscentrum als polar reciproker Punkt. Da nun aber jedem Punkt im innern des Kreises P ein Punkt im äussern desselben entspricht und umgekehrt, so sagen wir, dem Centrum P entspreche auch nur ein Punkt im Unendlichen der Geraden g. Da aber dies von jeder Geraden gilt, so sagen wir, um die Uebereinstimmung nirgends aufzuheben; der unendlich ferne Teil der Ebene besteht aus einem Punkte, durch welchen alle Geraden der Ebene hindurchgehen. Oder auch: die Wirkung oder Beziehung des unendlich fernen Teils der Ebene in Bezug auf Gebilde im Endlichen derselben, ist dieselbe, wie die Wirkung oder Beziehung eines Punktes im Endlichen der Ebene auf diese endlichen Gebilde. Alle Gerade der Ebene sind daher als Kreise aufzufassen, welche durch den unendlich fernen Punkt P_∞ der Ebene hindurch gehen.

Denken wir uns die Transformation zu irgend zwei Geraden g_1 und g_2, so entsprechen denen die beiden Kreise G_1 und G_2 als Transformationen. Die Tangenten im Centrum P an G_1 und G_2 sind mit g_1 und g_2 parallel und folglich schneiden sich die Kreise G_1 und G_2 unter demselben Winkel, wie die Originalgeraden g_1 und g_2. Beachten wir dies und den Satz 81), so folgt:

87) Nach dem Princip der reciproken Radien würde ein System von Kreisen zu einem andern System von Kreisen transformirt, so dass sich die Transformationskreise unter demselben Winkel schneiden, wie die Originalkreise.

Insbesondere werden zwei Kreise, die sich berühren, wieder zu zwei Kreisen, die sich berühren, transformirt. Hieraus folgt:

88) Parallele Gerade sind als Kreise anzusehen, die sich in dem unendlich fernen Punkt der Ebene berühren [1]).

Haben wir die Kreise k_1 und k_2, so ist nach dem Begriff des Princips der reciproken Radien der eine Kreis der transformirte des andern in Bezug auf die beiden orthogonalen Potenzkreise. Schneiden sich nun k_1 und k_2 in zwei reellen Punkten s_1 und s_2, so gehen die beiden orthogonalen Potenzkreise auch durch diese Schnitte und sich selbst rechtwinklig. In diesem Fall ist sowohl die Ungleichung

$$r_1 + r_2 > (c_{12} = k_1 k_2)$$

wie die

$$(r_1 - r_2) < c_{12}$$

richtig und folglich sowol A_{12}^2 wie i_{12}^2 je positiv, d. h. die Transformation geschieht nach der ersten Art. Jeder der Schnittpunkte s_1 wie s_2 ist als ein Paar zusammenfallende inverse Punkte in Bezug auf jeden Hauptähnlichkeitspunkt zu betrachten und hieraus folgt:

89) Nach dem Princip der reciproken Radien erster Art entsprechen sich die Punkte des Transformationskreises selbst.

Schneiden sich k_1 und k_2 nicht in zwei (reellen) Punkten, so kann entweder k_2 ganz ausserhalb oder aber ganz innerhalb des Kreises k_1 liegen. Nehmen wir Figur 16) zunächst den ersten Fall. Es ist dann

$$c_{12} > (r_1 + r_2)$$

also umso mehr

$$c_{12} > (r_1 - r_2)$$

Also ist A_{12}^2 positiv und i_{12}^2 negativ.

---

1) Beachten wir diesen Satz, so können wir den Unendlich fernen Teil der Ebene als Kreis (oder Gerade) auffassen, welcher alle Geraden der Ebene berührt. Sein transformirter Kreis ist das Centrum oder sein Kreis mit dem Radius gleich Null. Wir behalten jedoch die ersten Sprachweisen bei.

Bezeichnen wir die Strecke $A_{12}i_{12}$ mit E_{12}, so folgt also immer:

32) $$E_{12}^2 = A_{12}^2 + J_{12}^2.$$

Da J_{12}^2 negativ ist, so folgt, dass der orthogonale Potenzkreis A_{12} den Kreis i_{12} über seinem Durchmesser schneidet.

Die äussern inversen Punktepaare liegen also auch auf jedem durch A_{12} gehenden Strahle in derselben Richtung. Da in diesem Fall der orthogonale Potenzkreis jeden Kreis der zu k_1 und k_2 ein äussrer Kreis ist und also k_1 und k_2 rechtwinklig schneidet, so folgt, wenn wir den äussern Kreis unter der Schaar der Kreise auswählen, welche k_1 und k_2 rechtwinklig schneiden, dass der orthogonale Potenzkreis A_{12} zu der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar gehört.

Nehmen wir zwei beliebige innere inverse Punktepaare, so kann man durch diese einen Kreis legen, welcher k_1 und folglich auch k_2 rechtwinklig schneidet, und der somit durch ein zweites Paar innere inverse Punkte geht. Wir haben so zunächst:

90) Jeder Kreis, der zwei Kreise k_1 und k_2 rechtwinklig schneidet, ist sowol als äussrer wie als innrer Kreis der beiden Kreise anzusehen.

Der Kreis J_{12} ist also Orthogonalkreis zu allen Kreisen der zu k_1 und k_2 conjugirten Kreisschaar; und zwar von der Art, dass er von allen Kreisen dieser Schaar je über seinem Durchmesser geschnitten wird. Es liegt also J_{12} selbst zwischen den beiden Grenzpunkten oder Grenzkreisen der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar.

Da der Kreis J_{12} den Kreis A_{12} in zwei reellen Punkten schneidet, zufolge der Relation 32), so kann er nicht zu den durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar gehören.

Nehmen wir den Kreis k_2 ganz innerhalb des Kreises k_1, so ist:

$$c_{12} < r_1 - r_2$$

und folglich um so mehr

$$c_{12} < r_1 + r_2,$$

d. h. es ist A_{12}^2 negativ und J_{12}^2 positiv. In diesem Fall zeigt sich ebenso wie vorhin, dass der Kreis J_{12} zu der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar gehört und den Kreis A_{12} über seinem Durchmesser schneidet. Der Kreis A_{12} selbst ist nicht Familienglied der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar.

Es sei nun die innre gemeinsame Potenz negativ, und es schneide

der Kreis J_{12} den Kreis k_1 in dem Punkte a_1, so schneidet er den Kreis k_2 in dem inversen Punkte a_2. Diese beiden Punkte sind Endpunkte eines Durchmessers des Kreises J_{12}. Hieraus folgt:

91) Nach der Transformation der zweiten Art sind die Endpunkte eines jeden Durchmessers des Transformationskreises als entsprechende polarreciproke Punkte anzusehen.

Aus all dem fliesst nun der folgende wichtige Satz:

92) Zu zwei Kreisen giebt es immer zwei Transformationskreise, so dass in Bezug auf jeden von diesen der eine von jenen der polarreciproke der andern ist. Diese beiden Transformationskreise sind die orthogonalen Potenzkreise jener zwei Kreise. Schneiden sich jene zwei Kreise in zwei reellen Punkten, so sind beide Transformationen nach der ersten Art, schneiden sie sich nicht, so ist immer die eine Transformation nach der ersten und die zweite nach der zweiten Art. Wenn sich jene beiden Kreise schneiden, so gehen auch die beiden Transformationskreise durch die beiden Schnittpunkte und schneiden sich selbst normal. Schneiden sich jedoch jene zwei Kreise nicht, so schneidet der Transformationskreis der ersten Art den der zweiten über seinem Durchmesser.

Bezeichnen wir Figur 12. die Transformationspotenz mit P^2, die Radien der Kreise k_1 und k_2 beziehlich mit r_1 und r_2, die Centrallinie $k_1 k_2$ mit c_{12}, ferner die Strecken Pk_1 und Pk_2 beziehlich mit y_1 und y_2, so lassen sich aus den Gleichungen

$$P^2 = \frac{r_1 r_2 [c_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2]}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$y_1 - y_2 = c_{12}; \qquad y_1 : y_2 = r_1 : r_2$$

die Werte r_2, y_2 etc. je bestimmen. Wir erhalten:

33) $$y_2 = y_1 \frac{P^2}{y_1^2 - r_1^2};$$

34) $$r_2 = r_1 \frac{P^2}{y_1^2 - y_1^2};$$

35) $$c_{12} = y_1 \frac{y_1^2 - r_1^2 - P^2}{y_1^2 - r_1^2}.$$

Hier ist stillschweigend Transformation nach der ersten Art angenommen. Hatte man also Transformation nach der zweiten Art, so hat man den Potenzwert $+P^2$ durch $-P^2$ zu ersetzen. Hierdurch werden aber die absoluten Werte von g_2 und r_2 nicht geändert, sondern blos ihre Richtungen.

b) Einige Folgerungen aus dem Princip der reciproken Radien.

Haben wir die zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem orthogonalen Potenzkreise P, so schneidet dieser jene beiden unter gleichen Winkeln. Nehmen wir irgend einen Punkt P der Ebene zum Transformationscentrum bei beliebiger Transformationspotenz und transformiren das System jener drei Kreise, so erhalten wir die Transformationen k_1', k_2' und P'. Es schneidet nun P' die beiden Kreise k_1' und k_2' unter denselben Winkeln, wie P die Kreise k_1 und k_2 schneidet. Es ist also P' selbst wieder der orthogonale Potenzkreis zu k_1' und k_2'. Wir haben:

93) Die nach dem Princip der reciproken Radien erhaltenen Transformationen der orthogonalen Potenzkreise sind selbst wieder die orthogonalen Potenzkreise der Transformationen dieser Kreise.

Nehmen wir das Transformationscentrum auf dem orthogonalen Potenzkreis P selbst an, so geht diese in eine Gerade über. Diese Gerade ist also die Potenzlinie und äussrer orthogonaler Potenzkreis der Transformationen der zwei Kreise k_1 und k_2, folglich sind diese zwei Kreise einander gleich und wir haben:

94) Der Ort aller Punkte, die als Projectionscentren bei beliebiger Potenz aufgefasst, irgend zwei Kreise zu gleichen Kreisen transformiren, ist das System der beiden orthogonalen Potenzkreise der zwei Kreise.

Haben wir irgend eine Kreisschaar mit den beiden Schnittpunkten s_1 und s_2 und wählen wir den einen von diesen Punkten zum Transformationscentrum, so werden alle Kreise in die durch die Transformation des andern Schnittspunktes hindurchgehenden Geraden transformirt.

Haben wir nun irgend zwei Kreise k_1 und k_2, welche sich nicht (reell) schneiden und denken uns die zu der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar conjugirte Kreisschaar, so besitzt diese zwei reelle Grundpunkte g_1 und g_2.

Nehmen wir den einen z. B. g_1 zum Transformationscentrum bei

beliebiger Potenz, so transformiren sich die Kreise der conjugirten Schaar zu den durch g_1' gehenden Geraden, wo g_2' der zu g_2 polarreciprok entsprechende Punkt ist. Die beiden übrigen Kreise transformiren sich zu Kreisen, welche jene Geraden beide schneiden. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die beiden Transformationen jenen Punkt g_2' zum Centrum haben. Es ist also:

95) In der Ebene zweier Kreise, die sich nicht schneiden, giebt es immer zwei Punkte, die als Transformationscentren aufgefasst, jene zwei Kreise zu concentrischen Kreisen transformiren. Diese beiden Punkte sind die Grenzpunkte der durch jene zwei Punkte bestimmten Kreisschaar.

Werden die zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien r_1 und r_2 von dem Punkte P aus, dessen Entfernungen von den Mittelpunkten beider Kreise beziehlich y_1 und y_2 seien beschrieben, so sind bei der Potenz P^2 nach der Gleichung 34) die Radien der Transformationen beziehlich gegeben durch

$$r_1' = r_1 \frac{P^2}{y_1^2 - r_1^2}; \qquad r_2' = r_2 \frac{P^2}{y_2^2 - r_2^2}.$$

Es soll nun

$$r_1' : r_2' = v_{12}.$$

Dann erhält man die Bedingungsgleichung

36) $$v_{12} r_2 y_1^2 - r_1 y_2^2 = r_1 r_2 (v_{12} r_1 - r_2).$$

Dividirt man mit $v_{12} r_2$ die Gleichung und setzt

$$\frac{r_1}{v_{12} r_2} = U_{12}, \qquad T_{12}^2 = r_1 \left(r_1 - \frac{r_2}{v_{12}} \right),$$

so hat man schliesslich

37) $$y_1^2 - U_{12} y_2^2 - T_{12}^2 = 0$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit Gleichung 9) und beachten die Folgen dieser, so ergiebt sich:

96) Die Punkte, die als Transformationscentren aufgefasst zwei Kreise so transformiren, dass sich die Radien der transformirten Kreise verhalten wie $v_1^2 : 1$, liegen auf zwei Kreisen. Die Centren dieser teilen die Centrallinien der Originalkreise in dem äussern und innern Verhältniss, je beziehlich gleich $\frac{r_1}{v_{12} r_2}$, wo r_1 und r_2

die **Radien der Originalkreise sind.** Die Radien dieser Centrenkreise sind beziehlich gegeben durch

$$38)\qquad C_a^2 = \quad r_1 r_2 \frac{v_{12} c_{12}^2 - (r_1 v_{12} - r_2)(r_1 - v_{12} r_2)}{(r_1 - v_{12} r_2)^2},$$

und

$$39)\qquad C_i^2 = -r_1 r_2 \frac{v_{12} c_{12}^2 - (r_1 v_{12} + r_2)(r_1 + v_{12} r_2)}{(r_1 + v_{12} r_2)^2}.$$

Setzt man $v_{12} = 1$, so erkennt man sogleich, dass

$$C_a^2 = A_{12}^2 \quad \text{und} \quad C_i = J_{12}^2$$

oder dass die beiden Centrenkreise in die orthogonalen Potenzkreise übergehen.

Ersetzt man in Gleichung 13) das Potenzverhältniss v_{12} durch $\frac{r_1}{v_{12} r_2}$, so gehen Gleichungen 38) und 39) aus der Gleichung 13) hervor. Hieraus folgt:

97) **Die Centrenkreise mit dem Verhältniss v_{12} sind identisch mit den Potenzkreisen mit dem Verhältniss $\frac{r_1}{v_{12} r_2}$.**

Haben wir die beliebige Kreisschaar $S(k)$ Figur 15. und den beliebig gewählten, nicht zur Schaar gehörenden Kreis M. Nehmen wir wie in Fig. 15a. die $S(k)$ mit zwei reellen Grundpunkten s_1 und s_2, so geht durch s_1 und s_2 nach Satz 47) immer ein Kreis, welcher U rechtwinklig schneidet. — Es sei k_2 dieser Kreis. Nehmen wir den Grundpunkt s_1 zum Transformationscentrum und transformiren das ganze System nach dem Princip der reciproken Radien, so geht die Kreisschaar in die Gesammtheit der Geraden über, welche durch den dem Punkte s_2 polarreciproken Punkt s_2' hindurch gehen. Der Kreis M geht in den Kreis M' über. Der rechtwinklig schneidende Kreis k_2 geht in die Gerade g_r über, welche s_2' mit dem Mittelpunkte M' verbindet. Von allen übrigen durch s_2' gehenden Geraden schneiden je die zwei, welche mit g_r denselben Winkel einschliessen, den Kreis M' unter demselben Winkel und je zwei Gerade, welche mit g_r verschiedene Winkel einschliessen, schneiden auch M' unter ungleichen Winkeln. Hieraus folgt unter Beachtung des Satzes:

98) **In einer Kreisschaar mit zwei reellen Grundpunkten giebt es einen Kreis, welcher einen beliebig gewählten nicht zur Schaar gehörenden Kreis rechtwinklig schneidet. Ausserdem giebt es je zwei Kreise der Schaar,**

welche diesen Kreis unter gleichen Winkeln schneiden. Diese zwei Kreise schneiden auch den rechtwinklig schneidenden Kreis je gleichwinklig und besitzen ihn deshalb je zum orthogonalen Potenzkreis. Der zweite orthogonale Potenzkreis zweier Kreise schneidet den beliebigen Kreis unter einem Winkel, unter welchem er von keinem weitern Kreise der Schaar geschnitten wird. Dieser Kreis ist auch der orthogonale Potenzkreis zu jedem Paar je gleichwinklig schneidender Kreise[1]).

Haben wir Fig. 15b. eine Kreisschaar mit keinen zwei reellen Grundpunkten und den beliebigen nicht zur Schaar gehörenden Kreis M. Es seien g_1 und s_2 die beiden Grenzpunkte oder Grenzkreise der Schaar, so sind dies je die Grundpunkte der der Schaar conjugirten Schaar. Wählen wir den einen dieser Punkte zum Transformationscentrum, so transformiren sich alle Kreise der ersten Schaar nach Satz 95) zu concentrischen Kreisen, und die Kreise der conjugirten Schaar zu den durch den gemeinsamen Mittelpunkt hindurch gehenden Geraden. Wir haben:

99) Alle Kreise mit demselben Mittelpunkt sind als eine Kreisschaar zu betrachten, deren ein Grenzkreis der Mittelpunkt, deren zweiter Grenzkreis der unendlich ferne Punkt der Ebene ist. Die conjugirte Schaar wird durch das System der durch den gemeinsamen Mittelpunkt hindurch gehenden Geraden gebildet.

Es liege nun der gemeinsame Mittelpunkt s_2 ausserhalb des Kreises M', so ist er Mittelpunkt eines Kreises k_r, der den Kreis M' rechtwinklig schneidet. Wäre aber s_2 innerhalb des Kreises M' gelegen, so wäre er Mittelpunkt eines Kreises der von M' über seinem Durchmesser geschnitten würde. Wir haben so:

100) In jeder Kreisschaar mit zwei Grenzkreisen giebt es immer einen Kreis, welcher in Bezug auf einen beliebigen nicht zur Schaar gehörenden Kreis Orthogonalkreis ist.

Es sei wie in Fig. 15b s_2 ausserhalb von M' gelegen, so schneide der Kreis k_1' der concentrischen Schaar den Kreis M' unter dem

1) Zum völlig klaren Verständniss dieses Satzes mag hier nachfolgendes zum Beweise beigemerkt werden: Schneiden sich zwei Kreise in s_1 und s_2 und man transformirt aus s, so gehen diese Kreise in zwei Gerade über und ihre orthogonalen Potenzkreise in die zwei zu einander normalstehenden winkelhalbirenden Geraden der zwei Geraden.

Winkel α. Transformiren wir diesen Kreis k_1 in Bezug auf k_2 als Transformationskreis, so geht k_1' in k_2' und M' in sich selbst über. Es wird also auch k_2' den Kreis M_2' unter dem Winkel α schneiden. Es schneide k_1' den Kreis M' in den Punkten a_1', a_1'' und k_2' beziehlich in a_2' und a_2'', dann liegen a_1' und a_2' wie a_1'' und a_2'' beziehlich s_2 in einer Geraden und es ist

$$\angle M' a_1' a_2' = \angle M' a_2' a_1' = \angle M' a_1'' a_2'' = \angle M' a_2'' a_1' = \alpha$$

Es liegen also je die vier Punkte s_2' M' a_2' a_1' wie s_2' M' a_1' a_2'' auf je einem Kreise. Diese beiden Kreise sind einander gleich und jeder durch den Winkel α und die zwei Punkte M' und s_2' bestimmt. Hieraus folgt, dass es also nur zwei Kreise k_1' und k_2' giebt, die unter demselben Winkel α den Kreis M' schneiden. Es folgt somit:

101) In einer Kreisschaar mit zwei Grenzkreisen giebt es immer zwei und nur zwei Kreise, welche einen beliebigen nicht zur Schaar gehörenden Kreis unter gleichen und gegebenen Winkeln schneiden. Diese beiden Kreise besitzen immer dieselben orthogonalen Potenzkreise, unter welchem Winkel sie auch schneiden mögen. Der eine von ihnen ist der Kreis der Schaar, der zu dem beliebigen Kreise Orthogonalkreis ist.

Da die Gerade $s_2' a_1' a_2'$ den Kreis M' unter denselben Winkel α schneidet wie k_1' und k_2', so folgt:

102) Hat man zwei conjugirte Kreisschaaren $S(k)$ und $S(K)$ und einen beliebigen Kreis M, so schneidet irgend ein Kreis der ersten Schaar $S(k)$ den Kreis M in zwei Punkten unter einem Winkel α. Durch jeden dieser Punkte geht ein Kreis der zweiten Schaar $S(K)$ und jeder von ihnen schneidet M noch je in einem zweiten Punkte. Diese beiden Punkte liegen wieder auf einem Kreise der ersten Schaar. Diese zwei Paar Kreise an den beiden Schaaren genommen, schneiden den Kreis M unter gleichen Winkeln, — unter dem Winkel α.

Mit Hülfe dieses Satzes können wir sogleich die folgende Aufgabe einfach lösen:

Aufgabe 1. Man soll unter den Kreisen einer Schaar diejenigen zwei Kreise bestimmen, welche einen gegebenen Kreis, der nicht zur Schaar gehört, unter dem Winkel α schneiden.

Aus dem vorhergehenden Satze erhellt, dass diese Aufgabe immer auf die zurückgeführt werden kann: durch zwei Punkte einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis unter dem gegebenen Winkel α schneide. Aus dem Princip der reciproken Radien erhellt nachfolgende Lösung:

Auflösung. Es seien s_1 und s_2 die zwei Punkte und M der gegebene Kreis. Wir beschreiben um s_2 als Mittelpunkt einen Kreis, welcher den Kreis M in dem Punktepaar $a_1 a_2$ schneidet und ziehen die Centrallinie $M s_2$ und die Radien $a_1 M$ und $s_2 a_1$. Wir bestimmen den Punkt M' so, dass $M' a_1$ und $M a_1$ mit $a_1 s_2$ denselben Winkel einschliessen und beschreiben mit $M' a'$ aus M' den Kreis M'. Mit andern Worten, wir bestimmen zu M den transformirten Kreis M' in Bezug auf den Kreis S_2. Ebenso zu s_1 den transformirten Punkt s_1'. Wir legen durch s_1' die zwei Geraden, welche M' unter dem Winkel α schneiden. Die transformirten Kreise zu diesen zwei Geraden sind die verlangten Kreise.

Aus der Transformation nach dem Princip der reciproken Radien folgt noch die folgende Consumtion:

Man consomirt durch s_1 und s_2 den Kreis π, welcher M rechtwinklig schneidet. Die beiden Schnitte seien P_1 und P_2. Wir beschreiben um P_1 als Mittelpunkt den Kreis der durch P_2 geht, so schneidet dieser M in P_2' und π in π_2'. Die Geraden $P_2 P_2'$ und $P_2 \pi_2'$ stehen zu einander normal. Die Geraden $P_1 s_1$ und $P_2 s_2$ schneiden $P_2 \pi_2'$ in zwei Punkte s_1' und s_2'. Durch die Mitte M zwischen s_1' und s_2' legen wir die Gerade, welche mit $P_2 \pi_2'$ den Winkel $90-\alpha$ einschliesst und die $P_2 P_2'$ im Punkte q schneidet. Beschreiben wir die zwei Kreise, welche durch s_1' und s_2' gehen und mq zum Radius haben, so schneiden diese $P_2 P_2'$ beziehlich in dem Punktepaar A' und B'. Ziehen wir das Geradenpaar $P_1 A'$ und $P_1 B'$, so schneiden diese den Kreis M in den Punktepaaren A und B. Es liegen nun je die vier Punkte A_1 s_1 und s_2 wie B_1 s_1 und s_2 auf den verlangten Kreisen [1]).

Schneiden sich die Kreise k_1 und k_2 in den zwei Punkten P_1 und P_2 und man legt um P_1 als Mittelpunkt den Kreis der durch P_2 geht und die beiden Kreise beziehlich noch in den Punkten a_1 und a_2 schneidet, so folgt sogleich, wenn man P_1 als Transformationskreis betrachtet, dass die Geraden $a_1 P_2$ und $a_2 P_2$ denselben Winkel einschliessen wie die Radien $k_1 P_2$ und $k_2 P_2$. Wir haben:

1) Aus spätern Betrachtungen werden sich noch rationale Constructionen ergeben.



103) Schneiden sich zwei Kreise k_1 und k_2 in den zwei Punkten P_1 und P_2 und man beschreibt um den einen von diesen als Mittelpunkt den Kreis der durch den zweiten geht, so bestimmt dieser je mit jedem von jenen eine Potenzlinie. Diese beiden Potenzlinien schliessen den Winkel ein, unter dem sich die zwei ersten Kreise schneiden.

Beachten wir die Sätze 44) und 102) und 103), so folgt sogleich:

104) Nehmen wir aus jeder von zwei einander conjugirten Kreisschaaren je einen Kreis O und O′ beliebig heraus, bestimmen in jeder Schaar ausserdem noch zwei Kreise, welche jeden vorhergewählten derselben Schaar je gleichwinklig schneiden, so schneiden die zwei Kreise der einen Schaar die zwei Kreise der zweiten Schaar in acht Punkten. Von diesen acht Punkten liegen viermal je vier auf einem Kreise. Von diesen vier Kreisen werden je zwei und zwei von allen vier Kreisen der obigen zwei Paare je unter demselben Winkel geschnitten. Alle vier Kreise besitzen den Kreis O, der der Schaar mit zwei Grenzkreisen angehört, zum Orthogonalkreis. Der Kreis O′, der zur Schaar mit zwei Grundpunkten gehört, ist zu zwei der vier Kreise Orthogonalkreis und zu den beiden andern orthogonaler Potenzkreis. Diese beiden letztern besitzen jedoch den Kreis der zweiten Schaar, der O′ rechtwinklig schneidet, zum Orthogonalkreis und O′ selbst zum orthogonalen Potenzkreis.

Schneidet der Kreis m_1 die beiden Kreise k_1 und k_2 unter den Winkeln α_1 und α_2, ebenso der Kreis m_2, so schneidet umgekehrt k_1' die beiden Kreise m_1 und m_2 gleichwinklig und ebenso k_2. Es seien nun k_1 und k_2 zugleich äussere oder innere Kreise der Kreise m_1 und m_2, so sagen wir umgekehrt, m_1 und m_2 schneiden die Kreise k_1 und k_2 beide gleich oder ungleichartig, oder auch beide mehr aus- oder einschliessend, oder aber den einen mehr aus- und den andern mehr einschliessend. Nach den Sätzen 70) und 71) schneidet jeder Kreis der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar die Kreise m_1 und m_2 je gleichwinklig, d. h. sie sind zugleich äussere oder innere Kreise zu m_1 und m_2. Ein beliebiger Kreis k_3 der Schaar schneidet also sowohl m_1 wie m_2 je unter demselben Winkel — er sei α_3, und wir haben:

105) Alle Kreise, welche zwei Kreise k_1 und k_2 beziehlich unter den Winkeln α_1 und α_2 schneiden, werden von jedem Kreise der durch k_1 und k_2 bestimmten Kreisschaar z. B. von k_3 unter dem gleichen Winkel — er sei α_3 — geschnitten.

Haben wir irgend ein System von n Kreisen, welche einen Kreis $\varkappa$ zum gleichartigen Orthogonalkreis besitzen, so schneidet man alle diese n Kreise durch einen beliebigen Kreis k beziehlich unter den Winkeln $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$. Transformirt man das ganze System in Bezug auf den Orthogonalkreis als Transformationskreis, so gehen die ersten n Kreise in sich selbst über und der Kreis k transformirt sich in den Kreis k'. Dieser schneidet die n ersteren Kreise beziehlich wieder unter den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Wir haben so:

106) Werden n Kreise, die alle denselben Kreis zum Orthogonalkreis besitzen, von irgend einem Kreise beziehlich unter den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ geschnitten, so werden sie alle noch von einem zweiten Kreise beziehlich unter denselben Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ geschnitten. Diese beiden Kreise sind in Bezug auf den Orthogonalkreis jener n Kreise polarreciproke Kreise.

Haben wir irgend drei Kreise k_1, k_2, k_3 und sei $\mathfrak{K}_{123}$ ein äusserer Kreis in Bezug auf je zwei der drei Kreise, so muss er nach Satz 70) jeden der drei äusseren orthogonalen Potenzkreise A_{12}, A_{23}, A_{31} je zum Orthogonalkreis besitzen. Da sich die drei Kreise A in denselben zwei Punkten schneiden, so folgt, dass $\mathfrak{K}$ ein Kreis der, zu der durch die drei Kreise A bestimmten Schaar conjugirten Kreisschaar ist. Ist $\mathfrak{K}_{12,3}$ in Bezug auf k_1 und k_2 ein äusserer, in Bezug auf k_2 und k_3 wie k_3 und k_1 ein innerer Kreis, so ist $\mathfrak{K}_{12,3}$ ein Kreis der Schaar, welche zu der durch die orthogonalen Potenzkreise A_{12}, J_{23}, J_{31} bestimmten Schaar conjugirt ist. Ebenso findet man die Schaaren $\mathfrak{K}_{23,1}$ und $\mathfrak{K}_{31,2}$. Die Axen dieser Schaaren oder die Potenzlinien der Kreistripel A_{12}, A_{23}, A_{31}; A_{12}, J_{23}, J_{31}; etc. gehen durch den Hauptpotenzpunkt $\varkappa$ der drei Kreise k. Hieraus fliesst nun der folgende Satz:

107) Alle Kreise, welche in Bezug auf zwei von drei Kreisen äussere oder innere Kreise sind, oder mit andern Worten, alle Kreise, welche drei Kreise gleichwinklig schneiden, bilden vier Kreisschaaren, deren Potenzlinien beziehlich die Hauptähnlichkeitsaxen der drei Kreise sind und deren Axen alle durch den Hauptpotenzpunkt der drei Kreise hindurchgehen.

In jeder Schaar giebt es aber zwei Kreise von gegebenem Radius. Beachtet man ausserdem noch den Satz 76), so folgt:

108) **Es giebt acht Kreise, welche einen gegebenen Radius (oder welche je gleiche Radien besitzen) und drei Kreise beziehlich je gleichwinklig schneiden.**

Beachten wir weiter den Satz 76), so ergiebt sich über die Lage der Mittelpunkte der acht Kreisemittelpunkte folgende Bedingungen:

109) **Die Mittelpunkte der acht Kreise, welche je drei gegebene Kreise je gleichwinklig schneiden und deren Radien alle beziehlich einander gleich sind, liegen sechs mal zu je vieren auf einem Kreise. Die Mittelpunkte dieser sechs Kreise sind beziehlich die Hauptähnlichkeitspunkte der drei Kreise. Durch je zwei Mittelpunkte gehen drei dieser sechs Kreise. Die sechs Mittelpunkte liegen also je paarweise symmetrisch zu den vier Hauptähnlichkeitsaxen. Ferner liegen je zwei solche Mittelpunkte mit dem Hauptpotenzpunkte in derselben Geraden.**

Es sei der Radius der gleichwinklig schneidenden Kreise gleich dem Radius des Orthogonalkreises der drei Kreise, so fallen von den acht Kreisen vier mit dem Orthogonalkreis zusammen und man hat:

110) **Ausser dem Orthogonalkreis giebt es noch vier Kreise, deren Radius je gleich dem Radius des Orthogonalkreises ist und die die drei Kreise gleichwinklig schneiden. Die Mittelpunkte dieser vier Kreise sind die Symmetriepunkte des Hauptpotenzpunktes in Bezug auf die vier Hauptähnlichkeitsaxen.**

Da nach Satz 77) alle Punkte der orthogonalen Potenzkreise äussere, beziehlich innere Kreise sind, welche den Radius gleich Null besitzen, so folgt:

111) **Es giebt in der Ebene dreier Kreise acht Kreise mit dem Radius gleich Null, die drei Kreise gleichwinklig schneiden. Diese acht Kreise sind identisch mit den acht orthogonalen Potenzpunkten der drei Kreise.**

Da in jeder Kreisschaar es zwei Kreise giebt, welche einen beliebigen nicht zur Schaar gehörenden Kreis unter dem Winkel α schneiden, so folgt aus Satz 106) und 107):

112) **Drei Kreise werden von acht Kreisen je unter einem beliebig gegebenen Winkel geschnitten. Von die-**

4*

sen acht Kreisen sind viermal je zwei in der Art einander beigeordnet, dass sie in Bezug auf den Orthogonalkreis jener drei Kreise polarreciproke Kreise sind. Solche zwei Kreise schneiden sich immer auf der zugehörenden Hauptähnlichkeitsaxe.

Da jeder Potenzkreis zweier Kreise k_1 und k_2 mit dem Potenzverhältniss v_{12} ein Centrenkreis ist mit dem Verhältniss $v_{12} = \frac{r_1}{v_{12} r_2}$, so ergiebt sich, wenn die drei Kreise k_1, k_2, k_3 von dem Punkte P aus transformirt in den Transformationen die Radien r_1', r_2', r_3' besitzen:

$$v_{12} = \frac{r_1'}{r_2'}; \qquad v_{23} = \frac{r_2'}{r_3'}; \qquad v_{31} = \frac{r_3'}{r_1'}$$

Also

$$v_{12} \cdot v_{23} \cdot v_{31} = +1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{1}{v_{12}} \cdot \frac{1}{v_{23}} \cdot \frac{1}{v_{31}}$$

Also auch

$$v_{12} \cdot v_{23} \cdot v_{31} = +1$$

d. h. die drei dem Punkte P zugehörenden Centrenkreise gehen noch durch einen zweiten Punkt P. Dies folgt auch daraus: Wenn drei Potenzkreise zweier Kreise durch einen Punkt gehen, so gehen sie noch durch einen zweiten. Hieraus folgt:

113) Zu irgend drei Kreisen giebt es acht Punkte, von denen aus die drei Kreise nach dem Prinzip der reciproken Radien transformirt die Radien der Transformationen im gegebenen Verhältniss stehen. Diese acht Centren sind viermal zu je zwei einander conjugirte Potenzpunkte jener drei Kreise.

Speciell folgt aus diesem Satz, wenn die Radien der Transformationen einander gleich werden sollen:

114) Die acht orthogonalen Potenzpunkte dreier Kreise sind Centren, von denen aus die drei Kreise zu gleichen Kreisen transformirt werden.

Gehen die drei Kreise k_1, k_2, k_3 durch denselben Punkt P, so ist dieser Punkt der Hauptpotenzpunkt der drei Kreise. Da seine Potenz in Bezug auf alle drei gleich Null, so ist also auch der Orthogonalkreis gleich Null. Von zwei Kreisen, von denen der eine der polarreciproke des anderen ist in Bezug auf diesen Orthogonalkreis, muss der eine selbst den Radius gleich Null haben, was aus Gleichung 34) auch ohne weiteres hervorgeht. Hieraus folgt:

114) **Alle Potenzkreise dreier Kreise, die durch denselben Punkt hindurchgehen, gehen auch durch diesen Punkt. Die Kreise, welche diese drei Kreise gleichwinklig schneiden, bilden vier Kreisschaaren, deren Axen auch durch diesen Punkt gehen. In jeder Schaar giebt es einen Kreis, der die drei Kreise unter einem beliebig gegebenen Winkel schneiden. Der zweite Kreis, der alle jene drei unter demselben Winkel schneidet, fällt mit dem gemeinsamen Punkt zusammen und sein Radius ist gleich Null. Alle diese vier Kreisschaaren sind daher Kreisschaaren mit zwei Grenzkreisen und der zweite Grenzpunkt ist je der zweite orthogonale Potenzpunkt.**

Transformirt man das System dreier durch denselben Punkt hindurchgehenden Kreise nach dem Prinzip der reciproken Radien, aus diesem Punkte als Transformationscentrum, so folgt:

115) **Drei Gerade, oder die Seiten eines Dreiecks werden von den Kreisen von vier concentrischen Kreisschaaren gleichwinklig geschnitten. Die Centren dieser Schaaren sind die Schnitte der Winkelhalbirenden des Dreiecks. Die Winkelhalbirenden sind also als die orthogonalen Potenzkreise der drei Seiten des Dreiecks anzusehen und schneiden sich somit viermal zu je dreien in einem Punkte; den vier orthogonalen Potenzpunkten des Dreiecks.**

Haben wir die vier Kreise k_1, k_2, k_3, k_4, so gehören zu je drei der Kreise k vier Kreisschaaren $S(\mathfrak{K})$, deren Kreise je die drei Kreise gleichwinklig schneiden. Wir bezeichnen diese Schaaren mit

$S(\mathfrak{K})_{123}$,	$S(\mathfrak{K})_{234}$,	$S(\mathfrak{K})_{341}$,	$S(\mathfrak{K})_{412}$
$S(\mathfrak{K})_{12,3}$,	$S(\mathfrak{K})_{23,1}$,	$S(\mathfrak{K})_{31,2}$	
$S(\mathfrak{K})_{23,4}$,	$S(\mathfrak{K})_{34,2}$,	$S(\mathfrak{K})_{42,3}$	
$S(\mathfrak{K})_{34,1}$,	$S(\mathfrak{K})_{41.3}$,	$S(\mathfrak{K})_{13,4}$	
$S(\mathfrak{K})_{41,2}$,	$S(\mathfrak{K})_{12,4}$,	$S(\mathfrak{K})_{24,1}$	

Die Axen $\mathfrak{K}_{123}$ und $\mathfrak{K}_{234}$ schneiden sich in einem Punkte M_{1234}. Dieser Punkt ist also Mittelpunkt eines äusseren Kreises zu k_2 und k_3 und folglich schneidet dieser Kreis alle vier Kreise k gleichwinklig. Es gehen also auch die Axen $\mathfrak{K}_{341}$ und $\mathfrak{K}_{412}$ hindurch. Die Axen $\mathfrak{K}_{123}$ und $\mathfrak{K}_{12,4}$ schneiden sich in dem Punkte $M_{123,4}$. Dieser Punkt ist also Mittelpunkt eines äussern Kreises je zu k_1 und k_2, k_2 und k_3, wie k_3 und k_1, und eines innern Kreises je zu k_1 und k_4, k_2 und k_4,

wie k_3 und k_4. Es ist dies also der Mittelpunkt eines Kreises, der alle vier Kreise k gleichwinklig und zwar k_4 in Bezug auf die drei anderen ungleichartig schneidet. Es gehen somit durch $M_{123,4}$ noch die Axen $\mathfrak{K}_{12,4}$, $k_{13,4}$, $k_{23,4}$. Auf diese Weise weitergehend, erhält man die acht Punkte

$$M_{1234},\quad M_{123,4},\quad M_{234,1},\quad M_{341,2},\quad M_{412,3}$$
$$M_{12,34},\quad M_{13,24},\quad M_{14,23}$$

Durch jeden dieser Punkte gehen vier Axen der 16 Kreisschaaren $S(\mathfrak{K})$ und zwar hat man hierfür nachfolgende Zusammenstellung:

Von den 16 Axen schneiden sich:

1)	$\mathfrak{K}_{123}$,	$\mathfrak{K}_{234}$,	$\mathfrak{K}_{341}$,	$\mathfrak{K}_{412}$	in	dem	Mittelpunkte	M_{1234}
2)	$\mathfrak{K}_{123}$,	$\mathfrak{K}_{12,4}$,	$\mathfrak{K}_{23,4}$,	$\mathfrak{K}_{31,4}$	„	„	„	$M_{123,4}$
3)	$\mathfrak{K}_{234}$,	$\mathfrak{K}_{23,1}$,	$\mathfrak{K}_{34,1}$,	$\mathfrak{K}_{42,1}$	„	„	„	$M_{234,1}$
4)	$\mathfrak{K}_{341}$,	$\mathfrak{K}_{34,2}$,	$\mathfrak{K}_{41,2}$,	$\mathfrak{K}_{13,2}$	„	„	„	$M_{341,2}$
5)	$\mathfrak{K}_{412,3}$,	$\mathfrak{K}_{41,3}$,	$\mathfrak{K}_{42,3}$,	$\mathfrak{K}_{12,3}$	„	„	„	$M_{124,3}$
6)	$\mathfrak{K}_{12,3}$,	$\mathfrak{K}_{12,4}$,	$\mathfrak{K}_{34,1}$,	$\mathfrak{K}_{34,2}$	„	„	„	$M_{12,34}$
7)	$\mathfrak{K}_{23,4}$,	$\mathfrak{K}_{23,1}$,	$\mathfrak{K}_{14,2}$,	$\mathfrak{K}_{14,3}$	„	„	„	$M_{14,23}$
8)	$\mathfrak{K}_{13,2}$,	$\mathfrak{K}_{13,4}$,	$\mathfrak{K}_{24,1}$,	$\mathfrak{K}_{24,3}$	„	„	„	$M_{23,24}$

Hieraus ergiebt sich:

116) **Irgend vier Kreise derselben Ebene werden von acht Kreisen je gleichwinklig geschnitten. Von den Mittelpunkten dieser acht Kreise liegen je viermal je zwei mit jedem der vier Hauptpotenzpunkte dreier der vier Kreise in einer Geraden. Von diesen 16 Geraden gehen durch jeden der acht Mittelpunkte je vier.**

Haben alle vier Kreise denselben Orthogonalkreis, so schneiden sich alle 16 Axen in diesem Punkte. Hieraus folgt sogleich:

117) **Schneidet einer der acht Kreise, welche vier Kreise gleichwinklig schneiden, unter rechtem Winkel oder aber wird er selbst von allen vier Kreisen über seinem Durchmesser geschnitten, so fallen mit diesem Kreise alle sieben übrigen zusammen.**

Oder auch:

118) **Besitzen vier Kreise denselben Orthogonalkreis, so werden sie ausser diesem von keinem zweiten Kreise mehr je gleichwinklig geschnitten.**

Es seien die Axen $\mathfrak{K}_{123}$ und $\mathfrak{K}_{234}$ parallel, dann liegt M_{1234} in dem unendlich fernen Punkt der Ebene. Alsdann sind aber auch $\mathfrak{K}_{124}$, $\mathfrak{K}_{234}$ mit jenen Axen parallel. Es müssten also auch die vier äusseren Hauptähnlichkeitsaxen g_{123}, g_{234}, g_{341}, g_{412} mit einander parallel sein. Da aber je zwei z. B. g_{123} und g_{234} durch den Hauptähnlichkeitspunkt A_{23} gehen, so fallen diese zwei und folglich alle vier Hauptähnlichkeitsaxen zusammen z. B. in g_{1234} und wir haben, da jede Hauptähnlichkeitslinie zweier Kreise diese gleichwinklig schneidet:

119) **Fallen von den Hauptähnlichkeitsaxen zu vier Kreisen gehörend je vier entsprechende zusammen, so ist sie als eine der acht Kreise aufzufassen, welche jene vier Kreise je gleichwinklig schneidet.**

Sollen ausser den Axen $\mathfrak{K}_{123}$, $\mathfrak{K}_{234}$, ... noch je die vier Axen $\mathfrak{K}_{123}$, $\mathfrak{K}_{12,4}$, $\mathfrak{K}_{13,4}$, $\mathfrak{K}_{23,4}$ mit einander parallel werden, so müssen die vier Hauptähnlichkeitsaxen

$$g_{123},\quad g_{12,4},\quad g_{13,4},\quad g_{23,4}$$

wieder zusammenfallen. Es müsste also diese Axe selbst mit g_{1234} identisch sein. Dies ist aber nicht möglich, weil sonst je J_{14} und A_{14}, J_{24} und A_{24}, J_{34} und A_{34} zusammenfallen müssten.

Sollen nun aber endlich drittens die Axen $\mathfrak{K}_{12,3}$, $\mathfrak{K}_{12,4}$, $\mathfrak{K}_{34,1}$, $\mathfrak{K}_{34,2}$ parallel sein, dann müssen die Axen

$$g_{12,3},\quad g_{12,4},\quad g_{34,1},\quad g_{34,2}$$

zusammenfallen. Diese Gerade sei $g_{12,34}$. Auf dieser liegen die äusseren Hauptähnlichkeitspunkte A_{12} und A_{34}. Also fällt auch $g_{12,34}$ mit g_{1234} zusammen. Dies ist aber wieder nicht möglich, wenn nicht A_{12} und A_{34} zusammenfallen. Es finde dies nun statt. Auf $g_{12,34}$ liegen also die sechs Hauptähnlichkeitspunkte:

Erstlich die in dem Punkte $A_{12,34}$ zusammen fallenden Punkte A_{12} und A_{34} und ferner J_{13}, J_{23}, J_{14}; J_{24}. Halten wir von den vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 die drei ersten fest, während wir k_4 beliebig so seine Lage ändern lassen, dass A_{14}, A_{24} und folglich auch A_{34} sich auf g_{1234} bewegen, so dass A_{32} fest, dass im allgemeinen keine zwei der übrigen Punkte A_{14}, A_{24}, A_{23}, A_{34} zusammen fallen, und es ergeben sich folgende zwei Sätze:

120) **Von den acht Kreisen, welche vier Kreise je gleichwinklig schneiden, können zwei in Gerade übergehen. Dann fallen aber von den 12 Hauptähnlichkeitspunkten der vier Kreise zwei gleichartige zusammen**

und von den 16 Hauptähnlichkeitsaxen der vier Kreise fallen zweimal je vier in je eine Gerade zusammen. Diese beiden Geraden gehen durch die zwei zusammen fallenden Hauptähnlichkeitspunkte.

121) **Hat man drei Kreise mit einer ihrer vier Hauptähnlichkeitsaxen. Verbindet man einen beliebigen Punkt der Ebene mit den Mittelpunkten der drei Kreise und zieht von den Schnitten dieser Geraden mit der Hauptähnlichkeitsaxe die Tangentenpaare beziehlich an die drei Kreise, so berühren die sechs Tangenten einen Kreis, welcher jenen Punkt zum Mittelpunkt besitzt.**

Fallen nicht nur die beiden Hauptähnlichkeitspunkte A_{12} und A_{34} in dem Punkte $A_{12,34}$, sondern auch die Punkte A_{13} und A_{24} in dem Punkte $A_{13,24}$ zusammen, so ergiebt sich folgendes: Weil A_{12} und A_{34} zusammen fallen, so müssen die Hauptähnlichkeitsaxen g_{123} und g_{124} folglich auch $g_{24,1}$ und $g_{34,1}$ sich vereinigen. Ebenso

$$g_{12,3} \text{ und } g_{12,4} \text{ wie folglich } g_{34,1} \text{ und } g_{34,2}$$

Weil A_{13} und A_{24} zusammen fallen, so vereinigen sich auch $g_{13,2}$ und $g_{13,4}$ wie somit auch $g_{24,1}$ und $g_{24,3}$. Bezeichnen wir diese drei je vierfach zu zählenden Hauptähnlichkeitsaxen mit $g_{12,34}$, $g_{13,24}$ und $g_{12,24}$. Auf der Geraden $g_{12,34}$ und $g_{13,24}$ liegen je die Punkte

$$J_{13}, \quad J_{14}, \quad J_{23}, \quad J_{24}$$
$$J_{12}, \quad J_{14}, \quad J_{23}, \quad J_{34}$$

Dies ist aber nur möglich, wenn

$$J_{14} \text{ und } J_{22}$$

in dem Schnittpunkte der $g_{12,34}$ und $g_{13,24}$ vereinigen. Beachten wir, dass, wenn z. B. A_{12} und J_{34} zusammen fallen würden, unmöglich noch ein andrer Hauptähnlichkeitspunktenpaar sich vereinigen kann, so folgt:

122) **Fallen von den 12 Hauptähnlichkeitspunkten von vier Kreisen zweimal je zwei zusammen, so tun es noch zwei der übrigen. Von diesen sind zwei Paare je äussere und ein Paar je innere. Die Seiten des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks sind als vierfach zu zählende Hauptähnlichkeitsaxen anzusehen. Ausserdem sind diese drei Seiten als drei der acht Kreise zu betrachten, welche jene vier Kreise je gleichwinklig schneiden.**

Beachten wir, dass die Geraden $g_{12,3}$, $g_{12,4}$, $g_{34,1}$ und $g_{34,2}$ sich nicht vereinigen können, so folgt, wenn man die Figur zu Satz 122) nach dem Princip der reciproken Radien transformirt:

123) Von den acht Kreisen, welche je vier Kreise gleichwinklig schneiden, können höchstens je drei durch denselben Punkt gehen.

Sollen vier Kreise von mehr als acht Kreisen je gleichwinklig geschnitten werden, so ist das nur möglich, wenn von den 16 Axen ($\mathfrak{R}$) je zwei und folglich je vier entsprechende zusammen fallen. Es ist alsdann jeder Punkt dieser Axe als Schnittpunkt der vier vereinigten Axen anzusehen. Hieraus folgt also, dass alle vier zugehörigen Kreisschaaren in ein und dieselbe übergehen. Hieraus ergiebt sich sogleich, dass alle vier Kreise denselben Orthogonalkreis besitzen und von keinem weitern Kreise als denen der Kreisschaar je gleichwinklig geschnitten werden. Da aber diese Schaar durch zwei ihrer Kreise bestimmt ist, so folgt:

124) Besitzen vier Kreise denselben Orthogonalkreis und werden sie ausserdem noch von einem Kreis gleichwinklig geschnitten, so werden sie von allen Kreisen der durch den Orthogonalkreis und diesen Kreis bestimmten Kreisschaar gleichwinklig geschnitten.

Besitzen die Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 denselben Orthogonalkreis π_{1234} und fallen von den 12 Hauptähnlichkeitspunkten zwei z. B. A_{12} und A_{34} zusammen. Legen wir den orthogonalen Potenzkreis A_{12}, so gehört er auch da er π_{1234} zum Orthogonalkreis hat, zur Schaar der durch k_3 und k_4 bestimmten Kreisschaar. Dieser Kreis ist also auch der orthogonale Potenzkreis zu k_3 und k_4. Legen wir nun denjenigen Kreis α der Schaar k_1, k_3, welcher den Kreis A_{1234} zum Orthogonalkreis hat, und transformirt man das ganze System in Bezug auf $A_{12,34}$ als Transformationskreis, so geht k_1 in k_2, und k_3 in k_4 und umgekehrt über. Der Kreis α transformirt sich in sich selbst und da er zu der Schaar $(k_1\, k_3)$ gehört, so gehört er also auch zur Schaar $(k_2\, k_4)$. Da aber k_1 und k_3, also auch k_2 und k_4 den Kreis A_{1234} nicht je gleichwinklig schneiden, so folgt, dass der Kreis α nicht orthogonaler Potenzkreis zu den Kreispaaren k_1, k_3 und k_2, k_4 ist. Also ist der Schnittpunkt der Centrallinien k_1, k_3 und k_2, k_4 nur dann zusammenfallender Hauptähnlichkeitspunkt der Kreispaare k_1, k_3 und k_2, k_4, wenn $A_{12,34}$ die zwei Kreise k_1 und k_3 gleichwinklig schneidet, und wir haben so:

125) Jrgend zwei gegebene Kreise werden nur dann von mehr als acht Kreisen je gleichwinklig geschnitten,

wenn sie alle denselben Orthogonalkreis besitzen und noch von einem zweiten Kreise gleichwinklig geschnitten werden.

Wir haben insbesondere:

126) Vier Kreise werden von allen Kreisen einer Kreisschaar gleichwinklig geschnitten, wenn sie alle denselben zum Orthogonalkreis besitzen und wenn die sechs äussern Aehnlichkeitspunkte auf derselben Geraden liegen. Diese Gerade ist dann Potenzlinie der Kreisschaar.

127) Vier Kreise werden von allen Kreisen zweier Kreisschaaren je gleichwinklig geschnitten, wenn sie denselben Orthogonalkreis besitzen und wenn irgend zwei der äussern Hauptähnlichkeitspunkte zusammenfallen. Die Potenzlinien gehen durch diesen doppelten Hauptähnlichkeitspunkt.

128) Vier Kreise werden von allen Kreisen dreier Kreisschaaren je gleichwinklig geschnitten, wenn sie denselben Orthogonalkreis besitzen und wenn zweimal je zwei der 12 Hauptähnlichkeitspunkte zusammenfallen. Die drei Potenzlinien sind die Geraden, welche je durch jene zwei und noch durch einen dritten, durch jenen bedingten doppelten Hauptähnlichkeitspunkt bestimmt sind.

129) Vier beliebig gewählte Kreise können durch nicht mehr als durch die Kreise dreier Kreisschaaren je gleichwinklig geschnitten werden.

Beachtet man den Satz 116), so folgt:

130) Vier Kreise können im allgemeinen durch einen Kreis unter dem bestimmt gegebenen Winkel α geschnitten werden. Jedoch in specieller Lage kann er zu vier Kreisen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, jedoch nie mehr als sechs Kreise geben, welche 4 Kreise unter dem gegebenen Winkel α schneiden.

Ebenso folgt aus demselben Satze:

131) Fünf Kreise derselben Ebene können im allgemeinen von keinem Kreise gleichwinklig, jedoch in speciellen Fällen von 1, 2, 3, 4, 5 oder höchstens von 6 Kreisen je gleichwinklig geschnitten werden:

Ferner ergiebt sich wie oben leicht der folgende Satz:

132) Fünf Kreise die denselben Orthogonalkreis besitzen, werden von den Kreisen einer Schaar gleichwinklig geschnitten, wenn 10 entsprechende Hauptähnlichkeitspunkte auf derselben Geraden, — der Potenzlinien der Schaar — liegen.

Aus obigen Betrachtungen ist leicht ersichtlich:

133) Irgend fünf Kreise können von nicht mehr als den Kreisen einer Schaar je gleichwinklig geschnitten werden.

Hieraus folgt:

134) Irgend fünf Kreise können höchstens von 2 Kreisen je unter dem gegebenen Winkel α geschnitten werden.

etc. . . .

Den Satz 132) können wir verallgemeinert so aussprechen:

135) Haben irgend n Kreise denselben Orthogonalkreis und schneiden sie alle einen Kreis einer Schaar unter dem Winkel α_1, einen zweiten Kreis unter dem Winkel α_2 und gehört auch jener Orthogonalkreis zu der Kreisschaar, so schneidet jeder Kreis dieser Schaar alle n Kreise je unter gleichen Winkeln. Insbesondere giebt es zwei Kreise, welche unter demselben Winkel schneiden. Diese beiden Kreise haben den Orthogonalkreis zum orthogonalen Potenzkreis. Eine der Hauptähnlichkeitspunkte von je zwei jener n Kreise liegt auf den Potenzlinien dieser Kreisschaar.

Hieraus folgt umgekehrt:

136) Alle Kreise, welche von zwei Kreisen unter dem Winkel α und beide gleich oder ungleichartig schneiden, haben den einen orthogonalen Potenzkreis dieser zwei Kreise zum Orthogonalkreis und der eine Hauptähnlichkeitspunkt von je zwei von ihnen liegt auf der Potenzlinie dieser beiden Kreise.

Alle Kreise, welche zwei Kreise je gleichwinklig oder ungleich oder gleichartig schneiden, heissen wir eine Kreisreihe.

Es seien die drei Kreise k_1, k_2, k_3 beziehlich von den acht Kreisen

$$M_{123} \text{ und } M'_{123}$$
$$M_{12,3} \quad M_{23,1} \quad M_{31,2}$$
$$M'_{12,3} \quad M'_{23,1} \quad M'_{31,2}$$

je unter dem Winkel α geschnitten, wo je die Kreise M und M' in Bezug auf den Orthogonalkreis π_{123} der drei Kreise k_1, k_2, k_3 sich polarreciprok entsprechen. Von diesen acht Kreisen giebt es je sechsmal vier Kreise, welche je eine der sechs orthogonalen Potenzkreise zum Orthogonalkreis haben. Es ist z. B. der Kreis A_{12} Orthogonalkreis zu

$$M_{123}, \quad M'_{123}, \quad M_{12,3}, \quad M'_{12,3}.$$

Nehmen wir in Bezug auf A_{12} als Transformationskreis nach dem Princip der reciproken Radien, so gehen die vier Kreise M in sich selbst über. Der Kreis k_1 transformirt sich in k_2 und umgekehrt und den Kreisen k_3 entspreche der Kreis $k_{3,12}$. Es schneidet alsdann auch $k_{3,12}$ die vier obigen Kreise M unter beziehlich dem Winkel α. Hieraus folgt der Satz:

137) Von den acht Kreisen, welche drei Kreise unter dem Winkel α schneiden, giebt es je sechsmal vier Kreise, welche je noch von einem vierten Kreise unter demselben Winkel α geschnitten werden. Diese sechs Kreise besitzen mit den drei Kreisen denselben Orthogonalkreis.

Bezeichnen wir diese 6 Kreise mit $k_{1,23}$, $k'_{1,23}$; $k_{2,31}$, $k'_{2,31}$; $k_{3,12}$, $k'_{3,12}$, so sind diese nach dem obigen unabhängig von dem Schnittwinkel α der acht Kreise M. Von diesen 6 Kreisen $k_{x,yz}$ werden je drei von zwei zugeordneten der acht Kreise M gleichwinklig und gleichartig geschnitten. Z. B. werden die Kreise $k_{1,13}$; $k_{2,31}$; $k_{3,12}$ von den zwei Kreisen M_{123}, M'_{123} gleichwinklig und gleichartig geschnitten. Ferner $k_{1,23}$, $k'_{2,31}$; $k'_{3,12}$ von $M_{23,1}$, $M'_{23,1}$ etc. Hieraus folgt:

138) Bestimmt man zu je zwei von drei beliebig gelegenen Kreisen die orthogonalen Potenzkreise, bestimmt alsdann in Bezug auf jeden von diesen den polarreciproken Kreis je des dritten Kreises, zu welchem dieser Kreis nicht als orthogonaler Potenzkreis gehört, so erhalten wir auf diese Weise sechs den drei ersten Kreisen beigeordnete Kreise. Jeder dieser Kreise hat

den Orthogonalkreis jener drei Kreise selbst zum Orthogonalkreis und wird mit den beigegebenen Kreisen von den sämmtlichen Kreisen zweier Kreisschaaren je gleichwinklig geschnitten.

139) **Alle Kreise von den vier Kreisschaaren, deren Kreise je drei Kreise gleichwinklig schneiden, schneiden je drei der sechs, die den drei Kreisen beigeordneten, je unter demselben Winkel, wie diese drei Kreise selbst.**

Oder auch:

140) **Drei Kreise mit ihren 6 beigeordneten bilden viermal je sechs Kreise von je einer Kreisreihe.**

Bezeichnen wir allgemein die acht Kreise, welche je vier gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, mit M_{xyzv}, so sind sie gegeben durch:

$$M_{1234}; \quad M_{123,4}; \quad M_{234,1}; \quad M_{341,2}; \quad M_{412,3}$$
$$M_{12,34}; \quad M_{13,24}; \quad M_{14,23}$$

Nehmen wir von diesen die vier Kreise

$$M_{1234}, \quad M_{123,4}, \quad M_{124,3}, \quad M_{12,34}$$

so sind die äussern Kreise in Bezug auf k_1 und k_2 und besitzen daher den orthogonalen Potenzkreis A_{12} selbst zum Orthogonalkreis. Nehmen wir A_{12} zum Transformationskreis und transformiren die 4 Kreise k und die vier Kreise M, so gehen letztere in sich selbst über. Ferner wird aus k_1 der Kreis k_2 und umgekehrt und zu k_3 und k_4 gehören $k_{3,12}$; $k_{4,12}$. Diese schneiden die vier Kreise M beziehlich unter demselben Winkel wie sie beziehlich die Kreise k_y schneiden, und wir haben:

141) **Die 24 zu je 6 und 6 je dreien von vier Kreisen beigeordneten Kreise schneiden zu je zwei und zwei 12mal je vier der acht Kreise, welche je vier Kreise je gleichwinklig schneiden, unter demselben Winkel wie diese vier die gegebenen vier Kreise schneiden.**

Schneiden sich die drei Kreise k_1, k_2, k_3 in den drei Punktepaaren

$$p'_{12}, \quad p''_{12}, \quad p'_{23}, \quad p''_{23}, \quad p'_{31}, \quad p''_{31}$$

so sind dies in Bezug auf den Orthogonalkreis π jener drei Kreise

drei Paar polarreciprok entsprechender Punkte. Je drei von diesen sechs Punkten, unter denen drei sich je keine zwei polarreciproken entsprechende befinden, bestimmen einen Kreis. Wir erhalten so die Kreise

$$m'_{123} \equiv (p'_{12}\, p'_{23}\, p'_{31}); \quad (p''_{12}\, p''_{23}\, p''_{31}) \equiv m''_{123}$$
$$m'_{31,2} \equiv (p'_{12}\, p'_{23}\, p''_{31}); \quad (p''_{12}\, p''_{23}\, p'_{31}) \equiv m''_{31,2}$$
$$m'_{23,1} \equiv (p'_{12}\, p''_{23}\, p'_{31}); \quad (p''_{12}\, p'_{23}\, p''_{31}) \equiv m''_{23,1}$$
$$m'_{12,3} \equiv (p''_{12}\, p'_{23}\, p'_{31}); \quad (p'_{12}\, p''_{23}\, p''_{31}) \equiv m''_{12,3}$$

Von diesen Kreisen entsprechen sich je dieselben zwei derselben Zeilen als polarreciproke in Bezug auf den Orthogonalkreis π als Transformationskreis. Jeder Kreis der nun z. B. m'_{123} und m''_{123} gleichwinklig schneidet, hat den Kreis π zum Orthogonalkreis. Nun giebt es aber je acht Kreise, welche von diesen acht Kreisen m je vier gleichwinklig schneiden. Es schneide K die Kreise m'_{123}, $m'_{31,2}$, $m'_{23,1}$ und m''_{123} unter demselben Winkel, so folgt sogleich, dass er auch die Kreise $m''_{31,2}$ und $m''_{23,1}$ noch unter dem gleichen Winkel schneiden muss.

Beachtet man ferner, dass alle Kreise, welche π zum Orthogonalkreis haben und irgend zwei gleichwinklig schneiden, auch noch die polarreciproken unter denselben Winkeln je gleichwinklig schneiden, so folgt:

142) Von den acht Kreisen m, welche durch je drei der sechs Schnittpunkte dreier Kreise bestimmt sind (wo unter den Schnittpunkttripeln keine zwei zusammengehörende der drei Schnittpunktpaare sind) werden viermal je sechs von einem und nur einem Kreise je unter demselben Winkel geschnitten. Von obigen acht Kreisen m werden jedoch sechsmal je vier je von den Kreisen wenigstens einer Kreisschaar je gleichwinklig geschnitten; also insbesondere von je zwei Kreisen berührt.

Subigen bei Solothurn, den 29 Mai 1874.

II.

Perspectivische Bilder des Kreises und directe Bestimmung ihrer Durchmesser.

Von

Herrn Dr. *Gustav Ad. V. Peschka*,
ord. öff. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

Die Perspective eines Kreises ist im Allgemeinen eine Linie zweiter Ordnung. Bekanntlich kann ein Kegel, dessen Leitlinie eine Curve zweiter Ordnung (hier ein Kreis) ist, wieder nur in einer Linie derselben Ordnung durch eine Ebene geschnitten werden. Hieraus folgt unmittelbar, dass ein Kegel von kreisförmiger Leitlinie, durch die Bildebene geschnitten, entweder einen Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel als Schnittfigur liefern werde.

Ein Kegel von kreisförmiger Leitlinie kann nur durch zwei verschiedene Lagen von Ebenen nach Kreisen geschnitten werden, wovon die eine Lage durch die Basisebene bestimmt ist; es wird somit die Perspective eines Kreises, ausser einer zweiten besonderen Lage der Kreisebene, nur dann ein Kreis sein können, wenn derselbe in einer zur Bildebene parallelen Ebene liegt.

Ist die Kreisebene gegen die Bildfläche geneigt und erreicht die Peripherie des Kreises eine durch das Auge parallel zur Bildfläche geführte Ebene (Verschwindungsebene) nicht, so wird sich als das perspectivische Bild des Kreises eine Ellipse ergeben; findet hingegen ein blosses Berühren des Kreises mit der eben erwähnten Verschwindungsebene statt, so wird die Perspective des Kreises eine Parabel sein, während endlich in jenem Falle, wo der Kreis die Verschwin-

dungsebene schneidet, das Kreisbild als Hyperbel erscheint. Würde die Ebene des Kreises durch das Auge gehen, so stellt sich dessen Perspective als gerade Linie dar.

a) Perspectivisches Bild des Kreises als Parabel.

In einer Ebene E (Fig. 1.), deren Bildflächtrace E_b und deren Flucht- oder Verschwindungslinie E_v sei, ist ein Kreis K derart gegeben, dass dessen Peripherie die durch das Projectionscentrum O (Auge) zur Bildebene B_E parallel geführte Ebene (Verschwindungsebene) berührt; es ist dessen Bild, welches als Parabel erscheint, zu construiren, so wie die **Hauptaxe** sowohl, als die **Scheiteltangente** des Bildes direct zu bestimmen.

Man denke sich vor Allem die Zeichnungsfläche vorbereitet, also das Auge O um die Verschwindungslinie E_v nach O_2 (Nebenauge) in die Bildebene (Zeichnungsfläche) B_E umgelegt, und den gegebenen Kreis K als auch die Spurlinie E_s (d. i. jene Gerade, in welcher die Ebene E die Verschwindungsebene P_E schneidet, und deren Abstand von der Bildflächtrace E_b gleich ist der Entfernung des Projectionscentrums von der Fluchtlinie E_v) um die Bildflächtrace E_b in die Bildebene in gleichem Sinne gedreht. Sei in dieser Lage c_0 der Kreismittelpunkt und b_0 der Berührungspunkt des Kreises mit der Spurlinie E_s, so wird selbstverständlich das perspectivische Bild des Berührungsradius $b_0 c_0 \delta$, nach dem derselbe den unendlich fernen Punkt b_0 mit dem Kreisbilde gemein hat, ein Durchmesser der Parabel sein. Nachdem $b_0 c_0 \delta$ auf der Bildflächtrace E_b senkrecht steht und δ der Durchstosspunkt mit der Bildebene ist, wird das perspectivische Bild desselben durch die Verbindungslinie des der Ebene E entsprechenden Nebenaugepunktes A_1 mit dem Punkte δ repräsentirt.

Um nun die Scheiteltangente und die Hauptaxe des Kreisbildes (Parabel) zu bestimmen, hat man blos zu erwägen, dass alle Durchmesser der Parabel untereinander parallel seien und dass die Scheiteltangente zu denselben senkrecht stehe. Bedenkt man ferner, dass Gerade, deren perspectivische Bilder untereinander parallel sind, sich sämmtlich in einem Punkte s der Verschwindungsebene P_E schneiden und dass, wenn diese Geraden in einer Ebene liegen, der erwähnte Schnittpunkt in der Spurlinie E_s der besagten Ebene P_E sich vorfinden müsse, so wird sich ohne jedwelche Schwierigkeit das angestrebte Resultat ergeben.

Führt man nämlich eine Senkrechte $\delta\sigma$ zu $A_1\delta$, so wird dieselbe als das Bild einer Geraden in der Ebene E und $O_2 s \parallel \delta\sigma$ gleichsam

als deren Parallelstrahl, so wie s in der Spurlinie E_s als deren Schnittpunkt mit der Verschwindungsebene P_E aufgefasst werden können.

Nun ist klar, dass alle Geraden in der Ebene E, welche sich in s schneiden, untereinander parallele und zu $A_1\delta$ senkrecht stehende Bilder besitzen. Zieht man demnach von s an den gegebenen Kreis K die Tangente T_0, so wird sich das Bild t derselben als Tangente an die Parabel, senkrecht zu $A_1\delta$, darstellen und die Scheiteltangente an besagtes Kreisbild liefern.

Bestimmt man nun den Berührungspunkt α der Tangente T im Bilde d. i. a, was entweder mittelst des Nebenauges O_2 und des Nebenaugenpunktes A_1 [$\alpha\beta$ senkrecht zu E_b; β mit A_1 und α mit O_2 verbunden gibt im Schnitte der letzteren den gesuchten Schnittpunkt a] oder direct dadurch geschehen kann, dass man den Durchschnittspunkt Δ von αs mit der Bildebene bestimmt und durch diesen Punkt, nachdem er auch dem Bilde von αs angehört, eine zu δA_1 Senkrechte $a\Delta$ führt, um durch letztere die Scheiteltangente t des gesuchten perspectivischen Bildes I II III a... und im Schnitte mit αO_2 den Scheitel a der Parabel zu erhalten.

Durch a eine Parallele aM zu $A_1\delta$ gezogen, liefert die gesuchte Hauptaxe der Parabel.

Sollten noch anderweitige Punkte des perspectivischen Bildes, die selbstverständlich paarweise in den Senkrechten zur Hauptaxe aM liegen müssen, gefunden werden, so wird man den Kreis K von s aus durch Strahlen $s1$, $s2$, $s3$, ... teilen und jeden einzelnen Strahl sammt seinem Kreisschnittpunkt bildlich bestimmen. Zu diesem Behufe wird man beispielsweise 1 und 1_1 mit s verbinden, durch den Schnittpunkt ϱ mit der Bildebene eine Parallele zu t führen und die Bilder I und I_1 mittelst der Strahlen $1O_2$ und 1_1O_2 bestimmen.

b) Perspectivisches Bild des Kreises als Hyperbel.

In einer Ebene E (Fig. 2.) ist ein Kreis K gegeben, welcher die Verschwindungsebene P_E, respective die Spurlinie E_s in zwei Punkten σ_1 und σ_2 schneidet; es ist dessen Bild, welches als Hyperbel erscheint, darzustellen und sind dessen Axen direct zu bestimmen.

Denkt man sich das Auge O um die Fluchtlinie E_v der Ebene E nach O_2 (Nebenauge) und die gegebene Ebene E sammt den in ihr liegenden Kreis K und der Spurlinie E_s, um die Bildflächtrace E_b der Ebene E nach derselben Richtung in die Bildebene gedreht und

in dieser Lage in den Schnittpunkten σ_1 und σ_2 des Kreises mit E_s die Tangenten τ_1 und τ_2 an den umgelegten Kreis K geführt, so wird man bloss die Bilder der letzteren zu bestimmen haben, um sogleich die Asymptoten des perspectivischen Kreisbildes (der Hyperbel) zu erhalten; denn es ist bekannt, dass allen Punkten der Geraden E_s, also auch den Punkten σ_1 und σ_2 Bilder in unendlicher Entfernung entsprechen, dass Tangenten im Originale auch als Tangenten im Bilde erscheinen, dass folglich auch die Tangenten τ_1 und τ_2 an den Kreis K als Tangenten an die Hyperbel H sich darstellen müssen, und dass endlich, weil ihre Berührungspunkte d. h. die Bilder der Punkte σ_1 und σ_2 im Unendlichen liegen, diese Tangenten in die Asymptoten t_1 und t_2 der Hyperbel übergehen.

Die letzteren wurden einfach dadurch bestimmt, dass man deren Durchstosspunkte δ_1 und δ_2 mit der Bildebene, so wie deren Flucht- oder Verschwindungspunkte v_1 und v_2 mit Zuhilfenahme der entsprechenden Parallelstrahlen $O_2 v_1$ und $O_2 v_2$ ermittelte und die bezeichneten Punkte δ_1 und v_1, δ_2 und v_2 mit einander verband. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden $\delta_1 v_1$ und $\delta_2 v_2$ gibt den Mittelpunkt M der Hyperbel.

Halbirt man den Asymptotenwinkel $t_1 M t_2$, so repräsentirt dio Halbirungslinie MX die Richtung der realen Axe der Hyperbel, welche letztere als das Bild der Geraden $a_0 b_0$ erscheint. Um nun die auf der Richtung von MX liegenden Scheitel des Kreisbildes zu finden, hat man eben blos diejenige Gerade $a_0 b_0$ in der Ebene E aufzusuchen, als deren Bild sich die Richtung MX ergab. Verbindet man zu diesem Behufe das Nebenauge O_2 mit dem Fluchtpunkte φ, welcher in der Fluchtlinie E_v der Ebene E liegt und führt man zu dem so gefundenen Parallelstrahl $O_2\varphi$ durch den Durchstosspunkt d von MX mit der Bildebene eine Parallele $d a_0 b_0$, so liefern a_0 und b_0 die Schnittpunkte der bildlich dargestellten Geraden MX mit dem Kreise K in der in die Bildebene hineingedrehten Lage.

Die Bilder a und b dieser beiden Punkte a_0 und b_0 werden sich in dem Bilde MX einfach dadurch ergeben, dass man die Teilstrahlen $O_2 a_0$ und $O_2 b_0$ zieht. Nachdem ferner Punkte des Kreises im Bilde als Punkte der Hyperbel sich darstellen, die Punkte a_0 und b_0 aber auf der Axe der letzteren liegen, so müssen deren Bilder a und b die Scheitel der Hyperbel sein, also die reelle Axe ab dieselben begrenzen.

Führt man durch einen dieser Punkte, etwa durch a eine Senkrechte $\gamma\varepsilon$ zu MX, so werden die beiden Asymptoten t_1 und t_2 in den zwei Punkten γ und ε geschnitten, deren Abstand $\gamma\varepsilon = ce$ die Richtung und Länge der imaginären Hyperbelaxe ce bestimmt.

Um beliebige zur Hauptaxe MX symmetrisch liegende Punkte des Kreisbildes I II III ... zu fixiren, verfahre man, wie bei der Parabel bereits gezeigt wurde. Führt man nämlich durch O_2 eine Senkrechte zu MX, welche die Spurlinie E_s in s trifft, und lagert man durch s, als Träger, ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen die Kreisperipherie in 1, 2, 3, 4, ... schneiden und bestimmt man auf analoge Weise wie vorher die Bilder der einzelnen Strahlen, so wie jene I II ... der Kreispunkte, so ergibt sich durch Verbindung der aufeinanderfolgenden Punkte I III V a VI ... das Bild des Kreises als Hyperbel.

Anmerkung. Häufig tritt der Fall ein, dass der Mittelpunkt M ausserhalb der Grenzen der Zeichnungsfläche fällt; man hat daher die Hyperbelaxe nach einen unzugänglichen Punkt M zu führen. Unter dieser Voraussetzung könnte man, um die Richtung der Axe MX und den Scheitel des einen Hyperbelastes zu bestimmen, allenfalls folgends vorgehen:

Man ziehe in beliebigen Punkten π_1 und π_2 der gefundenen Asymptoten $t_1 t_2$ auf letztere die Perpendikel $\pi_1 \lambda_1$ und $\pi_2 \lambda_2$, mache die Strecken $\pi_1 \lambda_1 = \pi_2 \lambda_2$ und $\pi_1 \mu_1 = \pi_2 \mu_2$, führe sodann durch λ_1 und λ_2, so wie durch μ_1 und μ_2 Parallelen zu den Asymptoten und bestimme deren Schnittpunkte ξ und ψ.

Diese beiden Punkte ξ und ψ, welchen gleiche Abstände von den Asymptoten entsprechen, miteinander verbunden, bestimmen die Halbirungslinie des Asymptotenwinkels und folglich die Richtung der reellen Axe.

c) Perspectivisches Bild des Kreises als Ellipse.

In einer Ebene E (Fig. 3.) ist ein Kreis K gegeben, welcher die durch das Auge O (Projectionscentrum) parallel zur Bildebene geführte Ebene P_E (Verschwindungsebene) nicht schneidet; es ist dessen perspectivisches Bild (Ellipse) zu construiren und sind die Durchmesser der sich diesfalls ergebenden Ellipse direct zu bestimmen.

Sei O_2 das in Bezug auf die Ebene E um E_v in die Bildebene umgelegte Auge, K der in E liegende, um E_s in gleichem Sinne gedrehte Kreis, und E_s die Spurlinie in der, gleichfalls um E_b, in die Bildebene gebrachten Lage.

Denkt man sich durch den Mittelpunkt c_0 des in die Bildebene umgelegten Kreises K eine Senkrechte scd zur Bildflächtrace E_b ge-

zogen, so wird sie die letztere und folglich auch die Bildebene im Punkte δ und die Spurlinie in s treffen.

Zieht man von s aus Tangenten τ_1 und τ_2 an den Kreis K, so werden deren Bilder t_1 und t_2 zu einander parallel und zugleich Tangenten an die Ellipse sein; denn wenn sich in einer Ebene Gerade vorfinden, welche sich in einem Punkte schneiden, so wird das Gleiche von ihren Bildern gelten, wenn aber der Schnittpunkt s, in der Ebene E, in die Gerade E_s fällt, welche als Schnitt der durch das Auge O parallel zur Bildebene gelegten Ebene mit E resultirt, so ist dessen Bild in der Bildfläche [nachdem der Projectionsstrahl Os in der zur Bildebene B_E parallelen Ebene P_E liegt, also zu B_E selbst parallel ist] im Unendlichen zu suchen. Die Bilder so bezeichneter Geraden haben also den unendlich fernen Punkt gemeinschaftlich, erscheinen somit untereinander parallel; es wird folglich das Bild ab der Berührungssehne a_0b_0 im umgelegten Kreise einem Durchmesser der Ellipse, welche als Perspective des gegebenen Kreises erscheint, entsprechen.

Da die Sehne a_0b_0 zur Bildebene parallel läuft, muss auch deren Bild ab zur Bildflächtrace E_b parallel erscheinen und es werden unter dieser Voraussetzung die Strecken im Originale in dem nämlichen Verhältnisse wie jene im Bilde geteilt. Es liegen folglich die Halbirungspunkte o und o_0 von ab und a_0b_0 mit O_2 auf derselben Geraden. Hiervon wird selbstverständlich o den Mittelpunkt des perspectivischen Bildes bestimmen, während o_0 den ihm entsprechenden Punkt im Kreise K repräsentirt.

Was nun den zweiten zu ab conjugirten Durchmesser ef betrifft, so hat man blos zu bedenken, dass derselbe zu den Tangenten t_1 und t_2 parallel sein müsse, dass er also in der Umlegung mit den Tangenten τ_1 und τ_2 den Punkt s gemeinschaftlich habe und dass sein Bild mit dem von $sf_0c_0e_0$ übereinstimme. Letztere Gerade, welche die Bildebene in δ trifft und senkrecht zur Bildflächtrace E_b steht, hat bekanntlich ihren Verschwindungspunkt im Nebenaugenpunkte A_1, daher die Verbindungsgerade $A_1\delta$ das Bild des Kreisdurchmessers f_0e_0 darstellen wird. Nachdem aber $A_1\delta$ parallel zu t_1 und t_2 liegt und durch den Mittelpunkt o der Ellipse geht, so ist oA_1 die Richtung des zu ab conjugirten Durchmessers des Kreisbildes. Um dessen Grenzpunkte e und f zu erhalten, wird man blos durch f_0 und e_0 die Teilstrahlen O_2f_0 und O_2e_0 zu ziehen und diese mit der Richtung derselben zum Schnitte zu bringen haben, wodurch sich der zu ab conjugirte Durchmesser in fe ergibt.

d) Perspectivisches Bild des Kreises als Kreis.

1) In der Bildebene B_E sei ein Kreis K, Fig. 4., ferner sei das Projectionscentrum (Auge) O durch den Distanzkreis D, so wie die orthogonale Projection A (Augepunkt) von O auf der Bildebene gegeben; es ist eine Ebene E zu suchen und in dieser ein Kreis K_1 zu bestimmen, dessen centrale Projection für das Centrum O den Kreis K gibt.

Legt man durch die Basis eines schiefen Kreiskegels eine Kugel, so schneidet diese bekanntlich den ersteren in einem zweiten Kreise; denn, wenn sich zwei Flächen 2. Ordnung (also auch die Kugel und der Kreiskegel) schneiden, so sind deren Schnittlinien (deren es im Allgemeinen zwei gibt) innere Curven derselben Ordnung. Ist der eine Schnitt ein ebener (im vorliegenden Falle die Basis des Kegels), so muss es notwendigerweise auch der andere sein. Im vorliegenden Falle kann dieser, nachdem der ebene Schnitt einer Kugel stets ein Kreis ist, nur wieder ein Kreis sein.

Schneidet man demnach den Projections- oder Sehkegel (OK) durch eine Kugel, welche den Kreis K in sich aufnimmt und nimmt man der Einfachheit wegen an, dass der Kugelmittelpunkt c mit dem Mittelpunkte m des Kreises K zusammenfalle, dass also der letztere ein grösster Kreis der Kugel werde, so wird der zweite Schnitt des Projectionskegels (OK) mit der Kugel schon die gesuchte Ebene bestimmen.

Nachdem aber eine Ebene durch drei nicht in einer Reihe liegende Punkte vollkommen bestimmt ist, wird es sich blos darum handeln, den Schnitt dreier Erzeugenden des Kegels, also dreier Projectionsstrahlen, mit der Kugel zu ermitteln.

Legt man zu diesem Behuf durch O und den Mittelpunkt m eine zur Bildebene senkrechtstehende Ebene, deren Trace Am sein wird, so erfolgt der Schnitt mit dem Projectionskegel in den beiden Erzeugenden aO und bO und jener mit der Kugel in einem grössten Kreise. Wird nun die Ebene sammt den bezeichneten Elementen um ihre Trace Am in der Bildebene umgelegt, so fällt der Kugelschnitt mit dem Kreise K zusammen, während, wenn O_1 das gleichzeitig umgelegte Projectionscentrum vorstellt, die Strahlen O_1a und O_1b die umgelegten Erzeugenden repräsentiren. Letztere begegnen dem umgeklappten Kugelkreis in zwei Punkten α und β, welche offenbar dem zu suchenden Durchschnitte angehören und mit einander verbunden eine Gerade $\alpha\beta$ der zu ermittelnden Ebene $E_b E_v$ bestimmen.

Der Durchschnittspunkt d dieser Geraden $\alpha\beta$ mit der Bildebene, wird als in der Trace Am liegend, auch dann keine Aenderung erfahren, wenn die Ebene in ihre ursprüngliche Lage zurückgeführt wird. Nachdem im vorliegenden Falle die Gerade Am die Bild- und Flächtrace der Ebene AmO gleichzeitig vorstellt, wird man den Verschwindungspunkt der Geraden $\alpha\beta$ in Am zu suchen haben und ihn erhalten, indem man durch das umgelegte Centrum O_1 den Parallelstrahl $O_1v \parallel \alpha\beta$ führt. Es sind hiernach a und b die centralen Bilder der Punkte α und β im Raume.

Obwol es nun von selbst erhellt, dass die Schnittlinie des Kegels mit der Kugel durch die Ebene AmO symmetrisch geteilt wird und die zu bestimmende Ebene E eine zur Ebene AOm senkrechte Lage besitze, also auch deren Tracen $E_b E_v$ senkrecht zu Am sein müssen, so lässt sich dies auch noch in folgender Weise dartun.

Legt man durch O Tangentialebenen an die Kugel, welche zur Bildebene senkrecht stehen, so werden deren Tracen durch $A\varrho$ und $A\pi$ und deren Berührungspunkte durch ϱ und π dargestellt erscheinen; denn zieht man den Berührungsradius $m\pi$, so steht sowohl die Trace $A\pi$, als eine Gerade der Ebene $A\pi O$, als auch die in π auf die Bildebene gefällte Senkrechte, die gleichfalls in $A\pi O$ liegt, auf demselben senkrecht; es wird somit $A\pi O$ die Berührungsebene an die Kugel im Punkte π sein. Analog lässt sich der Nachweis für den Punkt ϱ liefern. Nachdem aber π und ϱ, als Punkte der Basis auch Punkte des Kegels und zugleich Punkte des Schnittes mit der Kugel sind, so sind dieselben auch Punkte der zu suchenden Ebene E, und da sie in der Bildebene liegen, müssen sie auch der Bildflächtrace E_b der Ebene angehören. Dass der Punkt d als Durchstosspunkt mit der Bildebene in E_b liege, erhellt auch daraus, wenn man sich d als den Pol zu AO_1 und umgekehrt $\pi\varrho$ als Polaxe zu A_1 in Bezug auf den Kreis, vorstellt. Es ist somit die Verbindungslinie $\pi d\varrho$ die Bildflächtrace E_b und die durch v parallel zu E_b geführte Gerade E_v die Verschwindungslinie derjenigen Ebene in welcher der Kreis liegen muss, um im Bilde als Kreis K zu erscheinen.

Legt man das Auge O um E_v nach O_2 und die Ebene E um E_b nach derselben Seite in die Bildebene um, so lässt sich aus den nun bekannten Elementen E_v, E_b, O_2 und K der umgelegte Kreis K_1 durch Benutzung der Parallelstrahlen auf bekannte Weise bestimmen.

2) In der Bildebene B_E ist ein Kreis K Fig. 5. gegeben, ferner ist eine Ebene E durch ihre Bildflächtrace E_b und ihren Neigungswinkel n_s gegen B_E bestimmt; es ist das Projectionscentrum O (Auge) so zu ermitteln, dass K

als das perspectivische Bild eines in der Ebene E liegenden Kreises K_1 erscheint.

Auf Grund der unmittelbar vorher gegangenen Betrachtungen ist als bekannt anzunehmen, dass das Projectionscentrum in einer Ebene liege, welche durch den Kreismittelpunkt m geht und sowohl auf der Bildebene, als auch auf der Ebene E senkrecht steht. Die Tracen der genannten Ebene ε sind demnach ε_b ε_v.

Auch hier kann man sich durch K eine Kugel so gelegt denken, dass sie die Ebene E nach dem verlangten Kreise K_1 schneidet. Um den Kugelmittelpunkt bestimmt zu machen, sei beispielsweise die Forderung gestellt, dass dem in der Ebene E liegenden Kreismittelpunkte von K_1 ein bestimmter Abstand λ von der Bildebene entspreche.

Da der Mittelpunkt der Kugel in der durch m zur Bildebene senkrechten Geraden zu suchen ist, muss er offenbar auch in der Ebene ε liegen. Die Kugel wird also von dieser Ebene nach einem grössten Kreise K_2 und die Kreise K und K_1 in je zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten geschnitten.

Denkt man sich die Ebene ε um ihre Trace ε_b in die Bildebene umgelegt und in dieser Lage die Gerade $m\mu_0$ gezeichnet, in welcher der Kugelmittelpunkt sich vorfindet, und sucht man, unter Berücksichtigung dessen, dass $n\sigma$ der nach B_E umgelegte Schnitt mit der Ebene E sei, in letzterem den Punkt O_0 so, dass sein Abstand von ε_b gleich λ wird, so ist O_0 als der Mittelpunkt des Kreises K_1 in der Ebene E zu betrachten.

Fällt man im Raume vom Punkte o_0 ein Perpendikel auf die Ebene E (in der in die Bildebene hineingedrehten Lage ist derselbe durch $o_0\mu_0$ dargestellt), so wird die vorher erwähnte Gerade $m\mu_0$ im Mittelpunkte μ_0 der Kugel getroffen.

Die Punkte a und b in ε_b gehören dem Kreise K, folglich auch der Kugeloberfläche und zugleich der Ebene ε, ferner ergibt sich durch Umlegung der letzteren der grösste Kugelkreis K_2, welcher die Gerade $n\sigma_0$ in zwei Punkten a_2 und b_2 des Kreises K_1 schneidet. Die so erhaltenen Punkte a und a_2, b und b_2 sind aber als perspectivische Elemente zu betrachten, daher sich die Projectionsstrahlen aa_2 und bb_2 in dem gleichzeitig mit der Ebene ε umgelegten Projectionscentrum O_1 schneiden müssen. Fällt man nun aus O_1 eine Senkrechte auf ε_b, so erhält man den Haupt- oder Augepunkt A. Um nun schliesslich noch die Verschwindungslinie E_v der Ebene E festzustellen, wird es, da man ihre Richtung kennt, genügen, einen

Punkt A_1 derselben zu bestimmen. Letzteren erhält man bekanntlich, wenn man durch O_1 die Parallele O_1A_1 zu $n\sigma_0$ führt und dieselbe mit s_b in A_1 (Nebenaugepunkt) zum Schnitte bringt.

Legt man endlich das Auge O um E_v in die Bildebene nach O_2 um und dreht man die Ebene E mit dem in ihr liegenden Kreise K_1 in dem nämlichen Sinne um E_b, so lassen sich durch Benutzung von O_2, E_b, E_v und K beliebig viel Punkte des umgelegten Kreises K_1 construiren.

Brünn, den 25. Februar 1874.

III.

Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Fortsetzung von N. XXXVII. im vorigen Teile.

Artikel II. (§ 4—§ 9.)

Hierzu 3 Tafeln.

Theoretische Betrachtungen.

Einleitung.

Im ersten Artikel haben wir gezeigt, wie sich die reellen Wurzeln der beliebig vorgelegten Gleichung:

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots \alpha_n = 0$$

als Abscissen der Durchschnitte zweier convexen Curven construiren lassen.

Wir wollen dieselben einer näheren Betrachtung unterziehen einerseits, um die in Artikel I. § 3. vorausgeschickten geometrischen Kriterien zu beweisen, andererseits solche zur analytischen Auflösung der Gleichungen zu gewinnen.

Den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchungen bildet das bisher in höchst unvollkommener Weise gelöste Problem der Trennung der reellen Wurzeln.

Wir gehen darauf aus, 1) eine obere Grenze einer beliebigen Wurzel aus einer unteren und umgekehrt zu bestimmen, 2) die Wurzel selbst aus einer oberen oder unteren Grenze derselben darzustellen.

Wir werden sehen, dass dreigliedrige Gleichungen von der Form

$$\alpha x^r + \beta x^{r-1} + \gamma = 0$$

bei der Trennung und näherungsweisen Bestimmung der reellen Wurzeln von $f(x) = 0$ eine wichtige Rolle spielen und zeigen, wie der Grad der Hülfsgleichung für die Trennung auf $r = 2$ reducirbar ist. Dieser Gedanke leitet uns bei den Untersuchungen in § 7. und § 8. I. und II.

§ 4.

I. Wir betrachten im Folgenden das System zweier beliebigen sich schneidenden convexen Curven K und $\mathfrak{K}$, zunächst den Fall, dass eine derselben eine Gerade ist.

Punkte bezeichnen wir mit grossen Buchstaben, die Abscissen derselben mit den entsprechenden kleinen, ausgenommen die der Punkte P und $\mathfrak{P}$, und zwar seien allgemein die Abscissen von

$$P,\ P^r,\ P_r,\ \mathfrak{P}^{(r)},\ \mathfrak{P}_r\ :\ x,\ x^{(r)} \ldots \mathfrak{x}_r.$$

Die Durchschnitte von K und $\mathfrak{K}$ seien W, die Abscissen von W: w.

Die Ebene denken wir uns vertical, die X-Achse für jede Figur horizontal, die Y-Achse senkrecht dazu.

Diese Bedeutung der kleinen Buchstaben ist im Folgenden durchweg festzuhalten.

Wir lehnen uns zur grösseren Kürze stets an Figuren an. Wie die Resultate auf ihren analytischen Ausdruck gebracht werden können, müssen wir teilweise dem geneigten Leser überlassen.

II. Eine convexe Curve kann als Polygon mit unendlich kleinen Seiten:

$$\ldots P''' P'' P' P_0 P_1 P_2 P_3 \ldots$$

angesehen werden, für welches (Fig. I.):

(1) $$\ldots x''' < x'' < x' < x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots$$

(2) $$\ldots t'' < t' < t_0 < t_1 < t_2 \ldots$$

wo $$\ldots t' = tg\,\alpha' = \frac{y_0 - y'}{x_0 - x'},\quad t_0 = tg\,\alpha_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x^0} \ldots$$

Dies kann als Definition einer Curve gelten, welche in der Richtung $Y'Y$ gesehen convex ist.

Ist ihre Gleichung

$$y = F(x),$$

so lauten die Bedingungen (1) und (2):

(3) $\left\{ \right.$ $F(x)$ und $F'(x)$ sind eindeutige, stetige Functionen.
Die 1. Derivirte $F'(x)$ wächst stetig mit x, oder was dasselbe, es ist die 2. Derivirte $F''(x) > 0$ und zwar für ein gewisses Intervall von x.

Ziehen wir ein beliebiges **Polygon mit nur einspringenden Winkeln** wie in Fig. I. in Betracht und behandeln gleichzeitig den Fall, dass die Seiten unendlich klein sind, d. h. eine convexe Curve (Fig. IV.) vorliegt.

Ein Blick auf Fig. II. besagt:

Die Strecke auf einer zur Y-Achse im Abstande $x \lessgtr x_0$ gezogenen Parallelen und zwar zwischen den unbegrenzten Geraden $P'P_0$ und P_0P_1 gerechnet resp. von P_0P_1 oder $P'P_0$ ist positiv.

Hieraus ergibt sich eine Reihe von Eigenschaften, die wir in folgende Rubriken bringen können und die in den Figuren zur Anschauung gebracht sind.

1. Aufeinanderfolge*) der Durchschnittspunkte der $\left\{\begin{matrix}\text{Seiten}\\ \text{Tangenten}\end{matrix}\right\}$ mit einer Geraden $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ und zwar

a) einer Parallelen zur Y-Achse (Fig. II., Fig. IV.)

b) einer Seite des Polygons (Fig. II.)
resp. Tangente der Curve (Fig. IV.)

c) einer beliebigen Geraden (Fig. IIIa. b., Fig. IV.)
In Fig. IIIa. sowohl wie in Fig. IIIb. sind zwei Lagen von $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ verzeichnet.

2. Grössenverhältniss**) der Abstände der $\left\{\begin{matrix}\text{Ecken}\\ \text{Curvenpunkte}\end{matrix}\right\}$ von $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$.

a) $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ sei eine Seite (Fig. II.) resp. eine Tangente (Fig. IV.)

Sämmtliche $\left\{\begin{matrix}\text{Ecken}\\ \text{Curvenpunkte}\end{matrix}\right\}$ liegen oberhalb $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$.

---

*) und **) In den Figuren II—IV. durch Pfeile angedeutet.

b) $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ sei beliebig (Fig. III a. b., Fig. V.)

α) Ist in Fig. III a. der Abstand des P' von $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ grösser als der Abstand des P_0 von $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$, so

Abst. des $P''' >$ Abst. des P'

„ „ $P''' >$ „ „ P''

u. s. w., die Abstände $Y'Y$ algebraisch gemessen.

β) Ist in Fig. III b. der Abstand des Punktes P_1 grösser als der Abstand des Punktes P_0, so folgen ebenso die Abstände von P_0, P_1, P_2 ... der Grösse nach aufeinander.

3. Aufeinanderfolge der Verbindungslinien der Ecken mit einer derselben P_0 (Fig. I.)

Ferner gelten folgende Sätze:

4. In einem Punkte P schneiden sich höchstens 2 Seiten (Fig. II.) resp. 2 Tangenten (Fig. IV.)

5. Auf einer Geraden liegen höchstens 2 Ecken (folgt aus 3), Fig. I., resp. 2 Curvenpunkte (Fig. V.)

6. Verbindet man die $p$te, $q$te, $r$te ... Ecke $(p < q < r \ldots)$ der Reihe nach mit einander, indem man Ecken überschlägt, so entsteht ein Polygon wie das ursprüngliche (Fig. I., Fig. V.)

§ 5.

Wir heben noch folgende Eigenschaften der convexen Curven hervor:

1. Liegt in Fig. IV. P der Curve auf der convexen Seite hinreichend nahe, so sind 2 Tangenten vorhanden. Die Berührungspunkte P_0, P_0' befinden sich auf entgs. Seiten der Ordinate von P.

2. Zu einer Sehne WW', Fig. VI., lässt sich eine und nur eine parallele Tangente ziehen. Der Berührungspunkt Q liegt zwischen W und W'. Dies folgt aus § 4. (2) und § 4. 3.

3. In Fig. V. ist

1) $x^{IV} < x''' < x < x''$

2) $x < x'' < x' < x_0$

3) $x''' < x'' < x < x'$

4) $x_2 < x < x_3 < x_4$

5) $x_0 < x_1 < x_2 < x$

6) $x_1 < x < x_2 < x_3$

wo die Abscisse des Durchschnitts von $P''P_2$ mit resp.

$$P^{IV}P''', \; P'P_0, \; P'''P' \text{ ad 1) bis 3)}$$
$$P_4P_3, \; P_1P_0, \; P_3P_1 \text{ ad 4) bis 6)}$$

bezeichnet (§ 4., 1. c).

4. Ist in Fig. VI. *) speciell $x^{IV} = x''' = x_0$ u. s. w., so hat man, wenn die Tangente in Q parallel $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ ist:

1) $x_0 < x_1 < w$ falls $c < x_0 < w$
   $w' < x_1 < x_0$ „ $w' < x_0 < c'$

2) $x_1 < w < x_0$ „ $w < x_0 < q$
   $x_0 < w' < x_1$ „ $q < x_0 < w'$

3) x_0 und x_1 liegen in jedem dieser Fälle auf derselben Seite von q.

In Fig. VII. **):

4) $w < x < x_1$ falls $c < x_0 < w$ und $w < x_1 < w'$
   $x_1 < x < w'$ „ $w' < x_0 < c'$ und $w < x_1 < w'$

Anmerkung. Mit Hülfe von 4. lassen sich der Reihe nach folgende Aufgaben lösen:

Aufgabe 1. Die in (c, c') enthaltenen Wurzeln von $\mathfrak{F}(x) = F(x) - \alpha x - \beta = 0$ darzustellen, falls $F''(x) [= \mathfrak{F}''(x)] > 0$ für $c < x < c'$.

Aufgabe 2. Die reellen Wurzeln von $\mathfrak{F}(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots \alpha_n = 0$ darzustellen, wenn die von $\mathfrak{F}''(x) = 0$ bekannt sind.

Aufgabe 3. Die besagten Wurzeln in der vorigen Aufgabe zu trennen und näherungsweise zu bestimmen, wenn die von $\mathfrak{F}'(x) = 0$ und $\mathfrak{F}''(x) = 0$ gegeben sind.

Aufgabe 4. Die reellen Wurzeln der beliebig vorgelegten Gleichung $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_n = 0$ zu berechnen.

Vergl. „die Aufl. der algebr. und transcendenten Gleichungen ... von Dr. H. Scheffler, Braunschweig 1859“, § 10 (directe Aufl. einer Gleichung ohne Versuchsrechnung). Die dort angegebene Methode stimmt im Wesentlichen mit der hier angedeuteten überein, möchte aber hauptsächlich ein theoretisches Interesse haben.

---

*) Ist $\mathfrak{F}(x) = F(x) - \alpha x - \beta$, so $x_1 = x_0 - \frac{\mathfrak{F}(x_0)}{\mathfrak{F}'(x_0)}$ (Euler'sche Näherungswert).

**) Es ist $x_1 = \frac{x_0 \mathfrak{F}(x) - x \mathfrak{F}(x_0)}{\mathfrak{F}(x) - \mathfrak{F}(x_0)}$, wo $\mathfrak{F}(x) = F(x) - \alpha x - \beta$ (Regula falsi).

§ 6.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem **System zweier convexen Curven**, Fig. VIII a. b. c., durchschnitten von einer beliebigen Geraden $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$.

1. Bezeichnen wir mit w allgemein die Abscissen der Durchschnittspunkte von K und $\mathfrak{K}$, so folgt aus § 4., Definition und § 4., II. 2. b):

a. Ist $\mathfrak{x}_1 < \mathfrak{x}_2 < x_1 < x_2$ (Fig. VIII a.), so enthält
$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ und (x_1, x_2) kein w, dagegen:
$(\mathfrak{x}_2, x_1)$ genau ein solches.

b. Ist $\mathfrak{x}_1 < x_1 < x_2 < \mathfrak{x}_2$ (Fig. VIII b.), so
$(\mathfrak{x}_1, x_1)$ und $(x_2, \mathfrak{x}_2)$ kein w.

c. Ist $\mathfrak{x}_1 < x_1 < \mathfrak{x}_2 < x_2$ (Fig. VIII c.), so
$(\mathfrak{x}_1, x_1)$ und $(\mathfrak{x}_2, x_2)$ kein w, dagegen:
$(x_1, \mathfrak{x}_2)$ genau ein solches.

2. Fallen in Fig. IX a. b. c. speziell P_1 und P_2 mit P_0 zusammen, so folgt, wenn die Tangenten in P_0 und $\mathfrak{P}_0$ sind:

a. Ist $\mathfrak{x}_1 < \mathfrak{x}_2 < x_0$ (Fig. IX a.), so befindet sich
in $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ kein w, in $(\mathfrak{x}_2, x_0)$ Ein w.

b. Ist $x_0 < \mathfrak{x}_1 < \mathfrak{x}_2$ (Fig. IX b.), so
in $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ kein w, in $(x_0, \mathfrak{x}_1)$ Ein w.

c. Ist $\mathfrak{x}_1 < x_0 < \mathfrak{x}_2$ (Fig. IX c.), so
in $(\mathfrak{x}_1, x_0)$ und $(x_0, \mathfrak{x}_2)$ kein w.

3. Zwischen x_0 und $\mathfrak{x}_0$ liegt höchstens ein w.

4. Liegen in Fig. VIII b. $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ auf der convexen Seite von K, ferner zwischen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ 2, 4 ... Abscissen w, so schneidet $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ die Curve K in zwei Punkten P_1, P_2, so dass:

$$\mathfrak{x}_1 < x_1 < x_2 < \mathfrak{x}_2$$

und

$$\mathfrak{x}_1 < x_0 < \mathfrak{x}_2,$$

wenn die Tangente in P_0 parallel $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ ist.

Findet das Eine oder Andere nicht statt, so enthält

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \text{ kein } w.$$

5. In Fig. X. hat man, wenn PP_1P' Tangente an K ist, nach 2. c):

$$w < x < x_1 < x' < w'.$$

Wälzt sich die Tangente auf dem Bogen WW' von $\mathfrak{K}$ fort, so nimmt mit x sowohl wie x' das x_1 gleichzeitig zu oder ab und umgekehrt.

6. In Fig. XI., wenn P_1P_0' und P_1P_0 die Curve K berühren, nach 2. a) und b):

$$x_1 < w < x_0' < w' \text{ wenn } w - x_1 \text{ sehr klein,}$$
$$w < x_0 < w' < x_1 \quad \text{„} \quad x_1 - w' \quad \text{„} \quad \text{„}$$

Denn zunächst folgt aus 2. a) $x_0' < w'$, sodann aus Fig. XII., wenn V ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}$ unterhalb der Tangente WT ist, dass die Berührungspunkte P_0' der von jedem zwischen V und W gelegenen Punkte P_1 an K gezogenen Tangenten auf die positive Seite der Ordinate von W fallen, also auch die den Punkten $\mathfrak{P}_1$ des Curvenbogens VW entsprechenden Punkte P_0'. Analoges gilt für W' in Fig. XI.

7. In 4. ist § 3., Kriterium I. enthalten. Aus 2. folgt § 3., Kriterium II., aus 2. c. § 3., Kriterium III.

§ 7.

I. Im vorigen § und zwar unter 6, haben wir gesehen, dass wenn in Fig. XI. P_1 sich auf $\mathfrak{K}$ dem Punkte $\begin{Bmatrix} W \\ W' \end{Bmatrix}$ nähert, $\begin{Bmatrix} P_0' \\ P_0 \end{Bmatrix}$ stets auf die entgegengesetzte Seite der Ordinate von $\begin{Bmatrix} W \\ W' \end{Bmatrix}$ fällt, wenn P_1 eine gewisse Grenze überschritten hat, und dass zwischen x_1 und $\begin{Bmatrix} x_0' \\ x_0 \end{Bmatrix}$ die Abscisse von höchstens einem Durchschnitt liegt.

Wir wollen im Folgenden einen Punkt P suchen, der mit P_1 (ähnlich wie P_0', P_0) seine Lage verändernd dieselben Eigenschaften besitzt.

Worauf es uns dabei ankommt, ist am Schluss der Einleitung angedeutet..

Bewegt sich in Fig. XIII. ein Punkt P_1 auf der Geraden $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ ausserhalb K, ist stets P_1P_2 parallel $Y'Y$, so beschreiben die Durchschnitte P und (P) der Tangenten P_1P_0' und P_1P_0 mit P_2P einen K in W berührenden Ort und zwar sind W Wendepunkte. (Dies folgt hauptsächlich aus § 4., II. 1. b., Fig. IV.). Aus der näheren Betrachtung dieses Ortes — die uns hier zu weit führen würde — ergibt sich:

Der veränderliche Punkt P in Fig. XIII. hat die beregten Eigenschaften, wenn $\mathfrak{K}$ eine Gerade $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ ist. Er besitzt dieselbe aber auch wenn P_1 sich auf einer beliebigen convexen Curve $\mathfrak{K}$, Fig. XII., bewegt; denn ist P_1 ein Punkt der beliebigen Sehne VW unterhalb WT und zwar so nahe an W, dass nach Obigem $x > w$, so ist auch $\varphi > w$ — $\mathfrak{P}$ sei der Durchschnitt der Tangenten $P_1 P'_0$ und $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ parallel $Y'Y$ — nach § 4, II, 1, b.

II. Wir lassen hier den algebraischen Beweis für den Fall folgen, dass $\mathfrak{K}$ eine Gerade von $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$, Fig. XIII., ist:

Die Gleichung von K sei

$$y = F(x)$$

$\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$ schliesse mit der X Achse den $\angle \alpha$ ein, so dass:

$$\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon \,.\, F'(w), \quad \text{wo} \quad \varepsilon \gtrless 1.$$

Die Abscissen x_1 und x_0' wollen wir mit

$$s \quad \text{resp.} \quad t$$

bezeichnen. Alsdann ist die Gleichung von

(1) $$\mathfrak{L}'\mathfrak{L} : y - \varepsilon \,.\, F'(w) \,.\, x + \varepsilon \,.\, w \,.\, F'(w) - F(w) = 0$$

(2) $$P_1 P'_0 : y - F(t) \,.\, x + t \,.\, F'(t) - F(t) = 0.$$

Also:

(3) $$s(F'(t) - \varepsilon F'(w) = t \,.\, F'(t) - F(t) - (\varepsilon w F'(w) - F(w)$$

oder:

(4) $$(s - w)(F'(t) - \varepsilon F'(w) = \varphi(t)$$

wo

(5) $$\varphi(t) = (t - w) F'(t) - F(t) + F(w)$$

Die erste Derivirte ist:

$$\varphi'(t) = (t - w) F''(t),$$

die zweite:

$$\varphi''(t) = (t - w) F'''(t) + F''(t),$$

also:

(6) $$\varphi(w) = 0, \quad \varphi'(w) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi''(w) = F''(w) > 0.$$

Aus (6) folgt: Ist $t - \gtrless 0$ hinlänglich klein, so ist $\varphi(t) > 0$, da

Zeichen von $(s-w)$ also nach (4) gleich dem von $F'(t)-\varepsilon F'(w)$ $=$ Zeichen von $-F'(w)(\varepsilon-1)$ und weiter:

Stimmt unter jener Voraussetzung das Zeichen von $(t-w)$ mit dem von $+F'(w)(\varepsilon-1)$ überein, so sind die Vorzeichen der Differenzen $s-w$ und $t-w$ entgegengesetzt, w liegt also zwischen

(7) $$s \text{ und } t.$$

Ferner haben wir als Gleichung von P_2P:

(8) $$y-F'(s).x+sF'(s)-F(s)=0$$

also aus (2) und (8):

$$x(F'(s)-F'(t)=sF'(s)-F(s)-(tF'(t)-F(t)),$$

oder:

(9) $$(x-w)(F'(s)-F'(t))=\psi(t),$$

wo

(10) $$\psi(t)=F'(s)(s-w)-F'(t)(t-w)-(F(s)-F(t)),$$

mithin:

(11) $$\psi(w)=0.$$

Die Gleichung (10) differentiirt gibt:

$$\psi'(t)=F'(s)\frac{ds}{dt}+F''(s)\frac{ds}{dt}(s-w)-F'(t)-F''(t)(t-w)-F'(s)\frac{ds}{dt}$$
$$+F'(t)=F''(s)(s-w)\frac{ds}{dt}-F''(t)(t-w).$$

Durch Differentiirung von (4) finden wir:

$$(s-w)F''(t)+(F'(t)-\varepsilon F'(w))\frac{ds}{dt}=\varphi'(t).$$

Also für $t=w$ — da wegen (4) und (6) $s=w$ und $\varphi'(w)=0$ ist —:

$$\frac{ds}{dt}=0,$$

mithin:

(12) $$\psi'(w)=0.$$

Ferner ist:

$$\psi''(t)=F''(s)(s-w)\frac{d^2s}{dt^2}+\left(F''(s)\frac{ds}{dt}+(s-w)F'''(s)\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt}-F''(t)$$
$$-F'''(t)(t-w).$$

Durch nochmalige Differentiirung obiger Gleichung für $\frac{dz}{dt}$ ergibt sich:

$$(z-w)F'''(t)+\frac{dz}{dt}F''(t)+(F'(t)-\varepsilon F'(w))\frac{d^2z}{dt^2}+F''(t)\frac{dz}{dt}=\varphi''(t),$$

also für $t=w$ (da $\frac{dz}{dt}=0$ und nach (4) und (6) $z=w$ und $\varphi''(w)=F''(w)$ ist):

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{F''(w)}{F'(w)(1-\varepsilon)};$$

folglich für diesen Grenzfall:

(13) $$\psi''(w)=-F''(w)<0.$$

Aus (11), (12) und (13) folgt: Ist $(t-w)$ absolut hinlänglich klein, so ist $\psi(t)<0$, also

nach (9)	das Zeichen von	$(x-w)$	= Zeichen v. $F'(t)-F'(z)$,
„ § 4, II (3)	„ „ „	$F'(t)-F'(z)$ =	„ „ $t-z$
„ (7)	„ „ „	$t-z)$ =	„ „ $w-z$,
mithin	„ „ „	$x-w$ =	„ „ $w-z$(w. z. b.).

§ 8.

I. Wir fahren mit der Lösung der uns in § 7, I gestellten Aufgabe fort. Wenn in Fig. XIV a, b P_1 sich auf $\mathfrak{K}$ dem Durchschnitt W von $\mathfrak{K}$ und K nähert, so bleibt von einer gewissen Stelle an P auf der entgs. Seite der Ordinate des Punktes W. (Siehe § 7, I).

Ist H eine sich mit P_1 verändernde, jedoch stets convexe und durch P_1 und $P'_0(P_0)$ gehende Curve, so hat auch P' die besagte Eigenschaft von P (folgt aus § 5, 4. 4) , Fig. VII).

Lauten die Gleichungen von K und $\mathfrak{K}$:

(1) $$\left.\begin{array}{l} \\ \text{und} \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=F(x) \\ \\ y=\mathfrak{F}(x) \end{array}$$

so finden wir eine Curve, welche für jede Lage von P_1 durch P_1 und $P'_0(P_0)$ geht, in dem Ort der Berührungspunkte der von P_1 an das System

$$y=\alpha\,.\,F(x)\quad(\alpha\text{ variabel})$$

gezogenen Tangenten.

Die Gleichung desselben ist bestimmt durch

$$\frac{\mathfrak{F}(x)-\alpha F(x)}{x_1-x}=\alpha F'(x)$$

und

$$\alpha F(x)=y,$$

also:

$$\frac{y-\mathfrak{F}(x_1)}{x-x_1}=y\,\frac{F'(x)}{F(x)},$$

oder:

(2) $$y=\frac{\mathfrak{F}(x_1)}{1-(x-x_1)\,\dfrac{F'(x)}{F(x)}}$$

II. Ist speciell Fig. XV,

$$F(x)=\lambda x^r,$$

(1) wo $\lambda>0$ und r eine ganze Zahl (>1) bedeutet,

so ist $\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{r}{x}$, folglich jener Ort I (2):

$$y=\frac{\mathfrak{F}(x_1)}{1-(x-x_1)\,\dfrac{r}{x}},$$

oder:

(2) $$y=\frac{\mathfrak{F}(x_1)x}{rx_1-(r-1)x}$$

(3) d. h. eine durch O und P_1 gehende gleichseitige Hyperbel mit zu den Coordinatenachsen parallelen Asymptoten, ML und MN, dargestellt durch:

$$\bar{x}=\frac{r}{r-1}x_1,$$

$$\bar{y}=-\frac{1}{r-1}\cdot y_1.$$

Die Natur dieses Ortes erhellt auch daraus, dass die Abschnitte der Tangenten der Curve $y=\lambda x^r$ auf der X Achse proportional den Abscissen der Berührungspunkte sind, die in Frage stehende Curve also der Durchschnitt zweier proportionalen Strahlenbüschel ist, von denen P_1 den einen Mittelpunkt bildet und der in der Richtung der Y Achse liegende unendlich entfernte Punkt der Ebene den anderen.

Liegt in Fig. XV. P_1 im 1. Quadranten, auf der convexen Seite

von K, so sind $O_1 P_1$ sowie die Berührungspunkte P_0 und P'_0 der von P_1 an K gezogenen Tangenten Punkte eines und desselben Zweiges der gleichseitigen Hyperbel.

Derselbe kann also als eine Curve H (siehe zu Anfang des § 8. Fig. XIV. a, b) betrachtet werden, wenn P_1 besagte Lage hat.

III. Wir wiederholen, oder vielmehr stellen zusammen für den vorliegenden speciellen Fall II (1):

Nähert sich in Fig. XV. P_1 auf der convexen Seite von K einem Curvenpunkt $W(W')$ längs der beliebigen convexen Curve $\mathfrak{K}$, so ist, wenn $P_1 P_0$, $P_1 P'_0$, $P P_2 P'$ Tangenten von K bilden, von einer gewissen Grenze an:

1) $x_0 < w < x_1$ resp. $x_1 < w' < x'_0$

ebenso:

2) $x < w < x_1$ „ $x_1 < w' < x'$

3) In die Intervalle $(x_0 x_1)$ bezügl. $(x_1 x'_0)$ mithin auch in die kleineren Intervalle $(x x_1)$ bezügl. $(x_1 x')$ kann von den Abscissen der Durchschnitte von K und $\mathfrak{K}$ höchstens eine fallen.

4) Das sich auf $(x_1 x'_0)$ Beziehende gilt auch, wenn P_2 im 4. Quadranten liegt. — Welche Verhältnisse bis zu jener Grenze stattfinden, geht aus § 6., 5 hervor.

Auf diese Krieterien in Verbindung mit Art. I, § 2, Aufg. I. basiren wir unsere Methode der Trennung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen; auf § 6, 5. verbunden mit § 2, Aufg. II. die Annäherung an dieselben.

§ 9.

I. Es ist von Interesse die auf geometrischem Wege erhaltenen Sätze 1) bis 4) auch algebraisch abzuleiten.

Die Sätze 3) und 4) ergeben sich leicht durch Betrachtung des Verlaufes der Function $\varphi(x) = F(x) - (\alpha x + \beta)$, Fig. V.

Die einzige Schwierigkeit bietet 2) dar, weshalb wir den algebraischen Beweis hier folgen lassen:

Sind in Fig. XIV. a, b die Gleichungen der convexen Curven

(1) K: $y = F(x)$,

(2) $\mathfrak{K}$: $y = F(x) - \mathfrak{f}(x)$,

(3) $$H \text{ nach } \S\,8,\ \mathrm{I}:\ y = \frac{F(x_1) - \mathfrak{k} f(x_1)}{1-(x-x_1)\dfrac{F'x}{F(x)}}$$

— wir nehmen an, dass (3) eine convexe Curve darstellt —, so ist die Abscisse von P' eine Wurzel von

(4) $$\frac{F(x_1) - \mathfrak{k} f(x_1)}{1-(x-x_1)\dfrac{F'(x)}{F(x)}} = F(x_1) + (x - x_1)\, F'(x_1)$$

In Fig. XV. ist speciell $\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{r}{x}$, also die dortigen x und x' Wurzeln von

$$\frac{1 - \dfrac{\mathfrak{k} f(x_1)}{F(x_1)}}{1-(x-x_1)\,\dfrac{r}{x}} = 1 + (x-x_1)\,\frac{r}{x_1},$$

oder:

$$\frac{-\mathfrak{k} f(x_1)}{F(x_1)} = r\,(x-x_1)\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) - r^2\,(x-x_1)^2\,\frac{1}{x_1 x},$$

$$= \frac{r(x-x_1)^2}{x x_1}\,(1-r).$$

Also, $F(x_1) = \lambda x_1^{\,r}$ gesetzt:

$$(x-x_1)^2 = \frac{\mathfrak{k} f(x_1)}{r(r-1)\,\lambda x_1^{\,r-1}}\cdot x,$$

$$x^2 - 2x\left(x_1 + \frac{\mathfrak{k} f(x_1)}{2r\,(r-1)\,\lambda x_1^{\,r-1}}\right) + x_1^{\,2} = 0.$$

Somit ist, wenn wir zur Abkürzung

(5)
$$\mathfrak{k}' = \frac{\mathfrak{k}}{2r\,(r-1)\lambda}$$

und $$\varphi(x_1) = x_1 + \frac{\mathfrak{k}' f(x_1)}{x_1^{\,r-1}}$$

setzen, in Fig. XV.:

$$\left.\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix}\right\} = \varphi(x_1) \pm \sqrt{[\varphi(x_1)]^2 - x_1^{\,2}}.$$

II. Wir gehen nun zum Beweis der Sätze 2) in § 8. über und beweisen dass in besagter Figur:

1) $x < w < x_1$ ist, wenn $x_1 - w$ hinreichend klein genommen wird:

Es ist

$$\varphi(x_1) > x_1 > w,$$

also x reell und $\lesseqgtr w$ je nachdem:

$$(\varphi(x_1) - w)^2 \lesseqgtr (\varphi(x_1))^2 - x_1^2,$$

oder:

$$w^2 - 2\varphi(x_1) \,.\, w + x_1^2 \lesseqgtr 0,$$

d. h.:

$$x_1^2 - 2w\left(x_1 + \frac{\mathfrak{f}'f(x_1)}{x_1^{r-1}}\right) + w^2 \lesseqgtr 0,$$

$$(x_1 - w)^2 x_1^{r-1} - 2w\mathfrak{f}'f(x_1) \lesseqgtr 0.$$

Wir bezeichnen diese Function mit

(1) $$\psi(x_1) = (x_1 - w)^2 x_1^{r-1} - 2w\mathfrak{f}'f(x_1),$$

so ist also $x \lesseqgtr w$, wenn bezüglich:

(2) $$\psi(x_1) \lesseqgtr 0.$$

Nun ist

$$\mathfrak{f}f(x_1) = \lambda x_1^r - \mathfrak{F}(x_1),$$
$$f(w) = 0;$$

folglich:

(3) $$\psi(w) = 0.$$

Durch Differentiirung von $\psi(x_1)$ und $\mathfrak{f}f(x_1)$ erhalten wir:

$$\psi'(x_1) = (x_2 - w)^2 (r-1) x_1^{r-2} + 2(x_1 - w) x_1^{r-1} - 2w\mathfrak{f}'f'(x_1)$$

und

$$\mathfrak{f}'f'(x_1) = \lambda r x_1^{r-1} - \mathfrak{F}'(x_1),$$

$$\mathfrak{f}'f'(w) = F'(w) - \mathfrak{F}'(w) > 0 \quad \text{(Vergl. die Fig.);}$$

also:

(4) $$\psi'(w) = -2w\mathfrak{f}'f'(w) < 0.$$

Durch nochmalige Differentiirung:

$$\psi''(x_1) = (x_1 - w)^2 (r-1)(r-2) x_1^{r-3} + 4(x_1 - w)(r-1) x_1^{r-2} + 2x_1^{r-1} - 2w\mathfrak{f}'f''(x_1)$$

und

$$\mathfrak{f}f''(x_1) = \lambda r(r-1) x_1^{r-2} - \mathfrak{F}''(x_1),$$

oder:

$$2\mathfrak{k}'f''(x_1) = x_1^{r-2} - \frac{\mathfrak{F}''(x_1)}{\lambda r(r-1)}.$$

Also

(5) $$\psi''(w) = w(2w^{r-2} - 2k'f''(w)) = \left(w^{r-2} + \frac{\mathfrak{F}''(w)}{\lambda r(r-1)}\right) > 0$$

da $\mathfrak{F}''(w) > 0$ und $\lambda > 0$, $r =$ gz. Zahl > 1.

Aus (3), (4) und (5) folgt:

Für ein dem w auf der pos. Seite hinreichend benachbartes x_1 ist $\psi(x_1) < 0$, also nach (2):

$$x < w \quad \text{(w. z. B.)}$$

Wir beweisen

2) dass $x_1 < w' < x'$ ist, wenn $w' - x_1$ hinreichend klein genommen wird. (Fig. XV.).

Es ist

$$x' = \varphi(x_1) + \sqrt{[\varphi(x_1)]^2 - x_1^2}$$

wo

$$\varphi(x_1) = x_1 + \frac{k'f(x_1)}{x_1^{r-1}} > x_1,$$

also x' reell.

(1) $\left\{\begin{array}{l} \text{Ist } \varphi(x_1) > w', \text{ so um so mehr } x' > w' \\ \text{„ „ } < w', \text{ „ } x' \gtrless w', \text{ je nachdem:} \end{array}\right.$

$$\sqrt{[\varphi(x)]^2 - x_1^2} \gtrless \varphi(x_1) - w',$$

oder

$$w'^2 - 2\varphi(x_1) \,.\, w' + x_1^2 \lessgtr 0;$$

(2) d. h. je nachdem $\psi(x_1) \lessgtr 0$ ist,

wo $\psi(x_1)$ die obige Function 1, (1) ist, darin w' statt w gesetzt. Also analog wie ad 1):

$$\psi(w') = 0, \quad \psi'(w') > 0 \quad \text{und} \quad \psi''(w) > 0.$$

Für ein w' auf der negativen Seite benachbartes x_1 ist somit $\psi(x_1) > 0$, also nach (1) und (2)

$$x' > w' \quad \text{(w. z. B.)}$$

Bei den obigen Beweisen ad 1) und 2) haben wir vorausgesetzt:

$$F'(w) - \mathfrak{F}'(w) > 0$$

und

$$F'(w') - \mathfrak{F}'(w') < 0,$$

d. h. geometrisch:

dass sich die Curven K und $\mathfrak{K}$ schneiden, nicht berühren (wie überhaupt in sämmtlichen Figuren).

Wir wollen dies bei den weiteren Untersuchungen im Auge behalten.

IV.

Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems.

Vierter Artikel. Fortsetzung von Bd. 56. N. XXIII.

Von

R. Hoppe.

---

8. Discussion der allgemeinen Bedingungsgleichungen für das orthogonale Flächensystem, welches einem ebenen System von Geraden und parallelen Trajectorien entspricht.

Die in Rede stehenden Bedingungen sind in § 5. Seite 253. 254. durch die Gl. (73) (74) ausgedrückt. Jeder Term derselben ist das Product einer Function H von u und einer Function A von v, wenn man w als constant betrachtet, so dass die Gleichungen die Form haben

$$\Sigma HA = 0$$

In dieser Form dargestellt lauten sie:

$$H + H_1\mu + H_2\mu_1 + H_3\pi + kA_3 + \frac{h^2}{2}A_2 + hA_1 + A = 0 \tag{120}$$

$$A_4 + hA_5 + \frac{h^2}{2}A_6 + \left(k - h\frac{\partial k}{\partial h}\right)A_7 + \left(k - \frac{h}{2}\frac{\partial k}{\partial h}\right)hA_8 + \frac{\partial k}{\partial h}A_9 - \frac{\partial k}{\partial w}\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = 0 \tag{121}$$

und zwar ist

$$H = \left(k - h\frac{\partial k}{\partial h} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right)\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial h\,\partial w} - h\frac{\partial k}{\partial w} - h\varkappa' \tag{122}$$

$$H_1 = \left(-\frac{\partial k}{\partial h} + h\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right)\frac{\partial h}{\partial w} + h\frac{\partial^2 k}{\partial h\,\partial w} - \frac{\partial k}{\partial w} - \varkappa'$$

$$H_2 = \frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{\partial^2 k}{\partial h \partial w}$$

$$H_3 = \frac{\partial h}{\partial w}$$

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \mu^2 + \frac{\partial \mu^2}{\partial \lambda^2}\right)$$

$$A = \mu A_1 - \mu_1 A_2 + \pi A_3 \qquad (123)$$

$$A_1 = \mu A_2 + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\frac{\partial A_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial \pi}{\partial \lambda}\beta' \cos\alpha - \frac{\partial \pi}{\partial w} - T\alpha' - S\beta' \sin\alpha$$

$$A_2 = S_1 \cos\lambda + T_1 \sin\lambda$$

$$A_3 = \alpha' \sin\lambda + \beta' \sin\alpha \cos\lambda + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\beta' \cos\alpha + \frac{\partial \mu}{\partial w}$$

$$A_4 = \pi A_7 - \mu_1 \frac{\partial \pi}{\partial \mu} A_8 + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}(A_1 - \varkappa') - \mu_1 \frac{\partial A_2}{\partial \lambda}$$

$$A_5 = \left(\pi - \mu \frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right) A_8 + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} A_2 - \mu \frac{\partial A_2}{\partial \lambda}$$

$$A_6 = -\frac{\partial \pi}{\partial \mu} A_8 - \frac{\partial A_2}{\partial \lambda}$$

$$A_7 = \left(\mu + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2}\right) A_8 + \frac{\partial A_3}{\partial \lambda}$$

$$A_8 = \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \beta' \cos\alpha$$

$$A_9 = \mu_1 A_8 - \mu A_7 + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} A_3$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$S = \int \frac{\partial \pi}{\partial \mu} \partial \cos\lambda; \qquad T = \int \frac{\partial \pi}{\partial \mu} \partial \sin\lambda$$

$$S_1 = \frac{\partial S}{\partial w} - \varkappa\beta' \sin\alpha + T\beta' \cos\alpha; \qquad T_1 = \frac{\partial T}{\partial w} - \varkappa\alpha' - S\beta' \cos\alpha$$

Dass μ mit λ variirt, also $\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}$ nicht constant null ist, ist Voraussetzung für das ebene Liniensystem. Ferner können wir jetzt den in § 6. behandelten Fall ausschliessen, wo k ganze Function höchstens 2. Grades von h ist. Setzt man also in Gl. (120) für u vier verschiedene Specialwerte, so ergeben sich für A, A_1, A_2, A_3 Ausdrücke linear in μ, μ_1 und π. Diese mögen sein:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= A+A_1\mu+A_2\mu_1+A_3\pi \\ \mathcal{A}_1 &= B+B_1\mu+B_2\mu_1+B_3\pi \\ \mathcal{A}_2 &= C+C_1\mu+C_2\mu_1+C_3\pi \\ \mathcal{A}_3 &= D+D_1\mu+D_2\mu_1+D_3\pi \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Nach deren Einsetzung geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned} &H+A+Bh+C\frac{h^2}{2}+Dk+\left(H_1+A_1+B_1h+C_1\frac{h^2}{2}+D_1k\right)\mu \\ &+\left(H_2+A_2+B_2h+C_2\frac{h^2}{2}+D_2k\right)\mu_1+\left(H_3+A_3+B_3h+C_3\frac{h^2}{2}+D_3k\right)\pi=0 \end{aligned} \tag{125}$$

Die eingeführten Coefficienten sind sämmtiich Functionen von w allein oder constant.

Die weitere Untersuchung teilt sich nun, je nachdem zwischen μ, μ_1 und π eine lineare Relation besteht oder nicht. Wir nehmen erst das letztere an.

9. Fall, wo zwischen μ, μ_1 und π keine lineare Relation besteht.

Hier kann Gl. (125) nur erfüllt werden durch

$$\left.\begin{aligned} H+A+Bh+C\frac{h^2}{2}+Dk &= 0 \\ H_1+A_1+B_1h+C_1\frac{h^2}{2}+D_1k &= 0 \\ H_2+A_2+B_2h+C_2\frac{h^2}{2}+D_2k &= 0 \\ H_3+A_3+B_3h+C_3\frac{h^2}{2}+D_3k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Nach Definition der H ist

$$H-H_1h+H_2\frac{h^2}{2}-H_3k=0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial h}-\frac{\partial H_2}{\partial h}h+\frac{\partial H_3}{\partial h}\frac{\partial k}{\partial h}=0$$

Eliminirt man die H mittelst der vorigen Gleichungen, so kommt:

$$D_3k^2-Mk=N; \qquad D_3\left(\frac{\partial k}{\partial h}\right)^2-\frac{\partial M}{\partial h}\frac{\partial k}{\partial h}=P \tag{127}$$

wo

$$M = D - A_3 - (D_1 + B_3)h + (D_2 - C_3)\frac{h^2}{2} \tag{128}$$

$$N = A + (B - A_1)h + (C - 2B_1 + A_2)\frac{h^2}{2} + (-C_1 + B_2)\frac{h^3}{2} + C_2\frac{h^4}{4}$$

$$P = B_1 + (C_1 - B_2)h - C_2\frac{h^2}{2}$$

und nach Auflösung beider Gleichungen, wofern D_3 nicht null:

$$k = \frac{M \pm \sqrt{R_4}}{2D_3}; \qquad \frac{\partial k}{\partial h} = \frac{\frac{\partial M}{\partial h} \pm \sqrt{R_2}}{2D_3}$$

woraus nach Elimination von k:

$$4R_2R_4 = \left(\frac{\partial R_4}{\partial h}\right)^2$$

Da R_2 2ten, R_4 4ten Grades ist, so ist einer der 3 verschiedenen Factoren doppelt in R_4 enthalten. Sei also

$$R_4 = R_1^2 R; \qquad R_2 = R_0^2 R$$

dann wird

$$\frac{2R_2}{R_0} = 2R_0R = \frac{1}{R_1}\frac{\partial R_4}{\partial h} = 2R\frac{\partial R_1}{\partial h} + R_1\frac{\partial R}{\partial h}$$

oder

$$2\left(R_0 - \frac{\partial R_1}{\partial h}\right)R = R_1\frac{\partial R}{\partial h}$$

folglich steckt R_1, wenn es nicht null ist, als Factor in R. In beiden Fällen ist k ganze Function 2. Grades gegen die Voraussetzung. Es bleibt daher nur möglich

$$D_3 = 0$$

Jetzt erhält man durch Elimination von k zwischen den Gl. (127):

$$M^2P - M\frac{\partial M}{\partial h}\frac{\partial N}{\partial h} + N\left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)^2 = 0 \tag{129}$$

Ist nun M weder null noch ein Quadrat, so ist es Factor von N, und, damit k nicht 2ten Grades sei, niedern als 2ten Grades. Sei also $N = ML$; dann wird die Gleichung:

$$P = \frac{\partial M}{\partial h}\frac{\partial L}{\partial h}; \qquad N = ML \tag{130}$$

Ist hier m der Coefficient von h in M, und l der Coefficient von h^3 in L, so werden die Coefficienten von h^2, h^4 bzhw. in P, N:

$$-\tfrac{1}{2}C_2 = 3lm; \qquad \tfrac{1}{4}C_2 = lm$$

also $lm = 0$, und, da l nicht null sein darf, $m = 0$, d. i. M constant, k ganze Function 3. Grades.

Wäre M ein Quadrat, so ergäbe sich nach Einsetzung in (129) sogleich, dass es Factor von N, mithin, weil es niedern als 2. Grades sein muss, constant wäre. Gl. (130) gäbe dann $P = 0$, also $C_2 = 0$, wie vorher. Wir haben daher nur die 2 Fälle: entweder ist k ganze Function 3. Grades, oder $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ und über k nichts entschieden.

10. Fall, wo k ganze Function 3. Grades ist.

Sei

$$k = w_0 + w_1 h + w_2 \frac{h^2}{2} + w_3 \frac{h^3}{2} \tag{131}$$

dann nehmen die Gl. (126) die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} H + A + Bh + C\dfrac{h^2}{2} + D\dfrac{h^3}{2} = 0 \\ H_1 + A_1 + B_1 h + C_1\dfrac{h^2}{2} + D_1\dfrac{h^3}{2} = 0 \\ H_2 + A_2 + B_2 h + C_2\dfrac{h^2}{2} + D_2\dfrac{h^3}{2} = 0 \\ H_3 + A_3 + B_3 h + C_3\dfrac{h^2}{2} = 0 \end{array}\right\} \tag{132}$$

Eliminirt man mittelst dieser Gleichungen die H aus den Gl. (122), so geben die einzeln verschwindenden Coefficienten der verschiedenen Potenzen von h:

$$A = A_3 w_0; \quad D = A_3 w_3$$
$$A_1 = B - A_3 w_1 - B_3 w_0; \quad B_1 = -B_3 w_1; \quad D_1 = -B_3 w_3$$
$$A_2 = -C + A_3 w_2 + C_3 w_0; \quad B_2 = C_1 + B_3 w_2 + C_3 w_1; \quad C_2 = C_3 w_2;$$
$$D_2 = C_3 w_3$$

Ferner ist nach Definition der H

$$-H_1 + H_2 h - H_3 \frac{\partial k}{\partial h} = \varkappa' + \frac{\partial k}{\partial w} \tag{133}$$

Nach Einsetzung der gefundenen Werte erhält man:

$$B = B_3 w_0 + \varkappa' + w_0'; \quad C = w_1'$$
$$C_1 = 3A_3 w_3 - w_2'; \quad B_3 = \frac{w_3'}{2w_3}; \quad C_3 = 0$$

Die Tabelle der Coefficienten lässt sich nun folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{array}{llll} A = A_3 w_0, & A_1 = A_0 - B_3 w_0, & A_2, & A_3 \\ B = A_0 + A_3 w_1, & B_1 = -B_3 w_1, & B_2, & B_3 \\ C = -A_2 + A_3 w_2, & C_1 = B_2 - B_3 w_2, & C_2 = 0, & C_3 = 0 \\ D = A_3 w_3, & D_1 = -B_3 w_3, & D_2 = 0, & D_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (134)$$

wo

$$\left.\begin{array}{ll} A_0 = \varkappa' + w_0' - A_3 w_1 + \dfrac{w_0 w_3'}{2w_3}; & A_2 = A_3 w_2 - w_1' \\ B_2 = 3A_3 w_3 - w_2' + \dfrac{w_2 w_3'}{2w_3}; & B_3 = \dfrac{w_3'}{2w_3} \end{array}\right\} \quad (135)$$

zu setzen ist. Führt man diese Coefficientenwerte in die 4 Gl. (132) ein, eliminirt mittelst derselben 4 Gleichungen und (131) k, H, H_1, H_2, H_3 aus der ersten Urgleichung, und erfüllt diese unabhängig von h, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{A} = A_0\mu + A_2\mu_1 + A_3\pi \\ \mathsf{A}_1 = A_0 + B_2\mu_1 + B_3\pi \\ \mathsf{A}_2 = -A_2 + B_2\mu \\ \mathsf{A}_3 = A_3 - B_3\mu \end{array}\right\} \quad (136)$$

Nach Einführung dieser Werte geben die 4 ersten Gl. (123):

$$0 = 0$$

$$T\alpha' + S\beta'\sin\alpha + A_0 + A_2\mu + B_2(1-\mu_1) + \frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha + \frac{\partial\pi}{\partial w} + B_3\pi = 0 \quad (137)$$

$$S_1\cos\lambda + T_1\sin\lambda + A_2 - B_2\mu = 0 \quad (138)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial w} + \alpha'\sin\lambda + \beta'\sin\alpha\cos\lambda + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha + B_3\mu - A_3 = 0 \quad (139)$$

Differentiirt man Gl. (138) nach λ, so kommt:

$$-S_1\sin\lambda + T_1\cos\lambda + \frac{\partial\pi}{\partial\mu}\beta'\cos\alpha - B_2\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} = 0 \quad (140)$$

Differentiirt man nochmals und addirt die primitive Gleichung, so findet man:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right)\beta'\cos\alpha + A_2 - B_2\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) = 0$$

Nehmen wir die zweite Urgleichung (121) hinzu, so wird deren linke Seite nach Einführung des Wertes (131) von k eine ganze Function 4. Grades von h, deren Coefficienten einzeln verschwinden müssen. Die 4 ersten tun dies von selbst, der Coefficient von h^4 giebt:

$$A_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial w} = \beta' \cos\alpha$$

Das Integral wollen wir schreiben:

$$\lambda = v_0 + \varrho \quad (\varrho = \int \cos\alpha \partial\beta) \tag{141}$$

Demgemäss lassen sich die Gl. (139) (140) folgendermassen ausdrücken:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial w}\right) + B_3\mu - A_3 + \alpha' \sin\lambda + \beta' \sin\alpha \cos\lambda = 0 \tag{142}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right) - B_2\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) + A_2 = 0 \tag{143}$$

wo bei Differentiation nach w nicht λ, sondern v als constant zu betrachten ist. Die Differentiation nach λ kann man als Differentiation nach v_0 betrachten, so dass sie sich unabhängig von w vollzieht. Addirt man so die Gl. (142) zu ihrer zweiten Ableitung, so erhält man, mit Beachtung des Wertes (135) von B_3:

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\left[\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right]\right) + \frac{w_3'}{2w_3}\left[\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right] = A_3 = \frac{w_4'}{\sqrt{w_3}}$$

und nach Integration:

$$\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2} = \frac{v_4 + w_4}{\sqrt{w_3}} \tag{144}$$

Hiervon hat das vollständige Integral die Form:

$$\mu = \frac{v_1 + w_4 + w_5 \cos v_0 + w_6 \sin v_0}{\sqrt{w_3}} \tag{145}$$

Dies in (142) eingeführt giebt:

$$w_5 = -\int \frac{\sqrt{w_3}\,\partial(\sin\alpha \sin\varrho)}{\cos\alpha}; \quad w_6 = -\int \frac{\sqrt{w_3}\,\partial(\sin\alpha \cos\varrho)}{\cos\alpha}$$

während v_1 willkürlich bleibt. Dagegen verlangt Gl. (144) die Relation:

$$v_4 = v_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial {v_0}^2}$$

Gl. (143) geht jetzt über in

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right) - B_2 \frac{v_4 + w_4}{\sqrt{w_3}} + A_2 = 0$$

oder, bei Anwendung der Werte (135):

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right) - v_4\left(3w_4 - \frac{w_2}{\sqrt{w_3}}\right)' - w_1' - 3w_4 w_4' + \left(\frac{w_2 w_4}{\sqrt{w_3}}\right)' = 0$$

und giebt nach Integration:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mu} = v_2 + \left(3w_4 - \frac{w_2}{\sqrt{w_3}}\right) v_4 + w_1 + \tfrac{3}{2} w_4^2 - \frac{w_2 w_4}{\sqrt{w_3}}$$

oder einfacher:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mu} = v_2 + w_1 - \tfrac{3}{2} w_4^2 + (3w_4 \sqrt{w_3} - w_2)\left(\mu + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2}\right)$$

Multiplicirt man mit

$$\frac{\partial \mu}{\partial v_0} \partial v_0 = \frac{1}{\sqrt{w_3}} (\partial v_1 - w_5 \sin v_0 \partial v_0 + w_6 \cos v_0 \partial v_0)$$

und integrirt, so kommt:

$$\pi = w_7 + (w_1 - \tfrac{3}{2} w_4^2)\mu + (3w_4 \sqrt{w_3} - w_2)\mu_1$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{w_3}} (\textstyle\int v_2 \partial v_1 + w_5 \int v_2 \partial \cos v_0 + w_6 \int v_2 \partial \sin v_0) \qquad (146)$$

Multiplicirt man statt dessen einzeln mit $\partial \cos \lambda$, $\partial \sin \lambda$ und integrirt, so erhält man:

$$S = S_0 + (w_1 - \tfrac{3}{2} w_4^2) \cos \lambda + (3w_4 \sqrt{w_3} - w_2)\left(\mu \cos \lambda - \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \sin \lambda\right)$$
$$+ \cos \varrho \textstyle\int v_2 \partial \cos v_0 - \sin \varrho \int v_2 \partial \sin v_0 \qquad (147)$$

$$T = T_0 + (w_1 - \tfrac{3}{2} w_4^2) \sin \lambda + (3w_4 \sqrt{w_3} - w_2)\left(\mu \sin \lambda + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \cos \lambda\right)$$
$$+ \sin \varrho \textstyle\int v_2 \partial \cos v_0 + \cos \varrho \int v_2 \partial \sin v_0$$

Diese Werte haben noch die Gl. (138) zu befriedigen, deren Ableitung nach v identisch erfüllt ist. Es geht daher nur eine Relation zwischen Functionen von w hervor, welche lautet:

$$T_0 \alpha' + S_0 \varrho' \operatorname{tg} \alpha + (\varkappa - w_2 + 3w_4 \sqrt{w_3})' + \frac{[(w_0 + w_7)\sqrt{w_3} - \frac{1}{2} w_4^3]'}{\sqrt{w_3}} = 0$$

Endlich bleibt noch h zu bestimmen. Zufolge der Werte (134) (135) reducirt sich die letzte Gl. (132) auf

$$\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{w_4'}{\sqrt{w_3}} + \frac{w_3'}{2w_3} h = 0$$

und giebt integrirt:

$$-\sqrt{w_3}\, h = u_3 + w_4 \qquad (148)$$

Hiermit sind alle Grössen bestimmt, und man kann leicht daraus die Lösung zusammensetzen.

11. Fall, wo k keine kubische Function von h ist.

Wenn unter der Bedingung von § 9. k keine kubische Function von h ist, so sind, wie sich zeigte, die 3 Grössen (128) unabhängig von h null, daher

$$\begin{array}{llll} A = 0; & A_1 = B; & A_2 = -C; & A_3 = D \\ & B_1 = 0; & B_2 = C_1; & B_3 = -D_1 \\ & & C_2 = 0; & C_3 = D_2 \\ & & & D_3 = 0 \end{array}$$

und man hat nach (126) und (124):

$$\begin{aligned} &H + Bh + C\frac{h^2}{2} + Dk = 0 \\ &H_1 + B + C_1\frac{h^2}{2} + D_1 k = 0 \\ &H_2 - C + C_1 h + D_2 k = 0 \\ &H_3 + D - D_1 h + D_2\frac{h^2}{2} = 0 \end{aligned} \tag{149}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= B\mu - C\mu_1 + D\pi \\ A_1 &= B + C_1\mu_1 - D_1\pi \\ A_2 &= C + C_1\mu + D_2\pi \\ A_3 &= D + D_1\mu + D_2\mu_1 \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Die 4te Gleichung enthält k nicht, die 3 ersten sind identisch und lassen sich durch (133) vertreten, welche lautet:

$$\frac{\partial k}{\partial w} + \varkappa' = B + Ch - C_1\frac{h^2}{2} + (D_1 - D_2 h)k + \left(D - D_1 h + D_2\frac{h^2}{2}\right)\frac{\partial k}{\partial h} \tag{151}$$

Sie hat, gleichwie (121), die Form:

$$\frac{\partial k}{\partial w} = Q_1 + \frac{\partial R_1}{\partial h}k - R_1\frac{\partial k}{\partial h}$$

also bleibt nach Subtraction wiederum die gleiche Form:

$$Q + \frac{\partial R}{\partial h}k - R\frac{\partial k}{\partial h} = 0 \tag{152}$$

Für einen Specialwert von v gehe Q, R über in Q_0, R_0, dann wird

$$k = R_0 k_0; \quad \frac{\partial k}{\partial h} = \frac{\partial R_0}{\partial h}k_0 + \frac{Q_0}{R_0}; \quad k_0 = \int\frac{Q_0\,\partial h}{R_0^{\,2}} \tag{153}$$

Dies eingeführt in (152) giebt:

$$Q - \frac{Q_0}{R_0} R + \left(R_0 \frac{\partial R}{\partial h} - R \frac{\partial R_0}{\partial h} \right) k_0 = 0$$

Im allgemeinen ist k_0 transscendent; dann verlangt die letzte Gleichung:

$$R = w_0 R_0; \quad Q = w_0 Q_0 \tag{154}$$

folglich sind Q und R unabhängig von v. Ist k_0 rational, so ist es im allgemeinen von der Form $\frac{L}{R_0}$, und L linear, also $k = L$ gleichfalls. Ausnahmen sind folgende:

1) Ist $R_0 = M^2$, M linear, so wird

$$k = w_1 M + w_2 + \frac{w_3}{M}; \quad w_3 \text{ nicht null},$$

und nach Einführung in (152)

$$Q + \frac{\partial R}{\partial h} \left(w_1 M + w_2 + \frac{w_3}{M} \right) - R \left(w_1 - \frac{w_3}{M^2} \right) \frac{\partial M}{\partial h} = 0$$

folglich M Factor von R, und wenn $R = PM$,

$$Q + \frac{\partial P}{\partial h} (w_1 M^2 + w_2 M + w_3) + P \left(w_2 + \frac{2w_3}{M} \right) \frac{\partial M}{\partial h} = 0$$

folglich M auch Factor von P, und man hat wieder die Gl. (154).

2) Ist R linear, so wird k Function 2. Grades.

3) Ist R unabhängig von h, so wird k kubische ganze Function davon.

Schliessen wir also die Fälle aus, wo k ganze Function höchstens 3. Grades ist, so sind stets Q und R unabhängig von v, also auch Q_1 und R_1, sowie deren je 3 Coefficienten. Man hat also:

$$\left. \begin{array}{lll} A_4 = Q \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}; & A_5 = Q_1 \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}; & A_6 = Q_2 \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \\ A_9 = R \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}; & A_7 = R_1 \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}; & A_8 = R_2 \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \end{array} \right\} \tag{155}$$

wo Q, R, etc. beliebige Functionen von w bezeichnen, und zwar gilt entweder Gl. (153), oder es ist — nämlich wenn (121) und (151) identisch sind —

$$\left. \begin{array}{lll} Q = B - \varkappa'; & Q_1 = C; & Q_2 = -C_1 \\ R = D; & R_1 = D_1; & R_2 = -D_2 \end{array} \right\} \tag{156}$$

Führt man die Werte (150) und (155) in (123) ein, so kommt:

$$0 = 0$$

$$T\alpha' + S\beta' \sin\alpha = -\frac{\partial\pi}{\partial w} + \left(D_2 \frac{\partial\mu}{\partial\lambda} - \beta'\cos\alpha\right)\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + (D_1 + D_2\mu)\pi$$
$$- B + C\mu + C_1(\mu_1 - 1) \qquad (157)$$

$$S_1 \cos\lambda + T_1 \sin\lambda = C + C_1\mu + D_2\pi \qquad (158)$$

$$\alpha' \sin\lambda + \beta' \sin\alpha\cos\lambda + \frac{\partial\mu}{\partial w} + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha = D + D_1\mu + D_2\mu_1 \qquad (159)$$

$$(R_1 - D_1)\pi\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} - (R_2 + D_2)\mu_1\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + (B - \varkappa' - Q)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} = 0$$

$$(R_2 + D_2)\left(\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\pi - \mu\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right) + (C - Q_1)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} = 0$$

$$(R_2 + D_2)\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + (Q_2 + C_1)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w} = R_2\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \beta'\cos\alpha \qquad (160)$$

$$\{D - R + (D_1 - R_1)\mu + (D_2 + R_2)\mu_1\}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} = 0 \qquad (161)$$

woraus nach Elimination von $\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}$

$$(R_1 - D_1)\pi + B - \varkappa' - Q + (C_1 + Q_2)\mu_1 = 0$$
$$(R_2 + D_2)\pi + C - Q_1 + (C_1 + Q_2)\mu = 0$$

Nach Voraussetzung von §. 9. lassen sich diese beiden Gleichungen nur erfüllen durch

$$Q = B - \varkappa'; \quad Q_1 = C; \quad Q_2 = -C_1$$
$$R_1 = D_1; \quad R_2 = -D_2$$

Dann aber bleibt von Gl. (152) nur übrig:

$$R = D$$

Hiernach gelten die Gl. (156) ohne Einschränkung; dies hat zunächst die Folge, dass die 2 Bestimmungen für k (121) und (151) unter allen Umständen identisch werden; (151) bildet die einzige Bestimmung. Ferner sind jetzt von den 9 aus (123) fliessenden Relationen die erste, 5te, 6te, 7te und 9te von selbst erfüllt, so dass zur Bestimmung von λ, μ, π allein (160) (159) (157) (158) übrig bleiben.

Doch auch (157) (158) sind, wenigstens in ihren Ableitungen identisch. Differentiirt man nämlich (158) zweimal nach λ, so kommt:

$$-S_1\sin\lambda+T_1\cos\lambda+\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\beta'\cos\alpha = C_1\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}+D_2\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}$$

$$-S_1\cos\lambda-T_1\sin\lambda+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right)\beta'\cos\alpha = C_1\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}+D_2\frac{\partial^2\pi}{\partial\lambda^2}$$

also nach Addition der primitiven Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right)\beta'\cos\alpha = C+C_1\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)+D_2\left(\pi+\frac{\partial^2\pi}{\partial\lambda^2}\right) \quad (162)$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man (157) und (159) einmal nach λ differentiirt und die Grösse $\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda$ eliminirt.

Die Gl. (160) (159) (162), welche jetzt λ, μ, π bestimmen, sind bereits in §. 6. als Gl. (85) (88) (90) vorgekommen, nur fehlten in (90) die beiden ersten Terme der rechten Seite von (162). Wir haben sie daselbst nur für den Fall $\alpha=\beta=0$ integrirt. Ein anderer Fall der Integrabilität, den wir hier betrachten wollen, ist $D_2=0$. Die Gleichungen werden

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w} = \beta'\cos\alpha \quad (163)$$

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial w}\right) = D+D_1\mu-\alpha'\sin\lambda-\beta'\sin\alpha\cos\lambda$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right) = C+C_1\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) \quad (164)$$

Verbindet man die zweite mit ihrer Ableitung

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right) = D_1\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}-\alpha'\cos\lambda+\beta'\sin\alpha\sin\lambda$$

so erhält man:

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\left[\mu+i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right]\right) = D+D_1\left[\mu+i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right]-(\beta'\sin\alpha+i\alpha')e^{-i\lambda} \quad (165)$$

Hier gelten zur Linken überall die unabhängigen Variabeln v, w, was die runden Klammern anzeigen sollen. Zur Vereinfachung sei

$$\partial w_0 = \cos\alpha\,\partial\beta;\quad D = w_1 w_2';\quad D_1 = \frac{w_1'}{w_1}$$

$$C = w_3' - w_2 w_4';\quad C_1 = \frac{w_4'}{w_1}$$

woraus:

$$\beta'\sin\alpha+i\alpha' = \frac{ie^{iw_0}}{\cos\alpha}(e^{-iw_0}\sin\alpha)'$$

dann giebt Gl. (163) integrirt:

$$\lambda = v_0 + w_0 \tag{166}$$

und die Gl. (165) (164) gehen über in

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\left[\mu + i\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\right]\right) = w_1 w_2' + \frac{w_1'}{w_1}\left[\mu + i\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\right] - \frac{ie^{-iw_0}}{\cos\alpha}(e^{-iw_0}\sin\alpha)'$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right) = w_3' - w_2 w_4' + \frac{w_4'}{w_1}\left(\mu + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2}\right) \tag{167}$$

Erstere giebt integrirt:

$$\mu + i\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = w_1\left\{v_1 + iV_1 + w_2 - ie^{-iv_0}\int\frac{\partial(e^{-iw_0}\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right\}$$

wovon der reelle Teil:

$$\mu = w_1\left\{v_1 + w_2 - \cos v_0\int\frac{\partial(\sin w_0 \sin\alpha)}{w_1\cos\alpha} - \sin v_0\int\frac{\partial(\cos w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right\} \tag{168}$$

Der Coefficient von i ist davon für

$$V_1 = \frac{\partial v_1}{\partial v_0}$$

nur die Ableitung. Dies in (167) eingeführt giebt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right) = w_3' + w_4'\left(v_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial v_0^2}\right)$$

und nach Integration bei constantem v:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mu} = v_2 + w_3 + w_4\left(v_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial v_0^2}\right)$$

Multiplicirt man mit

$$\frac{\partial \mu}{\partial v}\partial v = w_1\left\{\partial v_1 - \partial\cos v_0\int\frac{\partial(\sin w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha} - \partial\sin v_0\int\frac{\partial(\sin w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right\}$$

und integrirt bei constantem w, so kommt:

$$\pi = w_1\left\{w_5 + w_3 v_1 + \tfrac{1}{2}w_4\left(v_1^2 + \frac{v_1'^2}{v_0'^2}\right) + \int v_2\,\partial v_1 \right. \tag{169}$$

$$- \left[w_3\cos v_0 + \int v_2\,\partial\cos v_0 + w_4\left(v_1\cos v_0 - \frac{v_1'}{v_0'}\sin v_0\right)\right]\int\frac{\partial(\sin w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}$$

$$\left. - \left[w_3\sin v_0 + \int v_2\,\partial\sin v_0 + w_4\left(v_1\sin v_0 + \frac{v_1'}{v_0'}\cos v_0\right)\right]\int\frac{\partial(\cos w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right\}$$

Multiplicirt man statt dessen mit $\partial\cos(v_0+w_0)$, $\partial\sin(v_0+w_0)$ und integrirt ebenso, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} S &= S_0+(w_3+w_4v_1)\cos(v_0+w_0)-w_4\frac{v_1'}{v_0'}\sin(v_0+w_0)\\ &\quad+\cos w_0\int v_2\partial\cos v_0-\sin w_0\int v_2\partial\sin v_0\\ T &= T_0+(w_3+w_4v_1)\sin(v_0+w_0)+w_4\frac{v_1'}{v_0'}\cos(v_0+w_0)\\ &\quad+\sin w_0\int v_2\partial\cos v_0+\cos w_0\int v_2\partial\sin v_0 \end{aligned}\right\} \quad (170)$$

Die hier eingeführten Functionen von w, d. i. S_0 und T_0 haben jedoch noch der Gl. (157) zu genügen, welche nach Einsetzung der Werte von S und T giebt:

$$T_0\alpha'+S_0w_0'\operatorname{tg}\alpha+B+w_1(w_5'+w_3w_2')+\frac{1+w_1^2w_2^2}{2w_1}w_4'=0 \quad (171)$$

Die Einsetzung derselben Werte in (158) liefert noch folgende 2 Gleichungen, die hier durch Identificirung der Coefficienten von $\cos v_0$ und $\sin v_0$ erhalten werden, Coefficienten die bei Deduction von (162) aus (158) eliminirt worden sind:

$$\left.\begin{aligned} &S_0'+(T_0-\varkappa\operatorname{tg}\alpha)w_0'+w_4'\left\{\cos w_0\int\frac{\partial(\sin w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right.\\ &\qquad\left.-\sin w_0\int\frac{\partial(\cos w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right\}=0\\ &T_0'-S_0w_0'-\varkappa\alpha'+w_4'\left\{\sin w_0\int\frac{\partial(\sin w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right.\\ &\qquad\left.+\cos w_0\int\frac{\partial(\cos w_0\sin\alpha)}{w_1\cos\alpha}\right\}=0 \end{aligned}\right\} \quad (172)$$

Eliminirt man T_0, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2S_0}{\partial w_0^2}+S_0 &= \frac{\partial}{\partial w_0}\left(\frac{\varkappa}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha-\frac{\partial w_4}{\partial w_0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{w_1}\\ &\quad-\frac{1}{\cos w_0}\frac{\partial}{\partial w_0}\left(\frac{w_4'\cos^2w_0}{w_0'}\right)\int\frac{\partial(\sin\alpha\sin w_0)}{w_1\cos\alpha}\\ &\quad-\frac{1}{\sin w_0}\frac{\partial}{\partial w_0}\left(\frac{w_4'\sin^2w_0}{w_0'}\right)\int\frac{\partial(\sin\alpha\cos w_0)}{w_1\cos\alpha} \end{aligned}$$

und nach Integration:

$$\begin{aligned} S_0 &= -\sin w_0\left\{\int\left(\varkappa+\frac{w_4}{w_1}\right)\frac{\partial(\sin\alpha\cos w_0)}{\cos\alpha}-w_4\int\frac{\partial(\sin\alpha\cos w_0)}{w_1\cos\alpha}\right\}\\ &\quad+\cos w_0\left\{\int\left(\varkappa+\frac{w_4}{w_1}\right)\frac{\partial(\sin\alpha\sin w_0)}{\cos\alpha}-w_4\int\frac{\partial(\sin\alpha\sin w_0)}{w_1\cos\alpha}\right\} \end{aligned}$$

woraus nach der ersten Gl. (172):

$$
\begin{aligned}
z_0 = \cos w_0 & \left\{ \int \left(\varkappa + \frac{w_4}{w_1} \right) \frac{\partial(\sin\alpha\cos w_0)}{\cos\alpha} - w_4 \int \frac{\partial(\sin\alpha\cos w_0)}{w_1\cos\alpha} \right\} \\
+ \sin w_0 & \left\{ \int \left(\varkappa + \frac{w_4}{w_1} \right) \frac{\partial(\sin\alpha\sin w_0)}{\cos\alpha} - w_4 \int \frac{\partial(\sin\alpha\sin w_0)}{w_1\cos\alpha} \right\}
\end{aligned}
$$

Diese Werte müssen wiederum der Gl. (171) genügen. Nach Einführung erhält man:

$$
\begin{aligned}
& B + w_1(w_5' + w_3 w_2') + \frac{1 + w_1^2 w_2^2}{2w_1} w_4' \\
& + \frac{(\sin\alpha\cos w_0)'}{\cos\alpha} \left\{ \int \left(\varkappa + \frac{w_4}{w_1} \right) \frac{\partial(\sin\alpha\cos w_0)}{\cos\alpha} - w_4 \int \frac{\partial(\sin\alpha\cos w_0)}{w_1\cos\alpha} \right\} \\
& + \frac{(\sin\alpha\sin w_0)'}{\cos\alpha} \left\{ \int \left(\varkappa + \frac{w_4}{w_1} \right) \frac{\partial(\sin\alpha\sin w_0)}{\cos\alpha} - w_4 \int \frac{\partial(\sin\alpha\sin w_0)}{w_1\cos\alpha} \right\} = 0
\end{aligned}
$$

Die Functionen h und k von (u, w) werden bestimmt durch die Gl. (149) und (151), welche 2 Integrationswege darbieten, die allgemein zum Ziele führen. Zunächst giebt Gl. (149), d. i.

$$\frac{\partial h}{\partial w} + D - D_1 h + D_2 \frac{h^2}{2} = 0$$

das Integral

$$h = \sigma + \frac{\tau}{u_1 + \varrho} \tag{173}$$

wo σ eine von u unabhängige Speciallösung bezeichnet, die sich als willkürliche Function von w betrachten lässt, indem man die Gleichung

$$\sigma' + D - D_1 \sigma + D_2 \frac{\sigma^2}{2} = 0$$

durch einen der Coefficienten erfüllt, wo ferner

$$\tau = e^{\int (D_1 - D_2 \sigma) \partial w}; \qquad \varrho = \tfrac{1}{2} \int D_2 \tau \partial w \tag{174}$$

und u_1 eine willkürliche Function von u ist.

Man kann nun erstlich Gl. (151) nach gewöhnlichem Verfahren mittelst der simultanen Gleichungen

$$\partial w = - \frac{\partial h}{D - D_1 h + D_2 \frac{h^2}{2}} = \frac{\partial k}{B - \varkappa' + Ch - C_1 \frac{h^2}{2} + (D_1 - D_2 h) k}$$

integriren. Benutzt man die bereits vollzogene Integration der ersten, und beachtet, dass vermöge (174)

$$e^{\int(D_1-D_2h)\partial w}=\frac{\tau}{(u_1+\varrho)^2}$$

ist, wo u_1 anfänglich nur Constante der Integration, bei Anwendung der Integrale auf die partielle Differentialgleichung in den für (173) gültigen Wert übergeht, so erhält man:

$$k=\frac{\tau}{(u_1+\varrho)^2}\left\{u_2+\int\left(B-\varkappa'+Ch-C_1\frac{h^2}{2}\right)\frac{(u_1+\varrho)^2}{\tau}\partial w\right\}$$

das ist entwickelt:

$$k=\frac{u_2+W+W_1u_1+W_2u_1^2}{(u_1+\varrho)^2}\tau \tag{175}$$

wo

$$W=\int\left\{\left(B-\varkappa'+C\sigma-C_1\frac{\sigma^2}{2}\right)\varrho^2+(C-C_1\sigma)\varrho\tau-\tfrac{1}{2}C_1\tau^2\right\}\frac{\partial w}{\tau}$$

$$W_1=\int\left\{\frac{2(B-\varkappa'+C\sigma)-C_1\sigma^2}{\tau}\varrho+C-C_1\sigma\right\}\partial w$$

$$W_2=\int\left(B-\varkappa'+C\sigma-C_1\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial w}{\tau}$$

und u_2 eine zweite willkürliche Function von u ist.

Statt dessen kann man auch gleich anfangs auf die Unabhängigen u, w übergehen, indem man Gl. (151) schreibt:

$$\left(\frac{\partial k}{\partial w}\right)=B-\varkappa'+Ch-C_1\frac{h^2}{2}+(D_1-D_2h)k$$

Um h zu eliminiren, setze man erst:

$$k=k_1+E+Fh+G\frac{h^2}{2}$$

und lasse den von k_1 unabhängigen Teil sich unabhängig von h auf beiden Seiten heben, so dass nur bleibt:

$$\left(\frac{\partial k_1}{\partial w}\right)=(D_1-D_2h)k_1$$

Hierzu haben E, F, G die 3 linearen Gleichungen zu erfüllen:

$$\left.\begin{aligned}E'-D_1E-FD&=B'-\varkappa'\\F'-GD+ED_2&=C\\G'+D_1G+FD_2&=-C_1\end{aligned}\right\}\tag{176}$$

Ist, wie oben,

$$D_2 = 0; \quad D_1 = \frac{w_1'}{w_1}$$

so hat man unmittelbar:

$$k_1 = u_2 w_1$$

$$k = u_2 w_1 + E + Fh + G\frac{h^2}{2}$$

und die Coefficienten ergeben successive die Werte:

$$G = -\frac{1}{w_1}\int C_1 w_1 \partial w; \quad F = \int (C + GD)\partial w; \quad E = w_1 \int \frac{B - \varkappa' + FD}{w_1}\partial w$$

Andernfalls gelangt man durch die neue Substitution

$$k_1 = \left(M + Nh + P\frac{h^2}{2}\right)k_2$$

zu derselben Gleichungsform, deren Auflösung dann $k_2 = u_2 f(w)$ ist. Setzen wir deshalb sogleich $k_2 = u_2$; dann ergiebt die Einführung:

$$\left.\begin{array}{l} M' - D_1 M - DN = 0 \\ N' - DP + D_2 M = 0 \\ P' + D_1 P + D_2 N = 0 \end{array}\right\} \qquad (177)$$

woraus:

$$NN' - PM' - MP' = 0$$

und nach Integration:

$$N^2 = 2MP + c \qquad (178)$$

Eliminirt man M und P zwischen den Gl. (177), so erhält man eine lineare Gleichung 3. Ordnung für N. Da es sich hiernach nur um Ermittelung von Speciallösungen handelt, so können wir $c = 0$ setzen, und Gl. (178) durch

$$M = \nu w_1 N; \qquad N = 2\nu w_1 P \qquad (179)$$

erfüllen, wo, wie oben $D_1 = \frac{w_1'}{w_1}$ gesetzt ist. Dann gehen die ersten beiden Gl. (177) über in

$$\frac{N'}{N} = \frac{D}{w_1 \nu} - \frac{\nu'}{\nu} = \frac{D}{2 w_1 \nu} - D_2 w_1 \nu \qquad (180)$$

woraus:

$$w_1 \nu' = \tfrac{1}{2}D + D_2 w_1^2 \nu^2 \qquad (181)$$

Betrachtet man hier ν als willkürliche Function von w, und erfüllt

die Gleichung durch D oder D_2, so ergiebt sich N aus (180), und M, P aus (179). Diese Specialwerte lassen sich verallgemeinern, indem man Gl. (181) auf Grund des Specialwerts v vollständig integrirt. Hat man dann 3 Lösungen N_1, N_2, N_3, so folgt nicht nur

$$N = c_1 N_1 + c_2 N_2 + c_3 N_3$$

für constante c, sondern auch

$$F = W_1 N_1 + W_2 N_2 + W_3 N_3$$

für Coefficienten W, welche den rechten Seiten von (176) entsprechen, da die linken ganz mit (177) übereinstimmen, und hieraus E und G.

V.

Miscellen.

1.

Bemerkung zu dem Beweise einer bekannten Formel für den Inhalt des Tetraeders N. V. Seite 17. im vorigen Teile.

Der citirte Beweis geht wohl am einfachsten mit Hilfe des von Wittstein in einer Brochüre über das Prismatoid gebrauchten Satzes:

„Der Inhalt eines Tetraeders ist gleich dem doppelten mittleren Querschnitt D, multiplicirt mit $\frac{1}{3}$ des Abstandes h der diesem Querschnitt parallelen Gegenkanten; also $Q = \frac{2}{3} h . D$.“ Nun ist D (als Parallelogramm) $= \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin\alpha$ daher:

$$Q = \frac{abh}{6} \sin\alpha.$$

Stuttgart den 9. März 1874. Prof. Oelschläger.

2.

Beweis desselben Satzes.

Das Tetraeder heisse $A'ABC$. Sein Inhalt ist der dritte Teil des Prismas $ABCA'B'C'$, welches man erhält, indem man die zweite Grundfläche durch A' parallel ABC legt; und dieses Prismas ist wieder die Hälfte des Parallelepipeds, welches entsteht, wenn man durch AA' und BB' die Ebenen parallel zu $BCB'C'$ und $AA'CC'$ construirt. Der Inhalt dieses Parallelepipeds ist das Product aus der Fläche $BCB'C'$ mit der Entfernung dieser Ebene von der Kante AA'.

selbst und fügt am Schlusse einen Beweis von Klein hinzu, der an Kürze und Eleganz nichts zu wünschen übrig lässt. Doch jener Erfolg ist erklärtermassen nicht die Hauptsache. Es handet sich vielmehr um die Frage: Ist die Schlussweise, welche an dem vorliegenden Beispiel vorgeführt werden soll, richtig? Was das Wesen derselben sei, findet sich nicht ausgesprochen; die vorkommenden Schlüsse, soweit sie eigentümlich sind, sind unrichtig und haltlos. Der Verfasser selbst zweifelt, wie er sagt, an ihrer Bündigkeit, ohne sie doch zu verwerfen. Der Zweifel aber allein ist hier schon entscheidend: was einen Zweifel zulässt, ist eben nicht evident.

Es wäre nun nicht zu verstehen, was den Verfasser bewogen hätte, im Besitz einer ganz einfachen Deduction diesen äusserst complicirten Weg zu wählen, wenn er nicht einen allgemeinern Gesichtspunkt verfolgt hätte. Dieser giebt sich schon wiederholt in N. V. dadurch zu erkennen, dass gewisse vorgängige Limitationen der Gesuchten, welche den Schlüssen eine Basis gegeben haben würden, darin beharrlich verschmäht werden; offener tritt er zu Tage in der Abhandlung N. VI. über das Hauber'sche Princip; was aber besonders die Aufmerksamkeit darauf lenkt, ist eine Verwandtschaft der Richtung mit derjenigen, welcher überhaupt in neuster Zeit von mehreren Seiten zugestrebt wird, und die sich auch in den Bearbeitungen der Theorie eines Raumes von n Dimensionen, von Betti, Lie u. A. kund giebt; denn auch hier wird die allgemeinste Limitation, die Voraussetzung, dass eine bestimmte $n$te Mannichfaltigkeit eine lineare ist, worauf doch alle Bestimmungen basiren, beharrlich verschwiegen. Während letztere die Unabhängigkeit der Raumtheorie von den erfahrungsmässig gewonnenen räumlichen Anschauungen darzustellen suchen, dabei aber noch stets innerhalb des Gebiets der mathematischen Begriffe bleiben, überschreitet Günther diese Grenze, indem er ein von den mathematischen Objecten unabhängiges, allgemeineres und auf die Mathematik anwendbares Schlussvermögen aufsucht, zu diesem Zwecke jedoch vorläufig nur einige Beispiele der Existenz aufweisen will. Die an eine solche Idee geknüpften Hoffnungen beruhen auf dem aus dem Altertum vererbten, bis heute nicht überwundenen Irrtum, dass der Grund der mathematischen Evidenz in der Form liege. Vielleicht wird die neue Anregung in den vorliegenden Arbeiten die Aufklärung beschleunigen helfen, weshalb ich der Verfolgung des aussichtslosen Zieles allen gewünschten Spielraum gewähren wollte. Es hat bisher den herrschenden Tendenzen der Philosophie zu sehr widerstrebt, die eigentlich sehr nahe liegende Quelle der mathematischen Evidenz näher anzusehen. Zu verfehlen ist sie nicht, wenn man sich entschliesst, gewisse Vorurteile aufzugeben. Unausweichliche Schlüsse können wir ziehen, soweit wir den

gesammten möglichen unterschiedlichen Inhalt unserer Begriffe in Gedanken zu durchlaufen vermögen; denn allein dadurch sind wir im Stande, ausschliessende Gegensätze positiven Inhalts zu bilden. Diese Bedingung erfüllen die Begriffe der Grösse, des Raumes und der Zeit, aber nicht der Begriff der Qualität, welcher für unbegrenzt vieles unbekannte offen bleibt. In den Objecten der Mathematik liegt also der Grund ihrer zwingenden Evidenz. Lässt man die Objecte unbestimmt, oder gestattet man ihnen auf unbekannte Weise zu variiren, so hört die Evidenz auf, wenn gleich die Zustimmung dann, eben weil die Möglichkeit des Andersseins der Einsicht entzogen ist, nur um so bereitwilliger erteilt zu werden pflegt. Nur im Gebrauch des positiv Gedachten, nicht des durch Bedingungen negativ Umgrenzten giebt es ein exactes Schlussvermögen. Meiner Behauptung steht die gesammte pädagogische Erfahrung zur Seite; denn kein Schüler lernt anders als an mathematischen Objecten mathematische Schlüsse mit zwingender Evidenz machen. Die Entscheidung ist Sache der Gegner, da sie bloss ein Beispiel des Gegenteils anzuführen brauchen. Von denjenigen Beispielen, welche Günther vorführt, räumt er selbst ein, dass sie den Erfolg nicht dartun. Auch den Fehlgriff Hauber's, dass er das mathematische Urteil als Prädicirung betrachtet, was doch im wesentlichsten Falle, bei der Grössenrelation, offenbar nicht zutrifft, erkennt er insofern an, als er den Hauberschen Satz für verbesserungsbedürftig erklärt und auf die Grössenrelation hinüberzuleiten sucht. Dies bestätigt nur, dass die strenge Gültigkeit erst mit der Bezugnahme auf mathematische Objecte beginnt. Mag man also die Chimäre solange verfolgen als man will; nur ist zu wünschen, dass man auch einen Blick frei behält für diejenigen Beobachtungen, welche mit der lange gehegten, und doch durch nichts bewährten Ansicht von der formellen Natur der Beweiskraft nicht stimmen.

R. Hoppe.

4.

Bemerkung zu N. XXX. 3. im vorigen Teile.

In meiner Bemerkung zu Herrn Ligowski's Kreisberechnungsformel befindet sich ein kleiner Fehler. Auf das Resultat der Rechnung hat aber dieses Versehen keinen Einfluss. Es steht nämlich dort

$$2^{m-1}\sin\frac{\pi}{2^m} = \tfrac{1}{2}.\sin\frac{(\pi.\tfrac{1}{2}^{m-1})}{\tfrac{1}{2}^{m-1}}$$

Statt der richtigen Formel

$$2^{m-1}\sin\frac{\pi}{2^m} = \tfrac{1}{2}.\sin\frac{(\pi.\tfrac{1}{2}^{m})}{\tfrac{1}{2}^{m}}$$

wo die Grenzen der rechten Seiten in beiden Formeln (für $m = \infty$) dieselben sind. Ich bemerke noch, dass die Formel

$$\frac{\pi}{2} = \prod_0^\infty \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{2+\lambda}}}$$

einen besonderen Fall der allgemeineren leicht zu erhaltenden Formel

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \prod_0^\infty \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^{1+\lambda}}}\,.$$

darstellt, die Herr **Ludwig Seidel** im 75. Bande des Crelle'schen Journals S. 273 gegeben hat. Nach dessen Bemerkung ist die Convergenz dieses Productes für π ohne Vergleich rascher als die des bekannten **Wallis**'schen Productes.

Warschau, den 31. Juli 1874. S. **Dickstein.**

Litterarischer Bericht
CCXXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VI. Indici degli articoli e dei nomi. 1873. — Tomo VII. 1874. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Das Februarheft beendigt die Abhandlung von Quercia über Rankine's Leben und wissenschaftliche Arbeiten. Es folgt ein Publicationsverzeichniss. — Das Märzheft enthält Nachrichten über einige ältere Mathematiker in den Niederlanden, welche die Quadratur des Kreises gesucht haben, von D. Bierens de Haan. Dann einen Brief von Eugène Catalan, Professor an der Universität Lüttich, an D. B. Boncompagni über eine Inschrift auf dem Grabe Ludolf's Van Ceulen. — Das Aprilheft enthält einen Aufsatz von Th. H. Martin über des Proklus Diadochus Commentar zum 1. Buch von Euklid's Elementen, bearbeitet von G. Friedlein. Leipzig 1873. Teubner. Dann fernere Nachrichten über denselben von B. Boncompagni. Dann neue Publicationen.

Nachträglich zum Augustheft des 6. Bandes (Litt. Ber. CCXXIII.):

Durch die Güte des Herrn M. Curtze erhalte ich nachstehende Verbesserungen einiger kleinen Lese- und Druckfehler, welche sich in meiner Abhandlung „Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell' antichità e nel medio evo“ eingeschlichen haben. Es sind die folgenden:

1) S. 332. S. 22 soll es heissen IN Elementa etc.
2) S. 333. S. 14 „ „ „ Duc per precedentem cf. equidistantem *ba*
3) S. 333. Z. 15 „ „ „ per secundam 29ne concludes primum et deinde per hanc et 13am argue secundum.
4) S. 333. Z. 19 „ „ „ penthagonus et rursus breviter quotus est numerus angulorum.
5) S. 333. Z. 21 „ „ „ quovis ejus angulorum.
6) S. 334. Z. 1 „ „ „ omnes anguli.
7) S. 334. Z. 7 „ „ „ duplicatus et (dies scheinbar durchstrichen) sed et per 13am anguli omnes.
8) S. 334. Z. 8 „ „ „ equales sunt.
9) S. 334. Z. 10 „ „ „ duo, ebenso S. 333, Z. 14 und 16.
10) S. 334. Z. 11 „ „ „ duobus.
11) S. 333. Z. 14 ist cujus doppelt gelesen.

Durch einen Druckfehler heisst es, die Abweichung beginne in Buch 2, während es 3 heissen soll.

Die in der Abhandlung „über sphärische Curven" gegebene Uebertragung gewisser planimetrischer Sätze auf die Kugelfläche findet sich bereits in Hesse's Raumgeometrie, jedoch in einer wesentlich anderen Darstellung.

S. Günther.

Geschichtliche Notizen über das Dirichletsche Kugel- und Ellipsoid-Problem. Von C. A. Bjerknes. Aus den Nachrichten v. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. u. d. G. A. Univ. zu Göttingen. 1873. No. 17.

Das hier bezeichnete Problem betrifft die Bewegung einer Kugel, bzhw. eines Ellipsoids in einer unelastischen und unbegrenzten Flüssigkeit, ist im Jahr 1852 in Bezug auf beide Körper von Dirichlet gelöst, wiewol die Lösung nur in Betreff der Kugel publicirt worden. Sie geht von der Bewegung der Flüssigkeit bei ruhendem Körper aus. Nach seinen Andeutungen hat 1854 Clebsch eine Lösung für das Ellipsoid gefunden, welche direct die Bewegung des Körpers ermittelt, und 1856 in Crelle's Journal erschien. Auf dem ursprünglichen Wege löste auch Schering nach Andeutungen das Problem, und machte dem Verfasser davon Mitteilung, welcher hier dessen Lösung zum erstenmal an die Oeffentlichkeit bringt. Diese Notizen schickt der Verfasser eigenen Untersuchungen voraus, welche Verallgemei-

nerung des Problems zum Gegenstand haben, und in den Göttinger Nachrichten 1873. S. 448. und S. 829. und 1874. S. 285. zu finden sind.

H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der elementaren Geometrie für den Schulgebrauch bearbeitet von Carl Kieseritzky, Oberlehrer an der St. Annenschule zu St. Petersburg. Zweiter Band: Stereometrie. Mit 142 Holzschnitten. St. Petersburg 1874. August Deubner. 75 S.

Der erste Band ist im 223. litterarischen Bericht, Seite 28. besprochen. Der vorliegende zweite handelt von der Lage der Graden gegen Ebenen und gegen einander, von der Lage der Ebenen gegen Ebenen, von den Ecken, von der Kugel, von den Polyedern, von der Berechnung der Körper. Er zeichnet sich durch dieselbe Kürze des Ausdrucks und der Deductionen aus, die jedoch hier sehr wol an ihrer Stelle und nicht durch Mangel an Bestimmtheit erkauft ist. Im Gegenteil betätigt er eine grosse Sicherheit und ist mit besonderm Fleiss dazu bearbeitet in keinem Stücke mehr oder weniger, als zur Bündigkeit notwendig ist, zu sagen. Zu rügen ist indes die falsche und ohne alle Erklärung gelassene Behauptung, der Cylinder sei ein Prisma, der Kegel eine Pyramide von unendlich vielen Seiten; ausserdem das wiederkehrende und daher wol nicht als Druckfehler anzusehende monströse Wort „Parallelopiped". H.

Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und niederen Analysis. Von Prof. Dr. O. Hermes. Berlin 1874. Max Winckelmann. 184 S.

Diese Sammlung ist für den Unterricht an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule in Berlin bearbeitet und schliesst sich dem für den Gebrauch bei den Vorträgen an dieser Anstalt bestimmten „Lehrbuch der Arithmetik von Aschenborn" an. Wenn der Verfasser hinzufügt, dass sie auch für den Unterricht in den obern Classen eines Gymnasiums oder einer Realschule zu verwerten sei, so ist freilich unbestritten, dass sich viele Aufgaben daraus entnehmen lassen; die gesammte Abfassung entspricht jedoch augenscheinlich nicht diesem Zwecke. Vielmehr ist der genannte Anschluss in dem engen Sinne zu nehmen, dass das Verständniss der Zeichen und Ausdrücke, die Fähigkeit die Aufgaben zu lösen ganz durch die bestimmte Art und Weise des Vortrags bedingt ist, und diese weicht in der Tat doch zu sehr von der für die Gymnasialbildung geeigneten ab. Die Aufgaben sind reine Beispiele fertig erlernter Operationen,

nicht darauf berechnet, das Nachdenken des Schülers in Anspruch zu nehmen, und durch methodische Anordnung mit successivem Aufsteigen vom Leichtern zum Schwerern Fortschritte in der Auffassung bei der Uebung selbst zu erzielen. Diejenigen, welche zu den mancherlei Disciplinen der sogenannten niedern Analysis gehören, sind meist zu schwierig, als dass ein Schüler die Lösung finden könnte; es lässt sich nur voraussetzen, dass im Vortrag die Lösung allgemein gezeigt ist, und hier am Beispiel nachgeahmt werden soll. Ein solches Verfahren mag den meisten Praktikern genügend scheinen; zum Zweck wissenschaftlicher Ausbildung sind jene vielen Zweige aus einheitlichen Principien abzuleiten, und dann lassen sich die Uebungsaufgaben so stellen, dass jede durch eigenes Nachdenken lösbar ist. — Am Schluss sind die Resultate aller Aufgaben aufgeführt. H.

Tafel vierstelliger Logarithmen. Bearbeitet von Dr. C. Bremiker. Berlin 1874. Weidmann. 60 S.

Das Buch enthält die Logarithmen der Zahlen bis 2000, die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Bogen, die Logarithmen der 4 trigonometrischen Functionen, und zwar bis 8 Grad durch die Hundertelgrad, von da durch die Zehntel, dann die Reduction der Grade auf Tagesteile, die Logarithmen der Summen und Differenzen, die Subtractionslogarithmen, die Sinus und Tangenten, die Quadrate der Zahlen, die Antilogarithmen, schliesslich einige Constantenwerte nebst ihren 6- bis 8stelligen Logarithmen, unter denen die Schwerkraft nicht hätte fehlen sollen. Die Zeilenordnung ist wie in den übrigen Tafeln von Bremiker (s. d. 217. litt. Ber. S. 4.). Die Hauptanwendung vierstelliger Logarithmen schreibt der Verfasser der Feldmessung zu. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Neue Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen. Von Simon Spitzer. Wien 1874. Carl Gerold's Sohn. 142 S.

Die vorliegende Schrift bildet die Fortsetzung der in den Jahren 1860, 1861, 1862 veröffentlichten „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen", und giebt in geordneter Zusammenstellung die zum grössten Teil aus Grunert's Archiv und Schlömilch's Zeitschrift bereits bekannten ferneren Arbeiten des Verfassers in dem gleichen Gebiete während der folgenden 12 Jahre. Mit der Zusammenstellung ist er, wie sich wol annehmen lässt, einem

natürlichen Wunsche der Leser entgegengekommen. Alle jene Arbeiten sind Teile der Untersuchung eines Themas, der Integration der Gleichungen von der Form

$$\Sigma\Sigma a_{k,h} x^k \frac{\partial^h y}{\partial x^h} = 0$$

und bilden nun zusammen ein Buch, welches Studirenden Gelegenheit bietet Methoden der Integration an Beispielen kennen zu lernen und durch Fortsetzung der Untersuchung, die keineswegs immer ihren Abschluss erreicht, an denselben Beispielen weiter zu üben. Hierzu eignet es sich durch die Leichtfasslichkeit der Darstellung und die fast gleichmässige Inanspruchnahme der Kräfte und Kenntnisse, wie sie Anfängern wol besonders zusagen wird. Mit dem Titel „Studien" ist zutreffend ausgesprochen, dass der Verfasser sich die freie Wahl vorbehält, wie weit er jede Untersuchung führen will. Im allgemeinen sind zwar die Lösungen (soweit es sich nicht um blosse Reductionen oder Abhängigkeiten der Gleichungen handelt) vollständig. Um die Bedeutung der Resultate hingegen, ihre Identität oder Unabhängigkeit, bekümmert sich die Schrift nicht. Dies konnte sie in der Tat dem Leser überlassen. Anders aber verhält es sich z. B. bei der Integration der Gleichung (185) S. 108., welche mit einer Lösung schliesst, die nur gilt, wenn 2 Constanten A, B positiv ausfallen. Nachdem (bald nach dem Erscheinen des Aufsatzes in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 8. S 123.) in Bd. 9. S. 56. gezeigt war, dass durch Beachtung eines Umstandes die vollständige Lösung, nicht nur für jedes A und B, sondern auch mit dem zweiten Integral unter gleicher Form, sich ohne Abänderung der Methode herbeiführen lässt, so war es doch wol nicht angemessen, hier noch einmal die unvollständige Lösung zu bringen. Umgekehrt wird bei Behandlung der ersten Gleichung die Lösung als specieller Fall bezeichnet, während doch an Allgemeinheit nichts fehlt. Die Frage darüber wird gar nicht untersucht. Die Haupteinteilung des Buches geschieht nach den Methoden, an welche sich das Ganze im besten Zusammenhange anschliesst. H.

Mechanik.

Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten, unendlichen Flüssigkeit. Von C. A. Bjerknes. Göttinger Nachrichten 1873. S. 448—460.

Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden, unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Elli-

psoids hervorbringt. Von C. A. Bjerknes. Göttinger Nachrichten 1873. S. 829—867. und 1874. S. 285—316.

Die Verallgemeinerung besteht in der Ausdehnung der bereits bekannten Rechnung von 3 auf beliebig viele Dimensionen, abwärts bis 2. Eine solche gestattet in der Tat die Dirichlet'sche Lösung ohne wesentliche Abänderung. Der Deductionsgang ist der Dirichlet'sche, mit der Vermittelung des Problems, wie es die Folge der überschriebenen Aufsätze anzeigt. Die Axen des Ellipsoids werden als veränderlich betrachtet, und am Schluss Anwendung gemacht auf die Fälle constanten Volums und constanten Axenverhältnisses.

H.

Physik.

Compendium der Experimental-Physik nach Jamin's Petit Traité de Physique deutsch bearbeitet von Dr. G. Recknagel, Professor für Physik u. techn. Mechanik, Rector der königl. Industrieschule in Kaiserslautern. II. Abtheilung: Lehre von der Wärme. Mit vielen Abbildungen in Holzschnitt. Stuttgart 1874. Meyer u. Zeller.

Die erste Abteilung des Werkes, enthaltend die Mechanik, ist im 222. litt. Ber. besprochen. Die zweite zeigt einen merklich verschiedenen Charakter. Während jene ausschliesslich für die Schule bestimmt schien, und, ohne eine eigentliche Doctrin zuwege zu bringen, nur die ersten Begriffe am Experiment zu entwickeln suchte, dabei auch manche Irrlehren vortrug, ist die vorliegende Abteilung über die Wärme selbst eine wolgeordnete Doctrin, in welcher das Experiment genau die Stelle einnimmt, die dem gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft entspricht, geeignet für jeden Zweck der Belehrung, in einem klaren, exacten Vortrage, der an Erklärung wie an tatsächlichen Angaben nichts wesentliches vermissen lässt, ohne Kenntniss des Gegenstandes vorauszusetzen. Der Umfang des Behandelten ist natürlich auf Grenzen eingeschränkt, wie sie einem Compendium angemessen sind, insbesondere um daraus diejenigen Vorkenntnisse zu gewinnen, die das Verstehen wissenschaftlicher Werke erfordert. Die Hauptabschnitte sind: Natur und Mass der Wärme, der Temperatur und der Wärmemenge, letztere nachher auf lebendige Kraft reducirt; dann Wärmewirkungen, nämlich Ausdehnung und Fortpflanzung, an festen und liquiden Körpern; dann Wirkungen an Gasen. Die erschienene Lieferung schliesst vor Beendigung der Abteilung.

H.

Experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstante einiger Gase (mit 1 Tafel). Von Ludwig Boltzmann. (Ausgeführt im k. k. physikalischen Institute zu Wien.) (Vorläufige Mittheilung.) Aus dem 69. Bande d. Sitzb. d. k. Akad. d. W. II. Abth. Aprilheft 1874. 19 S.

Der Verfasser zeigt zuerst, worauf die Möglichkeit beruht, einen Unterschied der Dielektricitätsconstante, zunächst bei Verdünnung des Mediums, durch einen Ausschlag des Elektrometers anzeigen zu lassen, der durch keinen andern Einfluss bewirkt sein kann. Von zwei parallel gestellten Condensatorplatten in kleinem Abstande unter dem Recipienten einer Luftpumpe war die eine e mit der Erde, die andre ∂ mit dem Elektrometer in leitender Verbindung. Bei Ein- und Ausströmen des Gases erfolgte kein Ausschlag, die Reibung des Gases erzeugte also keine Elektricität. Die Platte e ward nun mit 300 daniell'schen Elementen positiv geladen, während auf dem Drahte der Platte ∂ ein zur Erde führender Draht lag, der nach der Ladung gehoben ward. Es ergab sich kein Ausschlag, zum Zeichen der völligen Isolirung. Jetzt ward ein Element hinzugefügt; der Ueberschuss konnte nicht mehr zur Erde abfliessen, und bewirkte einen positiven Ausschlag β, der nach Wegnahme des Elements verschwand. Nach Verdünnung des Gases zwischen den Platten zeigte sich ein negativer Ausschlag α, welcher allein daher rührte, dass das dichtere Gas stärker dielektrisch polarisirt war als das dünnere. Dies α hat nun verschiedene Werte für verschiedene Gase. Die specifische Constante ist

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta n} \frac{760}{b_1 - b_2}$$

wo n die Anzahl der Elemente, b_1, b_2 die Gasdruckwerte in Millimeter Quecksilberhöhe bezeichnet. Es werden nun die Teile des Apparates, Elektrometer, Condensator, Zuleitungsdrähte und Gasleitungen beschrieben, sowie der Beobachtungsgang. Die resultirenden Werte von $\frac{1}{2}\lambda$ sind: Luft 279, Kohlensäure 446, Wasserstoff 125, Kohlenoxyd 325, Stickoxydul 469, Oelbild. Gas 604, 633, Sumpfgas 445 Milliontel. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Abd-al-Rhaman al Sûfi, Description des étoiles fixes composée au milieu du dixième siècle de notre ère. Avec des notes par H. C. F. C. Schjellerup. 4. (Petersburg.) Leipzig, Voss. 3 Thlr. 2 Ngr.

Geiser, C. F., z. Erinnerg. an Jacob Steiner. 8. Zürich, Schabelitz. 10 Ngr.

Kuckuck, d. Rechenkunst im 16. Jahrh. 8. Berlin, Weidmann. 8 Ngr.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bremiker, C., Tafel 4stell. Logarithmen. 8. Berlin, Weidmann. 6 Ngr.

Esersky, Th. v., ausgeführte Multiplication u. Division bis zu jeder belieb. Grösse. 5. Asg. 4. Leipzig, Brockhaus' S. Geb. 1 Thlr. 10 Ngr.

Gallenkamp, W., d. Elemente d. Mathematik. 4. Afl. 1. Thl. 8. Iserlohn, Bädeker. 20 Ngr.

Haberl, J., Lehrb. d. allg. Arithmetik u. Algebra. 2. Afl. 8. Wien, Braumüller. 2 Thlr.

Hechel, K., Auflösgn. d. Aufg. aus d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 8. Reval, Kluge. 15 Ngr.

Hermes, O., Sammlg. v. Aufgaben aus der Algebra u. niederen Analysis. 8. Berlin, Springer. 20 Ngr.

Kieseritzky, C., Lehrb. d. elementaren Geometrie. 2. Bd. Stereometrie. 8. Petersburg, Deubner. 20 Ngr.

Kober, J., Leitf. d. ebenen Geometrie. 8. Leipzig, Teubner. 10 Ngr.

Kössler, H., Leitf. f. d. Anfangsunt. in d. Arithmetik an höheren Lehranst. 8. Halle, Nebert. 7½ Ngr.

Mehler, F. G., Hauptsätze d. Elementar-Mathematik. 7. Afl. 8. Berlin, G. Reimer. 15 Ngr.

Müller, H., Leitf. d. ebenen Geometrie. 1. Thl. 8. Leipzig, Teubner. 20 Ngr.

Paufler, A. M., Leitf. f. d. Zahlenrechnen in Realschulen. 8. Leipzig, Brockhaus. 15 Ngr.

— Dass. Aufg. 1. u. 2. Hft. Ebd. à 5 Ngr.

Pfenninger, A., Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra. 1. Thl. Arithmetik. 8. Zürich, Schulthess. 24 Ngr.

Reeb, W., Auflösgn. z. d. Rechenbuche f. höh. Lehranst. 8. Giessen, Roth. 8 Ngr.

Salomon, J., Lehrbuch d. Elementar-Mathematik f. Ober-Realschulen. 1. Bd. 4. Afl. 8. Wien, Gerold's Sohn. 1 Thlr. 14 Ngr.

Schlömilch, O., Compendium der höheren Analysis. 1. Bd. 4. Afl. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Thlr.

— Dass. 2. Bd. 2. Afl. 8. Ebd. 3 Thlr.

— Fünfstellige logarithm. u. trigonometr. Tafeln. Wohlfeile Schulausg. 3. Afl. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 10 Ngr.

Schröder, E., Abriss d. Arithmetik u. Algebra. 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. 6 Ngr.

Schweder, G., Lehrbuch d. Planimetrie. 2. Afl. 8. Riga, Brutzer & C. 12½ Ngr.

Spitz, C., Lehrbuch d. allg. Arithmetik. 1. Thl. 3. Afl. 8. Leipzig, Winter. 2 Thlr. 10 Ngr.

— Dass. Anhang z. 1. Thl. 3. Afl. 8. Ebd. 16 Ngr.

Weinhold, C. F., Lehrbuch d. elementaren Mathematik. 1. Thl. Arithmetik. 8. Leipzig, Hahn. 1 Thlr. 10 Ngr.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Frege, G., Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung d. Grössenbegriffes gründen. 8. Jena, Frommann. 12 Ngr.

Hattendorff, K., die Sturm'schen Functionen. 1. Afl. 8. Hannover, Rümpler. 20 Ngr.

Königsberger, L., Vorlesgn. üb. d. Theorie d. ellipt. Funct. 1. Thl. 8. Leipzig, Teubner. 4 Thlr. 20 Ngr.

Geometrie.

Escherich, G. v., die Geometrie auf d. Flächen constanter negativer Krümmung. 8. Wien, Gerold's Sohn. 5 Ngr.

Gugler, B., Lehrbuch d. descriptiven Geometrie. 3. Afl. 8. Stuttgart, Metzler. M. Atlas in 4. 2 Thlr. 20 Ngr.

Hesse, O., 7 Vorlesgn. aus d. analyt. Geometrie d. Kegelschnitte. 8. Leipzig, Teubner. 16 Ngr.

Hochheim, A., üb. d. Differentialcurven d. Kegelschnitte. 8. Halle, Nebert. 1 Thlr.

Nawrath, einige Kapitel aus d. neueren Geometrie f. d. Unterr. auf Gymn. u. Realschulen. 8. Sagan, Schönborn. 7½ Ngr.

Pelz, C., d. Axenbestimm. d. Kegelflächen 2. Grades. 8. Wien, Gerold's Sohn. 6 Ngr.

Salmon, G., analyt. Geometrie d. Raumes. Deutsch bearb. v. W. Fiedler. 1. Thl. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Thlr. 20 Ngr.

Geodäsie und practische Geometrie.

Arbeiten, astronom.-geodät., in d. J. 1872, 1869 u. 1867, Hrsg. v. C. Bruhns. 4. Leipzig, Engelmann. 4 Thlr. 20 Ngr.

Schmarda, K. J., Lehrbuch d. pract. Messkunst. 3. Afl. 8. Wien, Seidel & S. 1 Thlr. 20 Ngr.

Schoder, H., Hülfstafeln z. barometr. Höhenbestimmg. 2. Afl. 8. Stuttgart, Schweizerbart. 20 Ngr.

Mechanik.

Anderssohn, A., die Mechanik d. Gravitation durch d. Lehre der Wärme-Mechanik erklärt. 8. Breslau, Maruschke & B. 5 Ngr.

Dumas, W., über Schwinggn. verbundener Pendel. 8. Berlin, Weidmann. 4 Ngr.

Grund, E., e. neue Schwingungstheorie u. e. v. d. bisher. abweichende Stoffanschaug. 2. Afl. 8. Cöln, Mann. 1 Thlr.

Practische Mechanik.

Ritter, A., Lehrbuch d. techn. Mechanik. 3. Afl. 8. Hannover, Rümpler. 5 Thlr. 10 Ngr.

Astronomie und Meteorologie.

Annalen d. k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge. 21. B. J. 1871. 8. Wien, Wallishausser. 3 Thlr. 20 Ngr.

Boguslawski, G. v., Bericht üb. Wetter-Telegraphie u. Sturmwarnungen. 4. Berlin, Mittler & S. 15 Ngr.

Fortschritte, die, auf d. Geb. d. Astronomie 1870—1872. 8. Leipzig, Mayer. 10 Ngr.

— die, auf d. Geb. d. Meteorologie 1872. 8. Ebd. 10 Ngr.

— dass. 1873. 8. Ebd. 12 Ngr.

Fritz, H., Verzeichniss beobachteter Polarlichter. 4. Wien, Gerold's Sohn. 4 Thlr.

Jahn, G. A., Katechismus d. Astronomie. 5. Afl. 8. Leipzig, Weber. 15 Ngr.

Nachrichten, astronom. Hrsg. C. A. F. Peters. 84. Bd. Nr. 1. (Nr. 1993.) 4. Hamburg, Mauke S. prcplt. 5 Thlr.

Neugebauer, P., üb. d. Cometen d. J. 1864 u. seine Erd-Proximität. 8. Breslau, Max & C. 10 Ngr.

Repertorium f. Meteorologie. Red. v. H. Wild. 3. Bd. 4. (Petersburg.) Leipzig, Voss. 4 Thlr. 22 Ngr.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellsch. Hrsg. v. A. A. Auwers u. A. Winnecke. 9. J. 1. Hft. 8. Leipzig, Engelmann. 15 Ngr.

Vogel, H. C., Unters. üb. d. Spectra d. Planeten. 8. Leipzig, Engelmann. 1 Thlr.

Nautik.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. d. J. 1875. gr. 8. Bremerh., v. Vangerow. 6 Ngr.

Physik.

Baenitz, C., Lehrbuch d. Physik in populärer Darstellung. 3. Afl. 8. Berlin, Stubenrauch. 20 Ngr.

Fortschritte, die, auf d. Geb. d. Physik 1872—1873. 8. Leipzig, Mayer. 15 Ngr.

Franz, R., neuere Unters. über d. Identität v. Licht u. strahlender Wärme. 8. Berlin, Weidmann. 4 Ngr.

Kirchhoff, G., Vorlesgn. üb. mathemat. Physik. Mechanik. 2. Lfg. 8. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 20 Ngr.

Mousson, A., die Physik auf d. Grundl. d. Erfahrg. 3. Bd. 2. Lfg. 2. Afl. 8. Zürich, Schulthess. 2 Thlr. 8 Ngr.

Recknagel, Compendium d. Experimental-Physik. 2. Abth. Lehre v. d. Wärme. 8. Stuttgart, Meyer & Z. 24 Ngr.

Subic, S., Lehrbuch d. Physik f. Ober-Gymn. u. Ober-Realschulen. 3. Afl. 8. Pest, Heckenast. 3 Thlr.

Wüllner, A., Lehrbuch d. Experimental-Physik. 1. Bd. Mechanik u. Akustik. 3. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 3 Thlr.

Vermischte Schriften.

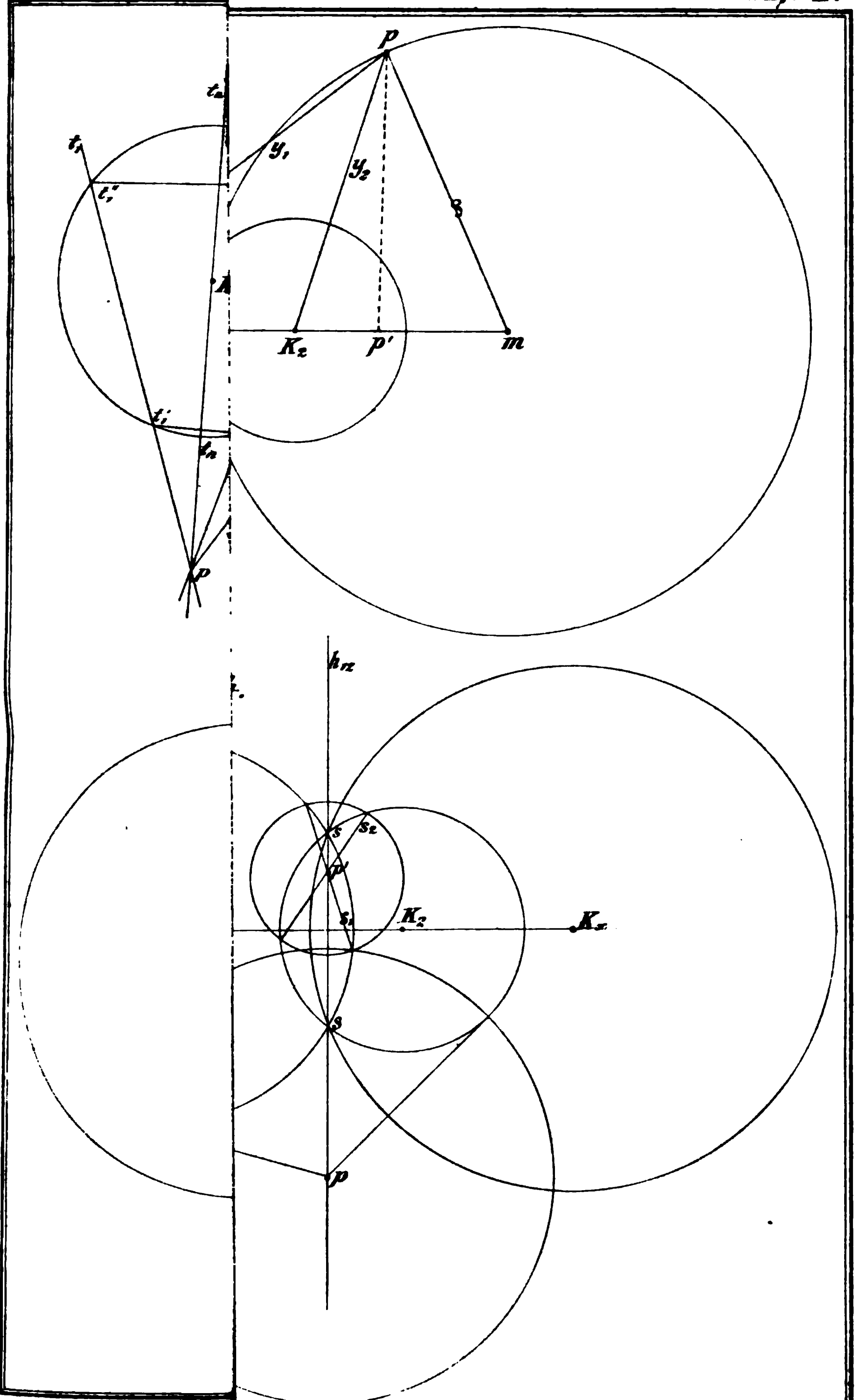
Abhandlungen der mathemat.-physikal. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. 11. Bd. 3 Abth. 4. München, Franz. 2 Thlr. 10 Ngr.

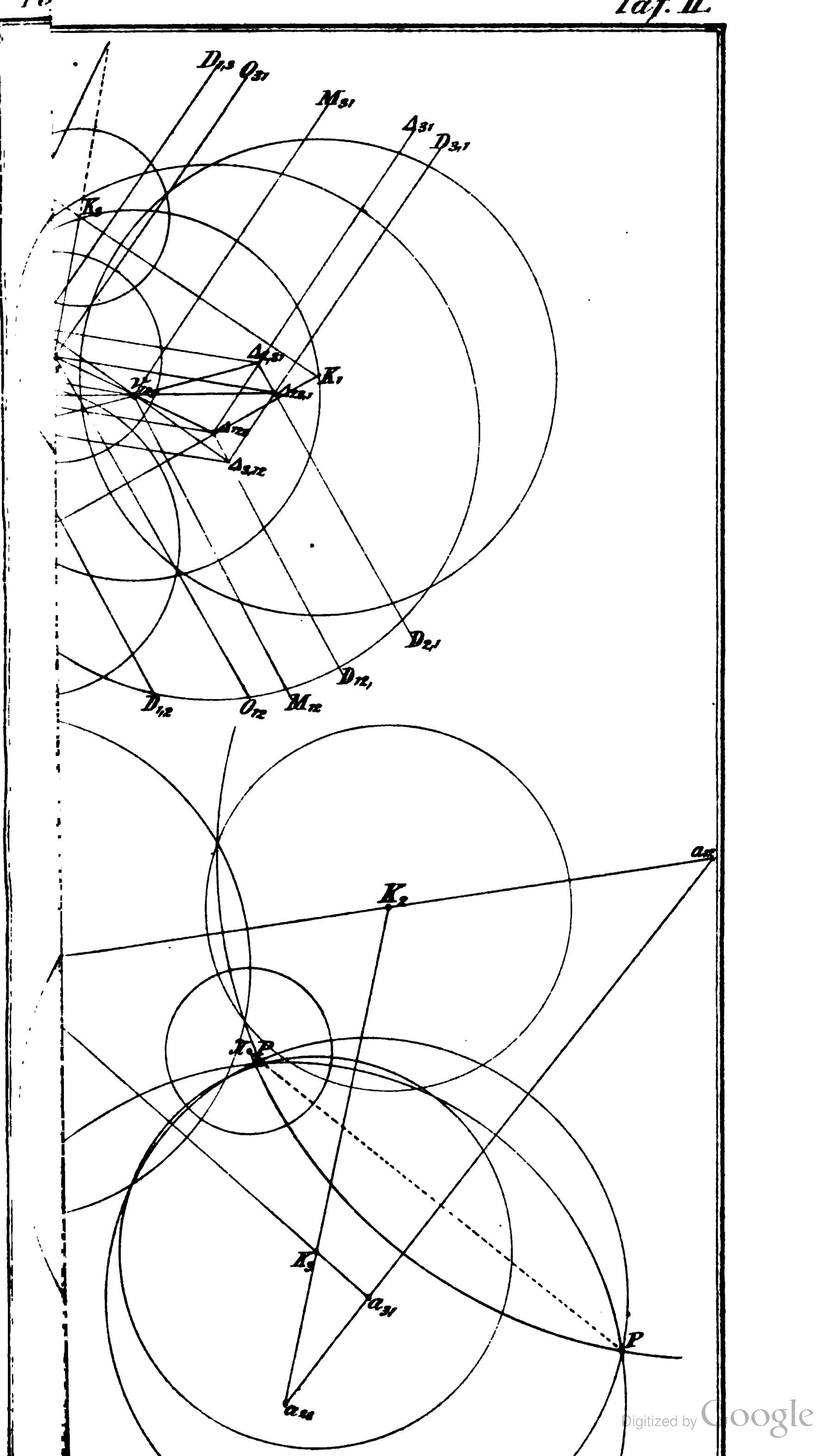
Denkschriften d. k. Akademie d. Wissensch. Mathemat.-naturwiss. Classe. 33. Bd. 4. Wien, Gerold's Sohn. 1 Thlr.

Sitzungs-Berichte d. mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akademie d. Wissensch. 1874. 1. Hft. 8. München, Franz. 12 Ngr.

Studnička, F. J., Vy[illegible] m[illegible]themat. v. úlohách. 8. Prag, Gregr & D. 16 Ngr.

Vogler, C. L. A., e. mathemat. Aufg. f. Südamerika. 8. Leipzig, Mentzel. 10 Ngr.


p
y1
y2
K2
p'
m
p
h12
s
s2
p'
s1
K2
K1
s
p


D1,3
O31
M31
Δ31
D3,1
K1
D2,1
D12,1
D1,2
O12
M12
K2
P
a31
P

I. Affolte[r]

g. 15a.
S_1
M'
K_2
K_3
S_2
S_2'
a_1'
a_1
M
M
a_2'
M
a_1'
a_1'
a_2'
S_2'
K_1
S_2
S_2'
S_1

III. Siebel: Algebraische Gleichungen.

Fig. IV.

§ 4. II. u. § 5, 1.

Fig. VII.

§ 5, 4.

III. Siebel: Algebraische Gleichungen.

Fig. IV.
§ 4, II. u. § 5, 1.

Fig. VII.
§. 5, 4.

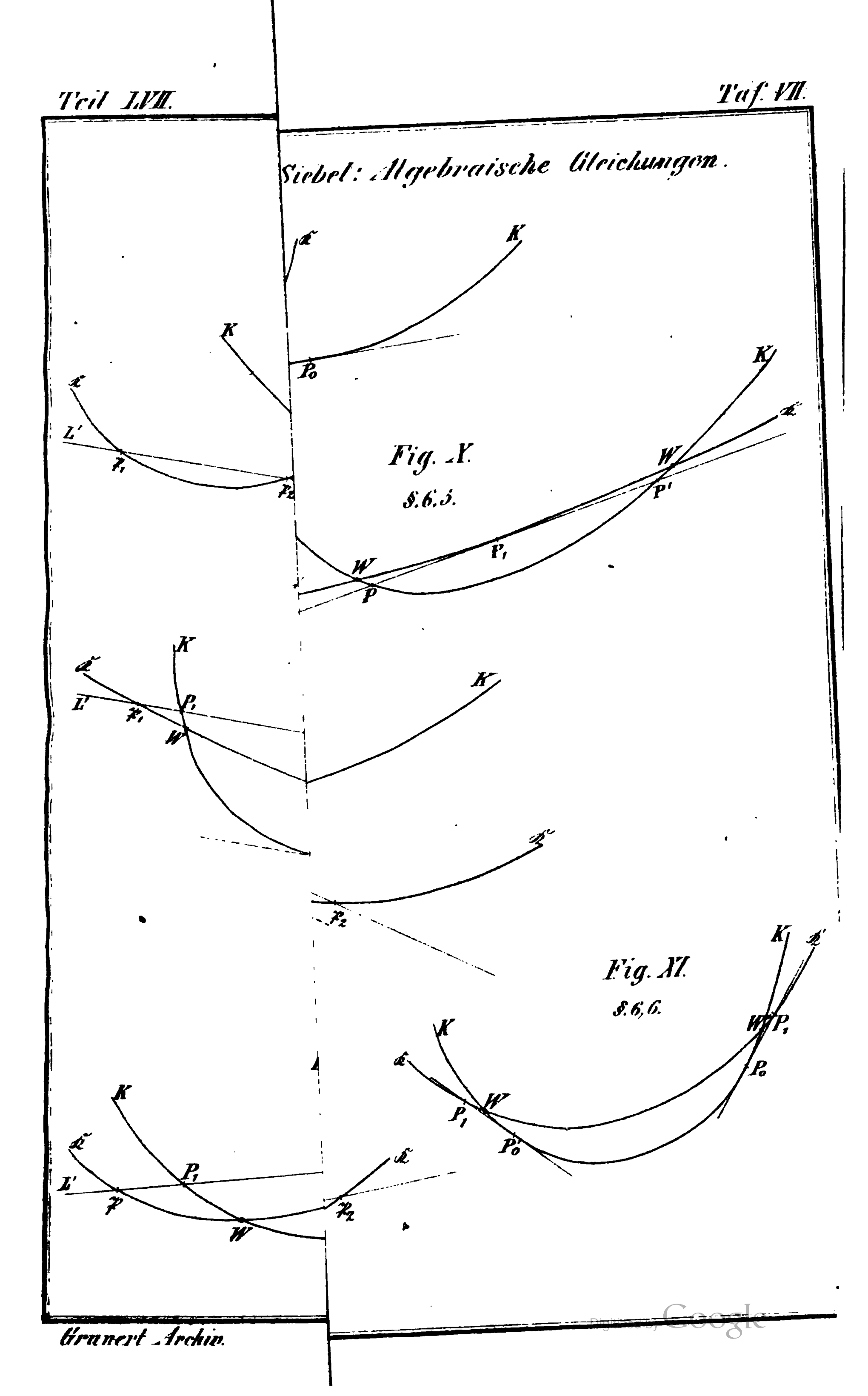

Siebel: Algebraische Gleichungen.
K
P0
K
L'
P1
P2
K
W
P'
Fig. X.
§. 6, 5.
P1
W
P
K
L'
P1
W
K
P2
Fig. XI.
§. 6, 6.
K
W P1
P0
K
W
P1
P0
K
P1
L'
P
P2
W

Fig. XV.
§. 8. II. III. u. §. 9.

Fig.
§. 6. 6

$y = \lambda x^r$

$F(x_1) = \lambda x_1^r$

$y_1 = F(x_1)$

III. Siebel.: Algebr

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

April 16

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Siebenundfunfzigster Teil. Zweites Heft.

(Mit einer lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1875.

VI.

Le trièdre et le tétraèdre, avec application des déterminants.

Par

Georges Dostor,

Docteur ès-sciences, Professeur à Paris.

Première Partie.

Le trièdre.

§ I. Relations entre les six éléments d'un trièdre.

1. **Notations.** Considérons le trièdre *SABC* (Fig. 1), qui est compris entre les trois plans *SBC*, *SCA*, *SAB* et qui, par suite, est terminé par les trois arêtes *SA*, *SB*, *SC*. Nous représenterons par *A*, *B*, *C* les trois dièdres de l'angle trièdre, qui sont respectivement adjacents à ces arêtes *SA*, *SB*, *SC*, et nous désignerons par a, b, c les angles plans ou les faces *BSC*, *CSA*, *ASB*, qui sont opposés aux dièdres respectifs *A*, *B*, *C*.

Ces faces et ces dièdres forment les six éléments du trièdre. Or on sait que le trièdre est déterminé par trois de ces six éléments constitutifs; par conséquent, ces six éléments sont liés entre eux par trois relations distinctes, qui permettent de calculer trois quelconques d'entre eux, lorsqu'on connait les trois autres. Nous nous proposons de déterminer directement ces relations.

2. **Relation entre les trois faces et un angle dièdre d'un trièdre.** Sur l'arête *SC* (Fig. 1) prenons, à partir du sommet *S*, une longueur

SM égale à l'unité de longueur; du point M abaissons sur le plan de la face ASB la perpendiculaire MP, et de son pied menons sur les arêtes SA, SB les perpendiculaires PQ et PR. Si nous tirons les droites MQ et MR, ces lignes seront aussi perpendiculaires aux arêtes SA et SB, et les angles MQP et MRP seront les angles rectilignes ou les sections droites qui mesurent les dièdres A et B.

Cela fait, projetons sur l'arête SB la droite SR et la ligne brisée $SQ+QP+PR$ qui est terminée aux mêmes extrémités que SR; ces deux projections seront égales. Or la projection de la longueur SR sur sa propre direction SB est égale à SR; celle de la droite SQ sur SB est $SQ.\cos ASB = SQ.\cos c$. Puisque la droite QP est perpendiculaire sur SA, cette ligne fait avec SB un angle complémentaire de l'angle $ASB = c$; par suite la projection de QP sur SB sera $PQ.\sin c$. D'ailleurs la projection de PQ sur la droite SB, qui lui est perpendiculaire, est évidemment nulle. Donc nous avons l'équation

(1) $$SR = SQ.\cos c + QP.\sin c.$$

Mais il est facile de voir que les triangles rectangles SMR, SMQ et MPQ donnent

$$SR = SM.\cos MSR = \cos BSC = \cos a,$$
$$SQ = SM.\cos MSQ = \cos CSA = \cos b,$$
$$MQ = SM.\sin MSQ = \sin CSA = \sin b,$$

et

$$QP = MQ.\cos MQP = MQ.\cos A = \sin b \cos A.$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (1), on trouve la relation demandée

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Nous avons ainsi les trois équations fondamentales

(I) $$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$$

Elles expriment que: Dans tout trièdre, le cosinus d'une face égale le produit des cosinus des deux autres faces, plus le produit des sinus des deux mêmes faces multiplié par le cosinus du dièdre compris.

3. **Expression des demi-dièdres d'un trièdre en valeur des trois faces.** La première des équations (I) donne

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

si l'on substitue cette valeur dans la formule

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

ou trouve successivement que

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c}}$$

posant $a+b+c=2p$, on en déduit

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}};$$

On obtiendrait d'une manière analogue la valeur de $\cos\frac{A}{2}$. On a ainsi les trois formules

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}, \\ \operatorname{tang}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}; \end{aligned} \right.$$

dont les deux premières donnent

$$\text{(III)} \qquad \sin A = \frac{2\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin b \sin c}.$$

4. **Relation entre deux faces et les dièdres opposés d'un trièdre.** Par les deux triangles rectangles MPR, MPQ (Fig. 1) on a

$$MP = MR \,.\, \sin MRP = MR \,.\, \sin B,$$
$$MP = MR \,.\, \sin MQP = MQ \,.\, \sin A;$$

mais les deux triangles rectangles SMR, SMQ nous donnent

$$MR = SM \,.\, \sin MSR = \sin a,$$
$$MP = SM \,.\, \sin MSQ = \sin b;$$

par suite il vient

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

d'où nous tirons en divisant par le produit $\sin A \sin B$,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Nous avons donc les trois rapports égaux

(IV) $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Ainsi, dans un trièdre, les sinus des faces sont entre eux comme les sinus des dièdres opposés.

5. **Relation entre deux faces d'un trièdre, le dièdre compris et le dièdre opposé à l'un d'eux.** Prolongeons OP jusqu'à la rencontre de SB en D (Fig. 1). Dans la quadrilatère $PQSR$ projetons le contour $QS + SR + RP$ sur la direction du côté PQ; nous obtenons l'égalité

$$PQ = PS . \cos PQS + SR . \cos SDQ + RP . \cos RPQ;$$

et, comme

$$\cos PQS = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\cos SDQ = \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \sin c,$$

$$\cos RPQ = -\cos RPD = -\cos c,$$

il vient

$$PQ = SR . \sin c - RP . \cos c,$$

d'où nous tirons

(2) $$SR . \sin c = RP . \cos c + PQ.$$

Mais il est aisé de voir que

$$SR = SM . \cos RSM = \cos a,$$

$$RP = RM . \cos MRP = SM . \sin RSM . \cos B = \sin a \cos B,$$

$$PQ = MP . \cot MQP = RM . \sin MRP . \cot A = SM . \sin RSM . \sin B \cot A$$
$$= \sin a \sin B \cot A.$$

Nous trouvons donc, en substituant dans (2),

$$\cos a \sin c = \sin a \cos B \cos c + \sin a \sin B \cot A,$$

ou, en divisant par $\sin a$,

(V) $$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A.$$

Divisons les deux membres de cette égalité par $\cos c \cos B$; nous obtenons la relation suivante:

(VI) $$\frac{\cot a}{\cot c} \cdot \frac{1}{\cos B} - \frac{\cot A}{\cot B} \cdot \frac{1}{\cos c} = 1,$$

qui peut se traduire en langage ordinaire.

Remarquons, pour cela, que la relation précédente existe entre les quatre éléments consécutifs a, B, c, A du trièdre; par conséquent nous pouvons dire que:

Dans tout trièdre, le rapport des cotangentes de deux faces, divisé par le cosinus du dièdre compris, moins le rapport des cotangentes des deux dièdres pris en ordre inverse, divisé par le cosinus de la face intermédiaire, est égal à l'unité.

6. **Relation entre une face d'un trièdre et les trois dièdres.** Considérons le trièdre $S'A'B'C'$ supplémentaire du trièdre donné $SABC$, et désignons par a', b', c' les trois faces $B'S'C'$, $C'S'A'$, $A'S'B'$ et par A', B', C' les trois dièdres opposés.

Si nous appliquons à ce trièdre supplémentaire la première des formules (I), nous avons l'équation

(3) $$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Mais nous savons que

$$a' = \pi - A, \quad b' = \pi - B, \quad c' = \pi - C, \quad A' = \pi - a,$$

d'où il vient

$$\cos a' = -\cos A, \quad \cos b' = -\cos B, \quad \cos c' = -\cos C,$$
$$\cos A' = -\cos a, \quad \sin b' = \sin B, \quad \sin c' = \sin C.$$

Substituons ces valeurs dans l'égalité (3), nous obtenons la nouvelle relation

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

ou, en changeant les signes,

(VII) $$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

7. **Expressions des demi-faces d'un trièdre en valeur des trois dièdres.** La première des formules (II), étant appliquée au trièdre supplémentaire, donne

$$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin b'\sin c'}}.$$

Or, si nous posons $2S=A+B+C+\pi$, nous avons

$$\sin(p'-b')=\sin\frac{c'+a'-b'}{2}=\sin\frac{\pi-C-A+B}{2}=\sin(B-S),$$

$$\sin(p'-c')=\sin\frac{a'+b'-c'}{2}=\sin\frac{\pi-A-B+C}{2}=\sin(C-S);$$

et, comme d'ailleurs

$$\sin\frac{A'}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\cos\frac{a}{2},\quad \sin b'=\sin B,\quad \sin c'=\sin C,$$

il vient

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin B\sin C}}.$$

On obtiendrait d'une manière analogue la valeur de $\sin\frac{a}{2}$ au moyen de la deuxième des relations (II). On trouve ainsi les trois formules

$$\text{(VIII)}\qquad\left\{\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin B\sin C}},\\ \sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin S\sin(A-S)}{\sin B\sin C}},\\ \cot\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin S\sin(A-S)}};\end{aligned}\right.$$

dont les deux premières donnent

$$\text{(IX)}\qquad \sin a=2\frac{\sqrt{\sin S\sin(A-S)\sin(B-S)\sin(C-S)}}{\sin B\sin C}.$$

8. **Formules de Delambre.** Dans l'identité

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

substituons les valeurs fournies par les formules (II); elle devient

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}+\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$
$$=\frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}\cos\frac{C}{2}.$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}=\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

par suite il vient

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

On obtiendrait d'une manière analogue les valeurs de $\sin\frac{A-B}{2}$, $\cos\frac{A+B}{2}$, $\cos\frac{A-B}{2}$. On trouve ainsi les quatre formules

$$\text{(X)}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}&=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\\
\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}&=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\\
\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}&=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\\
\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}&=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules ont été données pour la première fois par Delambre dans son grand Traité d'Astronomie. En Allemagne elles portent le nom du célèbre Gauss qui en a fait usage dans sa Theoria motus corporum coelestium etc.

9. **Règle mnémonique pour écrire les formules de Delambre.** Ces formules peuvent s'écrire facilement au moyen d'un procédé graphique analogue à celui du pentagone de Neper. Il répose sur la construction d'un hexagone circonscrit à un triangle isocèle (*G. Dostor*, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série tome V, 1866).

On construit un triangle isocèle DEF (Fig. 2), auquel on circonscrit l'hexagone $DGEHFI$. Sur les côtés latéraux DE, DF du triangle isocèle on écrit la demi-somme $\frac{A+B}{2}$ et la demi-différence $\frac{A-B}{2}$ de deux dièdres A, B de l'angle trièdre; sur la base EF du même triangle on marque le complément $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ de la moitié du troisième dièdre C.

Enfin, sur la suite des côtés de l'hexagone $DGEHFI$, à partir du sommet E, dans les deux sens $EGDIF$ et EHF, on écrit les arcs

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{a-b}{2},\quad \frac{a-b}{2},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{a+b}{2}$$

et

$$\frac{c}{2},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}.$$

Cela fait, voici la règle mnémonique que nous avons imaginée pour écrire les formules de Delambre.

Elle se compose des deux principes suivants:

1° Le sinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des sinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone *qui ne sont adjacents* au sommet commun du triangle.

2° Le cosinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des cosinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone, *qui sont adjacents* au sommet commun du triangle.

En effet, considérons le côté $DE=\frac{A+B}{2}$ et la base $EF=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ du triangle isocèle, qui ont le sommet commun E; le rapport des sinus de ce côté et de la base est

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}};$$

les côtés de l'hexagone, sous-tendus par les côtés DE, EF qui ne sont pas adjacents au sommet commun E, sont

$$GD = \frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}, \quad HF = \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2},$$

dont les sinus ont pour rapport

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

En égalant ces deux rapports, on a la première formule de Delambre.

Si l'on compare, d'après la même règle, le côté $DF = \frac{A-B}{2}$ du triangle isocèle à la base $EF = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, on obtient la deuxième formule (X).

La deuxième règle fournit les deux autres formules. Car, si l'on considère le côté $DE = \frac{A+B}{2}$ et la base $EF = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ du triangle isocèle qui ont le sommet commun E, le rapport des cosinus de ce côté et de la base est

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}};$$

les côtés de l'hexagone, sous-tendus par les côtés DE, EF qui sont adjacents au sommet commun E

$$GE = \frac{a+b}{2}, \quad EH = \frac{c}{2},$$

dont les cosinus ont pour rapport

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

L'égalité de ces deux rapports donne la troisième formule de Delambre.

§ II. Le Sinus d'un trièdre.

10. Expression du sinus d'un trièdre. Proposons-nous de déterminer la valeur effectuée du déterminant

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix},$$

que, pour abréger, nous représenterons par Δ^2.

Divisons la seconde ligne par $\cos c$ et la troisième par $\cos b$; le déterminant se trouvera divisé par le produit $\cos b \cos c$, de sorte que nous aurons

$$\frac{\Delta^2}{\cos b \cos c} = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \dfrac{1}{\cos c} & \dfrac{\cos a}{\cos b} \\ 1 & \dfrac{\cos a}{\cos b} & \dfrac{1}{\cos b} \end{vmatrix}.$$

Si nous retranchons la première ligne de chacune des deux suivantes, le déterminant conservera sa valeur, et il viendra

$$\frac{\Delta^2}{\cos b \cos c} = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \dfrac{\sin^2 c}{\cos c} & \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos c} \\ 0 & \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b} & \dfrac{\sin^2 b}{\cos b} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\sin^2 c}{\cos c} & \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos c} \\ \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b} & \dfrac{\sin^2 b}{\cos b} \end{vmatrix};$$

Multiplions actuellement la première ligne par $\cos c$, le deuxième par $\cos b$; le déterminant sera multiplié par le produit $\cos b \cos c$, et nous obtiendrons

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \sin^2 c & \cos a - \cos b \cos c \\ \cos a - \cos b \cos c & \sin^2 b \end{vmatrix},$$

ou, en développant,

$$(\mathrm{I})\qquad \Delta^2 = \sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2.$$

On trouverait de même que

$$\Delta^2 = \sin^2 c \sin^2 a - (\cos b - \cos c \cos a)^2,$$
$$\Delta^2 = \sin^2 a \sin^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2.$$

Ces différences de carrés peuvent se transformer en produits. En effet, décomposons la différence des carrés (I) dans le produit de la somme des racines par leur différence; il nous vient

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c)(\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c)\\ &= (\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c)(\cos a\cos b+\sin b\sin c-\cos a)\\ &= [\cos a-\cos(b+c)][\cos(b-c)-\cos a],\end{aligned}$$

et, puisque

$$\cos a-\cos(b+c) = 2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2},$$

$$\cos(b-c)-\cos a = 2\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2},$$

nous trouvons pour Δ^2 la forme remarquable

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned}\Delta^2 &= 4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{c+a-b}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\\ &= 4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),\end{aligned}$$

en posant $a+b+c=2p$.

Si les trois angles a, b, c sont les trois faces d'un trièdre, chacun d'eux sera moindre que la somme des deux autres. et leur somme sera inférieure à quatre angles droits: par suite, les trois demi-différences $\frac{b+c-a}{2}$, $\frac{c+a-b}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$ seront positives et moindres chacune que deux droits, pendant que la demi-somme $\frac{a+b+c}{2}$ sera aussi inférieure à deux droits, donc les quatre sinus du produit précédent seront supérieurs à zéro. Il s'ensuit alors, d'après la formule (I), que le carré $(\cos a-\cos b\cos c)^2$ est toujours moindre que $\sin^2 b\sin^2 c$; et, comme ce dernier carré n'est jamais supérieur à 1, la quantité Δ^2 sera elle-même toujours comprise entre 3 et 1; elle ne sera égale à l'unité, d'après (I), que si le trièdre et trirectangle.

Donc la racine carrée de Δ^2 ou Δ ne peut varier qu'entre -1 et $+1$, en passant par zéro.

Pour cette raison *von Staudt* (Journal de Crelle, Tome XXIV, page 252) a donné à la quantité Δ le nom de sinus du trièdre dont les trois faces sont a, b, c.

11. **Autre forme de l'expression du sinus d'un trièdre.** Dans l'expression (I) remplaçons les sinus par leurs valeurs en fonction des cosinus, et développons le produit résultant ainsi que le carré; nous obtenons

$$\text{(III)}\qquad \Delta^2 = 1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c.$$

Cette forme s'obtient immediatement en développant le détermi-

nant (1) par la règle de *Sarrus* (*Finck*, Eléments d'Algèbre, 2e édition, 1846. Strasbourg chez Dérivaux. n° 52, page 95).

Il est facile de voir qu'on a encore

(IV)

$$\Delta^2 \cos a = \sin^2 a(\cos a - \cos b \cos c) + (\cos b - \cos c \cos a)(\cos c - \cos a \cos b),$$
$$\Delta^2 \cos b = \sin^2 b(\cos b - \cos c \cos a) + (\cos c - \cos a \cos b)(\cos a - \cos b \cos c),$$
$$\Delta^2 \cos c = \sin^2 c(\cos c - \cos a \cos b) + (\cos a - \cos b \cos c)(\cos b - \cos c \cos a).$$

12. **Expression du sinus d'un trièdre en valeur de deux faces et du dièdre compris.** La première des équations (I) du n° 2 donne

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

de sorte que

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

le numérateur de cette fraction est égal à Δ^2 (formule I); nous avons, par suite,

(V) $$\Delta = \sin b \sin c \sin A.$$

Ainsi le sinus d'un trièdre est égal au produit des sinus de deux faces multiplié par le sinus du dièdre compris.

13. **Expression du sinus d'un trièdre en valeur des trois dièdres.** Par permutation circulaire on tire de la formule (IX) du n° 7

$$\sin b = \frac{2\sqrt{\sin S \sin(A-S)\sin(B-S)\sin(C-S)}}{\sin C \sin A},$$

$$\sin c = \frac{2\sqrt{\sin S \sin(A-S)\sin(B-S)\sin(C-S)}}{\sin A \sin B};$$

si nous substituons ces valeurs dans l'expression (V), nous obtenons aussi

(VI) $$\Delta = \frac{4 \sin S \sin(S-A)\sin(S-B)\sin(S-C)}{\sin A \sin B \sin C}.$$

14. **Expression du sinus d'un trièdre en valeur d'une face et de l'inclinaison de l'arête opposée sur le plan de cette face.** Appelons α, β, γ les angles que forment les arêtes *SA*, *SB*, *SC* avec les plans des faces respectivement opposées *BSC*, *CSA*, *ASB*. Tirons la droite *SP* (Fig. 1). Les deux triangles rectangles *SMP*, *MPQ* nous donnent

$$MP = SM.\sin MSP = \sin\gamma,$$
$$MP = MQ.\sin MQP = MQ.\sin A,$$

de sorte que

$$\sin\gamma = MQ.\sin A;$$

mais par le triangle rectangle SMQ nous avons

$$MQ = SM.\sin MSQ = \sin b;$$

par suite il vient

$$\sin\gamma = \sin b \sin A,$$

et, en multipliant par $\sin c$,

$$\sin c \sin\gamma = \sin b \sin c \sin A;$$

donc on trouve que $\varDelta = \sin c \sin\gamma$.

Ainsi on a encore

$$\text{(VII)} \qquad \varDelta = \sin a \sin\alpha = \sin b \sin\beta = \sin c \sin\gamma,$$

c'est-à-dire que: Le sinus d'un trièdre est égal au produit du sinus de chaque face par le sinus de l'inclinaison du plan de cette face sur l'arête opposée

On en conclut aussi que

Les sinus des faces sont inversement proportionnels aux sinus des inclinaisons des arêtes opposées sur les plans de ces faces.

§ III. Le Sinus du Trièdre supplémentaire.

15. **Expression diverses du sinus du trièdre supplémentaire.** Le trièdre supplémentaire du trièdre $SABC$ est terminé par les trois faces

$$a' = \pi - A, \quad b' = \pi - B, \quad c' = \pi - C,$$

qui comprennent entre elles les trois dièdres

$$A' = \pi - a, \quad B' = \pi - b, \quad C' = \pi - c.$$

Posons $a' + b' + c' = 2p'$, $A' + B' + C' = \pi = 2S'$; il nous viendra

$$p' = \pi - S, \quad p' - a' = A - S, \quad p' - b' = B - S, \quad p' - c' = C - S;$$
$$S' = \pi - p, \quad A' - S' = p - a, \quad B' - S' = p - b, \quad C' - S' = p - c.$$

Si nous substituons ces valeurs dans les formules du paragraphe précédent, et que nous désignions par $\varDelta'$ le sinus de notre nouveau

trièdre, nous obtiendrons pour Δ' les valeurs suivantes en fonction des éléments du trièdre donné:

(I) $$\Delta'^2 = -\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix},$$

(II) $$\Delta'^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C,$$

(III) $$\Delta'^2 = 4 \sin S \sin (A-S) \sin (B-S) \sin (C-S),$$

(IV) $$\Delta' = \sin B \sin C \sin a,$$

(V) $$\Delta' = \frac{4 \sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin a \sin b \sin c}.$$

16. **Rapport des sinus d'une face et du dièdre opposée.** Nous avons trouvé (n[os] 12 et 15) que

(1) $$\begin{cases} \Delta = \sin b \sin c \sin A, \\ \Delta' = \sin B \sin C \sin a, \end{cases}$$

d'où nous tirons

$$\frac{\sin b}{\sin B} \cdot \frac{\sin c}{\sin C} \cdot \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\Delta}{\Delta'};$$

or nous avons vu (n[0] 4) que chacun des rapports $\frac{\sin b}{\sin B}$, $\frac{\sin c}{\sin C}$ est égal à $\frac{\sin a}{\sin A}$; par conséquent il vient, en substituant,

(VI) $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

Donc, dans tout trièdre le sinus d'une face est au sinus du dièdre opposé comme le sinus du trièdre et au sinus du trièdre supplémentaire.

Divisons membre à membre les égalités (II) du n[0] 10 et (III) du n[0] 15; nous obtenons

$$\frac{\Delta^2}{\Delta'^2} = \frac{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin S \sin (A-S) \sin (B-S) \sin (C-S)};$$

nous avons donc aussi

(VII) $$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin S \sin (A-S) \sin (B-S) \sin (C-S)}.$$

17. **Relations entre le sinus d'un trièdre et le sinus du trièdre supplémentaire.** Les égalités (1) donnent encore

$$\frac{\Delta^2}{\Delta'} = \frac{\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A}{\sin B \sin C \sin a},$$

$$\frac{\Delta'^2}{\Delta} = \frac{\sin^2 B \sin^2 C \sin^2 a}{\sin b \sin c \sin A};$$

mais, en vertu des formules (IV) du n⁰ 4, on a

$$\frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} = \frac{\sin^2 a}{\sin b \sin c};$$

substituant dans les rapports précédents, il vient encore

(VIII) $$\frac{\Delta^2}{\Delta'} = \sin a \sin b \sin c,$$

(IX) $$\frac{\Delta'^2}{\Delta} = \sin A \sin B \sin C.$$

Ainsi 1⁰ le produit des sinus des trois faces d'un trièdre est égal au carré du sinus de ce trièdre divisé par le sinus du trièdre supplémentaire; 2⁰ le produit des sinus des trois dièdres d'un trièdre est égal au carré du sinus du trièdre supplémentaire divisé par le sinus du trièdre donné.

§ IV. Propriétés nouvelles des sinus des trièdres.

18. Considérons le trièdre $OXYZ$ (Fig. 3), formé par les plans de coordonnées. Par le sommet O menons une droite quelconque OD; désignons par α, β, γ les angles que fait cette droite avec les trois arêtes OX, OY, OZ; et par α', β', γ' les inclinaisons de la même droite sur les plans des faces YOZ, ZOX, XOY. Représentons d'ailleurs par λ, μ, ν les faces YOZ, ZOX, XOY du trièdre O et par λ', μ', ν' les inclinaisons respectives des arêtes OX, OY, OZ sur les plans de ces faces.

Sur OD prenons $OM = 1$, et soient x, y, z les coordonnées OQ, QP, PM du point M.

Projetons la droite OM et la ligne brisée $OQPM$, terminée aux mêmes extrémités, successivement sur les quatre droites OD, OX, OY, OZ; nous formons les quatre équations

(1) $$\begin{cases} 1 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \\ \cos\alpha = x + y\cos\nu + z\cos\mu \\ \cos\beta = x\cos\nu + y + z\cos\lambda \\ \cos\gamma = x\cos\mu + y\cos\lambda + z \end{cases}$$

Cela fait, du point M abaissons sur le plan XOY la perpendiculaire MR et tirons les droites OR, PR. Nous avons, dans les deux triangles MPR, OMR,

$$MR = MP \sin MPR = MO \sin MOR;$$

d'où nous tirons, en observant que $\sin MPR = \sin \nu'$, $\sin MOR = \sin \gamma'$,

$$z \sin \nu' = \sin \gamma',$$

puis, en multipliant les deux membres par $\sin \nu$,

$$z \sin \nu \sin \nu' = \sin \nu \sin \gamma';$$

mais (n° 14) le produit $\sin \nu \sin \nu'$ est le sinus du trièdre $OXYZ$ et $\sin \nu \sin \gamma'$ est le sinus du trièdre $ODXY$, sinus que nous désignerons par Δ_{xy}; donc nous avons

$$(2) \qquad x = \frac{\Delta_{yz}}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_{zx}}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta}.$$

Substituons ces valeurs (2) dans les équations (1), nous obtenons les relations fondamentales

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \cos\alpha \, \Delta_{yz} + \cos\beta \, \Delta_{zx} + \cos\gamma \, \Delta_{xy}, \\ \Delta \cos\alpha &= \Delta_{yz} + \cos\nu \, \Delta_{zx} + \cos\mu \, \Delta_{xy}, \\ \Delta \cos\beta &= \cos\nu \, \Delta_{yz} + \Delta_{zx} + \cos\lambda \, \Delta_{xy}, \\ \Delta \cos\gamma &= \cos\mu \, \Delta_{yz} + \cos\lambda \, \Delta_{zx} + \Delta_{xy} \end{aligned} \right.$$

qui existent entre le sinus d'un trièdre et les sinus des trois dièdres qu'on obtient en menant une droite quelconque par le sommet du trièdre donné et en considérant cette droite avec les arêtes du trièdre donnée prises deux à deux.

19. Multiplions les quatre équations (I) respectivement d'abord par Δ, Δ_{yz}, Δ_{zx}, Δ_{xy}; puis par $-\Delta$, $-\Delta_{yz}$, $+\Delta_{zx}$, $+\Delta_{xy}$; ensuite par $-\Delta$, $+\Delta_{yz}$, $-\Delta_{zx}$, $+\Delta_{xy}$; enfin par $-\Delta$, $+\Delta_{yz}$, $+\Delta_{zx}$, $-\Delta_{xy}$; et ajoutons chaque fois les égalités résultantes, nous obtenons les quatre nouvelles équations

(II)

$$\Delta^2 = \Delta^2_{yz} + \Delta^2_{zx} + \Delta^2_{xy} + 2\cos\lambda \Delta_{zx}\Delta_{xy} + 2\cos\mu \Delta_{xy}\Delta_{yz} + 2\cos\nu \Delta_{yz}\Delta_{zx};$$

(III)

$$\Delta^2_{yz} = \Delta^2 + \Delta^2_{zx} + \Delta^2_{xy} + 2\cos\lambda \Delta_{zx}\Delta_{xy} - 2\cos\beta \Delta \Delta_{zx} - 2\cos\gamma \Delta \Delta_{xy},$$

$$\Delta^2_{zx} = \Delta^2 + \Delta^2_{xy} + \Delta^2_{yz} + 2\cos\mu \Delta_{xy}\Delta_{yz} - 2\cos\gamma \Delta \Delta_{xy} - 2\cos\alpha \Delta \Delta_{yz},$$

$$\Delta^2_{xy} = \Delta^2 + \Delta^2_{yz} + \Delta^2_{zx} + 2\cos\nu \Delta_{yz}\Delta_{zx} - 2\cos\alpha \Delta \Delta_{yz} - 2\cos\beta \Delta \Delta_{zx}.$$

§ V. Angles que font, avec les arêtes d'un trièdre et avec les plans des faces, les deux droites également inclinées sur ces arêtes et sur les plans de ces faces.

20. **Tangente de l'angle, que fait avec les trois arêtes d'un trièdre, la droite également inclinée sur ces arêtes.** Soit SO (Fig. 4) la droite également inclinée sur les trois arêtes SA, SB, SC du trièdre $SABC$. Prenons sur cette droite, à partir du sommet S, une longueur SO égale à l'unité et, par le point O, menons à la même droite le plan perpendiculaire ABC, qui coupe en A, B, C les trois arêtes du trièdre. Les trois triangles rectangles SAO, SBO, SCO, ayant le côté SO commun et les angles aigus en S égaux par hypothèse, sont égaux entre eux et donnent $SA = SB = SC$, de sorte que $AO = BO = CO$.

Cela posé, représentons par φ l'angle BSO. Le triangle rectangle SBO nous donne

$$BO = SO \operatorname{tang} BSO = \operatorname{tang} \varphi;$$

mais la droite BO étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, si l'on mène CD perpendiculaire au côté AB, on a aussi

$$2BO \times CD = BC \times CA$$

d'où l'on tire

$$BO = \frac{BC \times CA}{2CD};$$

il vient, par suite,

(1) $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{BC \times CA}{2CD}.$$

Menons la droite CH perpendiculaire sur le plan SAB et OI perpendiculaire sur AB; puis tirons les droites HD et SI. Les deux angles CDH, OIS, étant compris entre côtés parallèles, sont égaux; par conséquent les deux triangles rectangles CDH, SIO sont semblables et donnent

$$\frac{CD}{SI} = \frac{CH}{SO},$$

d'où, puisque $SO = 1$,

$$CD = SI \times CH.$$

Nous trouvons ainsi, en substituant dans l'équation (1)

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{BC \times CA}{2SI \times CH}.$$

Or il est évident que

$$BC = 2SC.\sin\frac{a}{2}, \qquad CA = 2SC.\sin\frac{b}{2}$$

$$SI = SB\cos\frac{c}{2} = SC\cos\frac{c}{2}, \qquad CH = SC\sin\gamma;$$

il vient donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}\sin\gamma} = \frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\gamma} = \frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin c\sin\gamma}.$$

Le dénominateur $\sin c \sin\gamma$ étant égal au sinus Δ du trièdre, on peut écrire

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\Delta}.$$

Celle est la valeur demandée.

21. **Deuxième méthode pour calculer cette tangente.** Désignons par x, y, z les coordonnées du point O. Projetons la droite SO et la ligne brisée $x+y+z$ successivement sur les quatre droites SO, SA, SB, SC; nous obtenons les quatre équations

$$\begin{aligned}
-1+x\cos\varphi+y\cos\varphi+z\cos\varphi &= 0,\\
-\cos\varphi+x\quad+y\cos\nu+z\cos\mu &= 0,\\
-\cos\varphi+x\cos\nu+y\quad+z\cos\lambda &= 0,\\
-\cos\varphi+x\cos\mu+y\cos\lambda+z\quad &= 0
\end{aligned}$$

entre les trois inconnues x, y, z. Ces équations étant compatibles, leur déterminant est nul, ce qui fournit l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\varphi & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\varphi & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour résoudre cette équation par rapport à l'angle φ, divisons la première ligne et la première colonne du déterminant par $\cos\varphi$, puis remplaçons le premier élément résultant $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ par son équivalent $\operatorname{tang}^2\varphi+1$; l'équation devient

$$\begin{vmatrix} \tang^2\varphi+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0+1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 0+1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 0+1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Le premier membre étant la somme de deux déterminants, l'équation pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} \tang^2\varphi & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \cos c & 1 & \cos a \\ 0 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}.$$

Dans celle-ci le premier membre revient à

$$\tang^2\varphi \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = \varDelta^2 \tang^2\varphi;$$

le second membre est égal à

$$2(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c) = 16 \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2};$$

par conséquent on trouve encore

$$\tang^2\varphi = \frac{16\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}}{\varDelta^2}.$$

22. **Expression de cotang φ.** Dans la formule (I) remplaçons $\varDelta$ par sa valeur (V) du n⁰ 12; nous obtenons

$$\cot\varphi = \frac{\sin b \sin c \sin A}{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin A}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Si, dans le second membre, nous mettons, à la place de $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{b}{2}$, $\cos\frac{c}{2}$ leurs valeurs tirées des formules (VIII) du n⁰ 7, nous trouverons que

$$\text{(II)} \qquad \cot\varphi = \sqrt{\frac{\sin(A-S)\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin S}} = \frac{\varDelta'}{2\sin S}.$$

23. **Cotangente de l'angle que fait avec les plans des trois faces d'un trièdre la droite également inclinée sur ces plans.** Soit SS' la droite également inclinée sur les trois plans SBC, SCA, SAB qui terminent le trièdre $SABC$ et désignons par ψ l'angle commun qu'elle fait avec ces trois plans.

D'un point quelconque S' de cette droite abaissons sur les plans SBC, SCA, SAB les perpendiculaires respectives $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$. Ces perpendiculaires formeront le trièdre $S'A'B'C'$ supplémentaire du trièdre donné $SABC$, et la droite SS' sera également inclinée sur les trois arêtes de ce trièdre.

Si donc, dans la formule (I) nous remplaçons φ, a, b, c et Δ par $\frac{\pi}{2}-\psi$, $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$ et Δ', nous aurons l'expression

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}{\Delta'},$$

ou

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{cotang}\psi=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\Delta'}.$$

24. **Expression de tang ψ.** Dans le second membre, mettons à la place de Δ' sa valeur (IV) du n⁰ 15; il nous vient

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{\sin B\sin C\sin a}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin a}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Si, dans ce résultat, nous remplaçons $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ par leurs valeurs tirées des formules (II) du n⁰ 3, nous trouvons que

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{tang}\psi=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}=\frac{\Delta}{2\sin p}.$$

§ VI. Le trièdre dont les trois faces valent ensemble deux angles droits.

25. **Valeur des angles dièdres de ce trièdre.** Supposons que la somme des trois faces des trièdre $SABC$ soit constante et égale à deux angles droits, c'est-à-dire que

$$2p = a + b + c = \pi.$$

Introduisons cette hypothèse dans les formules (II) du n° 3; elles donnent

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\cot b \cot c}, \\ \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\cos a}{\sin b \sin c}}, \\ \operatorname{tang}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\cos b \cos c}{\cos a}}. \end{aligned} \right.$$

Nous en tirons les égalités

$$\text{(II)} \quad \cos a \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \cos b \operatorname{tang}\frac{B}{2} = \cos c \operatorname{tang}\frac{C}{2}$$
$$= \sqrt{\cos a \cos b \cos c} = \operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2};$$

et de celles-ci

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos a &= \operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}, \\ \cos b &= \operatorname{tang}\frac{C}{2}\operatorname{tang}\frac{A}{2}, \\ \cos c &= \operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}. \end{aligned} \right.$$

26. **Relation entre les dièdres de ce trièdre.** Dans la formule connue

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c,$$

qui revient à

$$\cot b \cot c + \cot c \cot a + \cot a \cot b = 1,$$

mettons à la place des trois premiers termes leurs valeurs tirées de la première des formules (I); nous obtenons l'égalité

$$\text{(IV)} \quad \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1.$$

Si nous multiplions par 2 les deux membres de cette équation et que nous retranchions de 3 les produits résultants, nous trouvons la relation remarquable

$$\text{(V)} \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1.$$

Ainsi, dans notre trièdre, la somme des cosinus des trois dièdres est constante et égale à 1.

Les trois angles a, b, c valant ensemble deux angles droits, on a la relation

$$(1)\quad \operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}+\operatorname{tang}\frac{c}{2}\operatorname{tang}\frac{a}{2}+\operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}=1;$$

or la troisième des formules (VIII) du n° 7 nous donne

$$(2)\quad \operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin S\sin(B-S)}{\sin(C-S)\sin(A-S)}}+\sqrt{\frac{\sin S\sin(C-S)}{\sin(A-S)\sin(B-S)}}=\frac{\sin S}{\sin(A-S)};$$

on verrait de même que

$$(3)\quad \operatorname{tang}\frac{c}{2}\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\frac{\sin S}{\sin(B-S)},\quad \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}=\frac{\sin S}{\sin(C-S)}.$$

Substituant ces valeurs (2) et (3) dans l'égalité précédente (1), on obtient encore entre les trois dièdres A, B, C la relation

$$(\text{VI})\qquad \frac{1}{\sin(A-S)}+\frac{1}{\sin(B-S)}+\frac{1}{\sin(C-S)}=\frac{1}{\sin S}.$$

Si nous multiplions entre elles les égalités (2) et (3) et que nous extrayions la racine carrée du produit, nous trouvons aussi que

$$(\text{VII})\qquad \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}=\frac{2\sin^2 S}{\Delta'}.$$

27. **Sinus du trièdre et de son supplémentaire.** Dans la formule (II) du n° 13 posons $p=\frac{\pi}{2}$, elle donne, en égard à (II).

$$(\text{VIII})\qquad \Delta=2\sqrt{\cos a\cos b\cos c}=\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Par la formule (VII) on a d'ailleurs

$$(\text{IX})\qquad \Delta'=2\sin^2 S\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}.$$

28. **Direction des deux droites également inclinées sur les trois arêtes et sur les plans des trois faces du trièdre.** La formule (II) du n° 22 nous donne d'abord

$$(\text{X})\qquad \cot\varphi=\frac{\Delta'}{2\sin S}=\sin S\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2};$$

puis nous obtenons par la formule (IV) du n⁰ 24

$$\text{(XI)} \quad \tan\psi = \frac{\varDelta}{2\sin p} = \frac{\varDelta}{2} = \sqrt{\cos a\cos b\cos c} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

§ VII. Le trièdre régulier.

29. Supposons que les trois faces du trièdre $SABC$ soient égales entre elles; il en sera de même des trois dièdres. Il nous suffira donc de faire $a = b = c$ et $A = B = C$ dans les formules générales, pour obtenir celles qui conviennent au trièdre régulier.

Dans la première des relations fondamentales (I) du n⁰ 2 posons $a = b = c$, elle deviendra

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos A$$

ou

$$\cos a(1-\cos a) = (1-\cos^2 a)\cos A;$$

on en tire

$$(1) \qquad \cos a = \cos a\cos A + \cos A$$

c'est-à-dire

$$(\text{I}) \qquad \sec A = 1 + \sec a.$$

Ainsi, dans tout trièdre régulier, la sécante d'un dièdre est égale à l'unité augmentée de la sécante d'une face

30. L'égalité précédente (1) revenant à

$$\cos a - \cos A - \cos a\cos A = 0,$$

peut s'écrire

$$(1+\cos a)(1-\cos A) = 1;$$

les deux facteurs du premier membre sont respectivement égaux à $2\cos^2\frac{a}{2}$, $2\sin^2\frac{A}{2}$; par suite il vient aussi

$$(\text{II}) \qquad \cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que: Dans tout trièdre régulier, le cosinus de la demi-face multiplié par le sinus du demi-dièdre égale une demie.

31. Multiplions les deux membres de cette relation par $2\sin\frac{a}{2}$; elle devient

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{a}{2},$$

et donne par suite

$$\text{(III)}\qquad \sin a=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Donc, dans tout trièdre régulier le sinus d'une face égale le rapport du sinus de la demi-face au sinus du demi-dièdre.

32. Multiplions par $2\cos\frac{A}{2}$ les deux membres de la même relation (II), nous obtenons encore

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{A}{2},$$

ou bien

$$\text{(IV)}\qquad \sin A=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Ainsi, dans tout trièdre régulier, le sinus d'un dièdre égale le rapport du cosinus du demi-dièdre au cosinus de la demi-face.

33. La valeur du sinus du trièdre régulier peut se déduire de la formule (V) du n° 12, qui donne

$$\text{(V)}\qquad \varDelta=\sin^2 a\sin A.$$

Cette expression, en vertu des valeurs (II), (III) et (IV) peut aussi s'écrire

$$\text{(VI)}\qquad \varDelta=2\sin^2\frac{a}{2}\cot\frac{A}{2}=2\sin^2\frac{a}{2}\sqrt{\left(2\cos\frac{a}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{a}{2}-1\right)},$$

ou encore

$$\text{(VII)}\qquad \varDelta=\frac{\sin\frac{a}{2}\tang\frac{a}{2}}{\sin\frac{A}{2}\tang\frac{A}{2}}.$$

34. Le sinus du trièdre supplémentaire étant (n° 16)

$$\varDelta'=\varDelta\cdot\frac{\sin A}{\sin a},$$

on trouve successivement pour Δ' les valeurs suivantes:

$$\text{(VIII)}\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta' &= \sin a \sin^2 A,\\ \Delta' &= 2\operatorname{tang}\frac{a}{2}\cos^2\frac{A}{2},\\ \Delta' &= \frac{\cos\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cot\frac{a}{2}};\end{aligned}\right.$$

de sorte que

$$\text{(IX)}\qquad \Delta\Delta' = \operatorname{tang}^3\frac{a}{2}\cot^3\frac{A}{2} = 8\sin^3\frac{a}{2}\cos^3\frac{A}{2}.$$

35. L'inclinaison α des arêtes sur les plans des faces opposées s'obtient au moyen de la relation (VII) du n⁰ 14, qui donne

$$\sin\alpha = \frac{\Delta}{\sin a} = \sin a \sin A = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{A}{2},$$

ou, en égard aux valeurs (III) et (IV),

$$\text{(X)}\qquad \sin\alpha = \operatorname{tang}\frac{a}{2}\cot\frac{A}{2} = \sqrt[3]{\Delta\Delta'}.$$

36. La droite également inclinée sur les trois arêtes du trièdre régulier fait aussi des angles égaux avec les plans des trois faces. L'inclinaison φ de cette droite sur les arêtés est donnée par la formule (I) du n⁰ 20, qui devient

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{4\sin^3\frac{a}{2}}{\Delta} = \frac{4\sin^3\frac{a}{2}}{\sin^2 a\sin A},$$

ou

$$\text{(XI)}\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\frac{a}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 2\sin\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

Quant à l'angle ψ qu'elle fait avec les plans des trois faces, on le trouve par la formule (III) du n⁰ 23, qui se réduit à

$$\cot\psi = \frac{4\cos^3\frac{A}{2}}{\Delta'} = \frac{4\cos^3\frac{A}{2}}{\sin a\sin^2 A},$$

ou à

(XII) $$\cot\psi = \frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = 2\cos\frac{A}{2}\cot\frac{a}{2},$$

On en déduit

(XIII) $$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi = 4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2} = 2.$$

Deuxième Partie.

Le tétraèdre.

§ I. Propriétés du tétraèdre.

37. **Notations.** Considérons le tétraèdre $SABC$. Nous représenterons par a, b, c les trois arêtes SA, SB, SC issues du sommet S par λ, μ, ν les inclinaisons mutuelles BSC, CSA, ASB de ces arêtes. En outre, nous désignerons par λ', μ', ν' les inclinaisons des mêmes arêtes a, b, c sur les faces opposées du tétraèdre, et par a', b', c' les trois autres arêtes du solide, respectivement opposées aux premières. Nous indiquerons d'ailleurs par α, β, γ les angles que forment entre elles les arêtes opposées a et a', b et b', c et c' par S, A, B, C les faces triangulaires du tétraèdre qui sont respectivement opposées aux sommets portant les mêmes lettres.

l'arête $SA = a$,	$SB = b$,	$SC = C$,
l'arête $BC = a'$,	$CA = b'$,	$AB = C'$,
l'angle plans $BSC = \lambda$,	$CSA = \mu$,	$ASB = \nu$,
l'angle $(SA, SBC) = \lambda'$,	$(SB, SCA) = \mu'$,	$(SC, SAB) = \nu'$,
l'angle $(SA, BC) = \alpha$,	$(SB, CA) = \beta$,	$(SC, AB) = \gamma$,

la face $ABC = S$, $SBC = A$, $SCA = B$, $SAB = C$.

Nous aurons toujours soin de désigner chaque angle dièdre du tétraèdre par la lettre qui représente l'arête d'intersection des deux faces du dièdre.

38. **Théorème I.** Dans tout tétraèdre, le double produit de deux arêtes opposées par le cosinus de leur inclinaison mutuelle est égal à la somme des carrés de deux autres arêtes opposées, diminuée de la somme des carrés des arêtes opposées restantes:

Projetons la ligne brisée $CSAB$ (Fig. 5) sur l'arête CB, nous obtenons l'égalité

$$CS\cos SCB + SA\cos\alpha + AB\cos ABC = BC,$$

ou

$$c\cos SCB + a\cos\alpha + c'\cos ABC = a';$$

nous en tirons

$$a\cos\alpha = a' - c\cos SCB - c'\cos ABC,$$

et, en multipliant par $2a'$,

(1) $$2aa'\cos\alpha = 2a'^2 - 2ca'\cos SCB - 2c'a'\cos ABC.$$

Or les deux triangles SBC, ABC donnent

$$b^2 = c^2 + a'^2 - 2ca'\cos SCB,$$
$$b'^2 = c'^2 + a'^2 - 2c'a'\cos ABC,$$

et, par suite,

$$a'^2 - 2ca'\cos SCB = b^2 - c^2,$$
$$a'^2 - 2c'a'\cos ABC = b'^2 - c'^2.$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (1) et concluant par analogie, on obtient les trois relations

(I) $$\begin{cases} 2aa'\cos\alpha = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2, \\ 2bb'\cos\beta = c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2, \\ 2cc'\cos\gamma = a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2. \end{cases}$$

39. **Corollaire.** Ajoutons ces trois égalités membres à membres, nous en déduisons la relation

(II) $$aa'\cos\alpha + bb'\cos\beta + cc'\cos\gamma = 0,$$

qui prouve que des trois angles α, β, γ l'un au moins est aigu et l'un au moins est obtus, et que, si deux de ces angles sont droits, le troisième l'est aussi.

40. **Théorème II.** Dans tout tétraèdre, la projection d'une arête sur l'arête opposée est égale à la différence des projections de deux arêtes, adjacentes d'un même côté à la première arête, sur la même arête opposée.

Dans la relation

$$2aa'\cos\alpha = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2$$

remplaçons b'^2 et c'^2 par les valeurs

$$b'^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mu \quad \text{et} \quad c'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\nu$$

que fournissent les deux triangles SCA et SAB; elle devient

$$2aa'\cos\alpha = 2ab\cos\nu - 2ca\cos\mu.$$

On en tire, en divisant par $2a$, puis par analogie,

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} a'\cos\alpha = b\cos\nu - c\cos\mu, \\ b'\cos\beta = c\cos\lambda - a\cos\nu, \\ c'\cos\gamma = a\cos\mu - b\cos\lambda. \end{cases}$$

41. **Corollaire.** Multiplions ces trois égalités respectivement par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ et ajoutons les équations résultantes; nous obtenons la relation remarquable

$$\text{(IV)} \qquad a'\cos\alpha\cos\lambda + b'\cos\beta\cos\mu + c'\cos\gamma\cos\nu = 0.$$

42. **Théorème III.** Dans tout tétraèdre, chaque face est égale à la somme des produits qu'on obtient, en multipliant chacune des trois autres faces par le cosinus de son inclinaison sur la première face.

En effet chaque face est égale à la somme des projections sur elle des trois autres faces; or les projections des trois faces A, B, C sur la face S sont respectivement

$$A\cos a', \quad B\cos b', \quad C\cos c';$$

on a donc

$$\text{(V)} \qquad S = A\cos a' + B\cos b' + C\cos c'.$$

43. **Relation entre les six angles dièdres d'un tétraèdre.** D'après le théorème précédent, nous avons

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} -S + A\cos a' + B\cos b' + C\cos c' = 0, \\ S\cos a' - A + B\cos c + C\cos b = 0, \\ S\cos b' + A\cos c - B + C\cos a = 0, \\ S\cos c' + A\cos b + B\cos a - C = 0. \end{cases}$$

Eliminant les trois faces A, B, C entre ces quatre équations, nous obtenons la relation cherchée

$$\text{(VI)} \qquad \begin{vmatrix} -1 & \cos a' & \cos b' & \cos c' \\ \cos a' & -1 & \cos c & \cos b \\ \cos b' & \cos c & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

dont le développement est

$$\text{(VII)}\quad \begin{aligned} &\sin^2 a\cos^2 a' + 2(\cos a + \cos b\cos c)\cos b'\cos c' \\ &+\sin^2 b\cos^2 b' + 2(\cos b + \cos c\cos a)\cos c'\cos a' \\ &+\sin^2 c\cos^2 c' + 2(\cos c + \cos a\cos b)\cos a'\cos b' \\ &= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - 2\cos a\cos b\cos c.\end{aligned}$$

44. **Théorème IV.** Dans tout tétraèdre, le carré de chaque face est égal à la somme des carrés des trois autres faces, diminuée de la somme des doubles produits qu'on obtient en multipliant deux quelconques de ces faces par le cosinus du dièdre compris.

Les quatre équations (2) peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} S \qquad\qquad\qquad &- A\cos a' - B\cos b' - C\cos c' = 0,\\ A - B\cos c - C\cos b &- S\cos a' - o.\cos b' - o.\cos c' = 0,\\ B - C\cos a - A\cos c &- o.\cos a' - S\cos b' - o.\cos c' = 0,\\ C - A\cos b - B\cos a &- o.\cos a' - o.\cos b' - S.\cos c' = 0;\end{aligned}$$

si nous éliminons les trois quantités $-\cos a'$, $-\cos b'$, $-\cos c'$ entre ces quatre équations, nous obtenons la relation

$$\text{(VIII)}\quad \begin{vmatrix} S & A & B & C \\ A - B\cos c - C\cos b & S & 0 & 0 \\ B - C\cos a - A\cos c & 0 & S & 0 \\ C - A\cos e - B\cos a & 0 & 0 & S \end{vmatrix} = 0,$$

qui, étant développée, revient à

$$\text{(IX)}\quad S^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos a - 2CA\cos b - 2AB\cos c.$$

45. **Théorème V.** Dans tout tétraèdre, les faces sont entre elles comme les sinus des suppléments des trièdres opposés.

Dans les équations fondamentales (2) nous pouvons considérer comme inconnus le dièdre a' et les deux faces non adjacentes B et C. Pour éliminer ces quantités entre les quatre équations (2), nous mettrons celles-ci sous la forme

$$\begin{aligned} S \quad &+ 0 \qquad + A(-\cos a') + \cos b'(-B) + \cos c'(-C) = 0,\\ 0 \quad &+ A \qquad + S(-\cos a') + \cos c\,(-B) + \cos b\,(-C) = 0,\\ -S\cos b' &- A\cos c + 0\,(-\cos a') - \qquad (-B) + \cos a\,(-C) = 0,\\ -S\cos c' &- A\cos b + 0\,(-\cos a') + \cos a\,(-B) - \qquad (-C) = 0.\end{aligned}$$

Comme elles sont compatibles, le déterminant par rapport aux trois inconnues $-\cos a'$, $-B$, $-C$ est nul. Nous obtenons ainsi le relation

$$\begin{vmatrix} S+0 & A & \cos b' & \cos c' \\ 0+A & S & \cos c & \cos b \\ -S\cos b'-A\cos c & 0 & -1 & \cos a \\ -S\cos c'-A\cos b & 0 & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, par la décomposition du premier membre en deux déterminants, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} S & A & \cos b' & \cos c' \\ 0 & S & \cos c & \cos b \\ -S\cos b' & 0 & -1 & \cos a \\ -S\cos c' & 0 & \cos a & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & A & \cos b' & \cos c' \\ A & S & \cos c & \cos b \\ -A\cos c & 0 & -1 & \cos a \\ -A\cos b & 0 & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ces deux déterminants nous pouvons intervertir les deux premières colonnes, après avoir divisé les premières colonnes respectivement par S et A; il nous vient, en intervertissant aussi les deux premières lignes dans le premier déterminant résultant,

$$-S\begin{vmatrix} S & 0 & \cos c & \cos b \\ A & -1 & \cos b' & \cos c' \\ 0 & \cos b' & -1 & \cos a \\ 0 & \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} A & 0 & \cos b' & \cos c' \\ S & -1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \cos c & -1 & \cos a \\ 0 & \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons suivant les éléments de la première colonne chacun de ces deux déterminants que nous représenterons par Δ_S, Δ_A; nous aurons

$$-S.\Delta_S = -S^2\begin{vmatrix} -1 & \cos b' & \cos c' \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + S.A\begin{vmatrix} 0 & \cos c & \cos b \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix},$$

$$A.\Delta_A = A^2\begin{vmatrix} -1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} - S.A\begin{vmatrix} 0 & \cos b' & \cos c' \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix}.$$

Or le facteur de $-S.A$ ne diffère de celui de $+S.A$ que par le changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes; par suite ils sont égaux. On a donc l'égalité

$$-S^2\begin{vmatrix} -1 & \cos b' & \cos c' \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + A^2\begin{vmatrix} 0 & \cos c & \cos b \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais le coefficient de $-S^2$ est le carré du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre en A, sinus que nous pouvons représenter par $\sin(A')$; de meme le coefficient de $+A^2$ est le carré du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre en S; par suite il vient

$$S^2\sin^2(A')-A^2\sin^2(S')=0;$$

donc on a

$$\text{(X)}\qquad \frac{S}{\sin(S')}=\frac{A}{\sin(A')}=\frac{B}{\sin(B')}=\frac{C}{\sin(C')}.$$

46. **Somme des carrés des quatre faces en valeur des produits des arêtes opposées et des sinus des angles compris entre ces arêtes.** Par le sommet C (Fig. 6) menons le plan $CC'A'$ perpendiculaire à l'arête SA; par le sommet B tirons les droites BA', BB' l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à la même arête SA; puis menons la droite CA' qui sera perpendiculaire à BA'.

Dans le triangle $A'CC'$ nous avons

$$A'C^2=CC'^2+A'C'^2-2CC'.A'C'.\cos CC'A';$$

or

$$\begin{aligned}A'C &= BC\sin CBA' = a'\sin\alpha,\\ CC' &= CS\sin CSC' = c\sin\mu,\\ A'C' &= BB' = BS\sin BSB' = b\sin\nu\\ \cos CC'A' &= \cos a;\end{aligned}$$

par suite, nous obtenons

$$a'^2\sin^2\alpha=c^2\sin^2\mu+b^2\sin^2\nu-2c\sin\mu.b\sin\nu.\cos a,$$

et, en multipliant par a^2,

$$a^2a'^2\sin^2\alpha=c^2a^2\sin^2\mu+a^2b^2\sin^2\nu-2ca\sin\mu.ab\sin\nu.\cos a.$$

Mais

$$ca\sin\mu=2B,\qquad ab\sin\nu=2C;$$

donc il vient

$$\text{(XI)}\qquad a^2a'^2\sin^2\alpha=4B^2+4C^2-8BC\cos a.$$

Nous aurions de même

$$\text{(XII)}\qquad a^2a'^2\sin^2\alpha=4A^2+4S^2-8AS\cos a'.$$

Nous trouvons ainsi les valeurs des dièdres a et a',

$$\text{(XIII)}\qquad \begin{cases}\cos a = \dfrac{4B^2+4C^2-a^2a'^2\sin^2\alpha}{8BC},\\[2ex] \cos a' = \dfrac{4S^2+4A^2-a^2a'^2\sin^2\alpha}{8SA}.\end{cases}$$

Ajoutons les trois égalités

$$4B^2+4C^2-8BC\cos a = a^2a'^2\sin^2\alpha,$$
$$4C^2+4A^2-8CA\cos b = b^2b'^2\sin^2\beta,$$
$$4A^2+4B^2-8AB\cos c = c^2c'^2\sin^2\gamma$$

membres à membres et avec l'égalité

$$4S^2 = 4A^2+4B^2+4C^2-8BC\cos a-8CA\cos b-8AB\cos b;$$

nous obtenons la relation assez remarquable

$$\text{(XIV)}\quad 4(A^2+B^2+C^2+S^2) = a^2a'^2\sin^2\alpha+b^2b'^2\sin^2\beta+c^2c'^2\sin^2\gamma.$$

§ II. Expressions diverses du volume du tétraèdre.

47. **Volume du tétraèdre en valeur de trois arêtes contiguës, de l'angle de deux de ces arêtes et de l'inclinaison de la troisième arête sur le plan des deux premières.** Du sommet C abaissons sur le plan de la face opposée ASB la perpendiculaire CD. Le volume du tétraèdre sera

$$V = \tfrac{1}{3}ABC.CD.$$

Or la surface du triangle ABC est égale à

$$\tfrac{1}{2}SA.SB.\sin ASB = \tfrac{1}{2}ab\sin\nu,$$

et par le triangle rectangle SCD on a la hauteur

$$CD = SC.\sin CSD = c\sin\nu';$$

il vient donc, en substituant,

$$\text{(I)}\qquad V = \tfrac{1}{6}abc\sin\nu\sin\nu'.$$

Donc le volume du tétraèdre est égal au sixième du produit de trois arêtes issues du même sommet, multiplié par le produit du sinus de l'angle compris entre deux de ces arêtes, et du sinus de l'inclinaison de la troisième arête sur le plan des deux premières.

48. **Volume du tétraèdre en valeur de trois arêtes contiguës et des angles qu'elles comprennent.** Désignons par $\varDelta$ le sinus du trièdre S. D'après les formules (VII) du n° 14 et (II) du n° 10, nous avons

$$\varDelta = \sin\nu\sin\nu',$$

et

$$\varDelta = 2\sqrt{\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}};$$

donc il vient aussi

(II) $$V = \tfrac{1}{6}abc.\varDelta.$$

Ainsi le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit de trois arêtes contiguës, multiplié par le sinus du trièdre formé par ces arêtes.

Nous avons aussi trouvé au n⁰ 11 (formule III) que

$$\varDelta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

de sorte que l'on peut aussi écrire

(III) $$36V^2 = a^2b^2c^2(1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu).$$

49. **Détermination directe de cette expression.** Sur l'arête SC (Fig. 7) prenons $SM = 1$, et du point M abaissons sur le plan SAB la perpendiculaire MH; par le pied H menons PQ perpendiculaire sur SB jusqu'à la rencontre de SA en Q; tirons HR perpendiculaire sur SA et joignons SH.

Nous avons évidemment

$$PQ = SQ\sin\nu, \qquad SH = SM\cos\nu' = \cos\nu',$$

d'où

$$\sin\nu\cos\nu' = \frac{PQ.SH}{SQ}.$$

Or le quadrilatère $SPHR$ étant inscriptible, les deux angles HPR, HSR sont égaux; par suite les deux triangles PQR, SQH sont semblables et donnent

$$\frac{PQ}{SQ} = \frac{PR}{SH}, \quad \text{d'où} \quad \frac{PQ.SH}{SQ} = PR = \sin\nu\cos\nu'.$$

Cela posé, SP et SR étant les projections de $SM = 1$ sur les droites SB et SA, on a

$$SP = \cos\lambda, \qquad SR = \cos\mu;$$

d'ailleurs l'angle PSA est égal à ν; il vient donc par le triangle SPR,

$$PR^2 = \cos^2\lambda + \cos^2\mu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Nous avons ainsi

$$\sin^2\nu\sin^2\nu' = \sin^2\nu - \sin^2\nu\cos^2\nu' = \sin^2\nu - \cos^2\lambda - \cos^2\mu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

Substituant cette valeur dans celle (I) de V et élevant au carré, on trouve la formule (III).

50. **Expression en déterminant du volume du tétraèdre en valeur de trois arêtes contiguës** a, b, c **et des inclinaisons mutuelles** λ, μ, ν **de ces arêtes.** Dans l'égalité $36V^2 = a^2b^2c^2\Delta^2$, remplaçons Δ^2 par son expression en déterminant (1) du n⁰ 10; nous avons

$$36V^2 = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions respectivement par a, b, c d'abord les trois lignes, puis les trois colonnes; le déterminant sera multiplié par le produit $a.b.c \times a.b.c = a^2b^2c^2$; par suite, si nous divisons hors barres par $a^2b^2c^2$, la valeur du second membre de l'égalité précédente ne sera pas altérée, et il viendra encore

$$\text{(IV)} \qquad 36V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix}.$$

51. **Expression en déterminant du volume du tétraèdre, en valeur des six arêtes** a **et** a', b **et** b', c **et** c', **opposées deux à deux.** Multiplions par -2 les trois lignes du déterminant précédent; ce déterminant sera multiplié par $(-2)^3 = -8$, et il vient

$$288V^2 = -\begin{vmatrix} -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2c^2 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons remplacer le second membre par un déterminant équivalent du cinquième ordre et écrire

$$288V^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ b^2 & 0 & -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ c^2 & 0 & -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & a^2 & -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ 0 & b^2 & -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ 0 & c^2 & -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2c^2 \end{vmatrix}.$$

Cela fait, les trois triangles SBC, SCA, SAB nous donnent

$$-2bc\cos\lambda = a'^2 - b^2 - c^2, \quad -2ca\cos\mu = b'^2 - c^2 - a^2,$$
$$-2ab\cos\nu = a'^2 - b^2 - c^2;$$

substituons ces valeurs dans notre dernier déterminant et nous obtenons

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & a^2 & -2a^2 & c'^2-a^2-b^2 & b'^2-c^2-a^2 \\ 0 & b^2 & c'^2-a^2-b^2 & -2b^2 & a'^2-b^2-c^2 \\ 0 & c^2 & b'^2-c^2-a^2 & a'^2-b^2-c^2 & -2c^2 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons la seconde ligne à chacune des trois suivantes, il nous vient

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & -a^2 & c'^2-a^2 & b'^2-a^2 \\ 1 & b^2 & c'^2-b^2 & -b^2 & a'^2-b^2 \\ 1 & c^2 & b'^2-c^2 & a'^2-c^2 & -c^2 \end{vmatrix}$$

Si actuellement nous ajoutons la seconde colonne à chacune des trois suivantes, nous trouvons l'expression demandée

$$\text{(V)} \qquad 288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}$$

52. **Expression développée du volume du tétraèdre en valeur des six arêtes a et a', b et b', c et c', opposées deux à deux.** Après avoir multiplié par 2 les trois lignes du déterminant (IV), s'il l'on y remplace les termes angulaires par leurs valeur que fournissent les triangles *SBC*, *SCA*, *SAB*, on obtient

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & c^2+a^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ c^2+a^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

Développant par la règle de Sarrus, on trouve

$$288V^2 = 8a^2b^2c^2 + 2(b^2+c^2-a'^2)(c^2+a^2-b'^2)(a^2+b^2-c'^2)$$
$$-2a^2(b^2+c^2-a'^2)^2 - 2b^2(c^2+a^2-b'^2)^2 - 2c^2(a^2+b^2-c'^2)^2,$$

et, en effectuant,

$$\text{(VI)}\qquad 144V^2 = a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)$$
$$+b^2b'^2(c^2+c'^2+a^2+a'^2-b^2-b'^2)$$
$$+c^2c'^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2)$$
$$-a^2b'^2c'^2-b^2c'^2a'^2-c^2a'^2b'^2-a^2b^2c^2$$

ou

$$\text{(VII)}\quad 144V^2 = a^2(a'^2-b'^2)(c'^2-a'^2)+a^2a'^2(b^2+c^2-a'^2)$$
$$+b^2(b'^2-c'^2)(a'^2-b'^2)+b^2b'^2(c^2+a^2-b'^2)$$
$$+c^2(c'^2-a'^2)(b'^2-c'^2)+c^2c'^2(a^2+b^2-c'^2)-a^2b^2c^2.$$

53. **Autre forme du déterminant (V).** Multiplions les cinq colonnes de ce déterminant par les produits respectifs

$$abc\,.\,a'b'c',\quad a'b'c',\quad bca',\quad cab',\quad abc';$$

nous aurons multiplié le déterminant par le produit

$$abc\,.\,a'b'c'\,.\,a'b'c'\,.\,bca'\,.\,cab'\,.\,abc' = a^3b^3c^3\,.\,a'^3b'^3c'^3,$$

de sorte qu'il vient

$$288a^3b^3c^3.a'^3b'^3c'^3V^2 = \begin{vmatrix} 0 & a'b'c' & bca' & cab' & abc' \\ abc.a'b'c' & 0 & abc.aa' & abc.bb' & abc.cc' \\ ab'c'.bca' & ab'c'.aa' & 0 & ab'c'.cc' & ab'c'.aa' \\ bc'a'.cab' & bc'a'.bb' & bc'a'.cc' & 0 & bc'a'.aa' \\ ca'b'.abc' & ca'b'.cc' & ca'b'.bb' & ca'b'.aa' & 0 \end{vmatrix}$$

divisons maintenant les quatre dernières lignes respectivement par les produits

$$abc,\quad ab'c',\quad bc'a',\quad ca'b';$$

le déterminant se trouvera divisé par le produit

$$abc\,.\,ab'c'\,.\,bc'a'\,.\,ca'b' = a^2b^2c^2\,.\,a'^2b'^2c'^2.$$

Nous obtenons ainsi l'expression

$$\text{(VIII)}\quad 288abc.a'b'c'.V^2 = \begin{vmatrix} 0 & a'b'c' & bca' & cab' & abc' \\ a'b'c' & 0 & aa' & bb' & cc' \\ bca' & aa' & 0 & cc' & bb' \\ cab' & bb' & cc' & 0 & aa' \\ abc' & cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}$$

Dans ce déterminant on peut encore diviser la première ligne et la première colonne chacune par $a'b'c'$, ce qui revient à le diviser par le produit $a'b'c'.a'b'c' = a'^2b'^2c'^2$. Il en résulte la formule

$$(X)\quad 288V^2 = \frac{a'b'c'}{abc}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{bc}{b'c'} & \frac{ca}{c'a'} & \frac{ab}{a'b'} \\ 1 & 0 & aa' & bb' & cc \\ \frac{bc}{b'c'} & aa' & 0 & cc' & bb' \\ \frac{ca}{c'a'} & bb' & cc' & 0 & aa' \\ \frac{ab}{a'b'} & cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

54. **Volume du tétraèdre en valeur de deux arêtes opposées et de leur plus courte distance.** Par les extrémités B et C de l'arête BC menons les droites BB', CC' parallèles et égales à l'arête opposée SA; tirons les droites SB', SC' et $B'C'$. Nous formons ainsi le prisme triangulaire $SABCC'B'$.

La distance de l'arête SA au plan $BCC'B'$ sera égale à la plus courte distance et des deux arêtes opposées SA et BC.

Nous avons le tétraèdre $SABC = \frac{1}{3} SABCC'B'$; or le prisme triangulaire $SABCC'B'$ est la moitié du parallélépipède qui a $BCC'B'$ pour base et d pour hauteur; et, comme le parallélogramme

$$BCC'B' = BB'.BC.\sin B'BC = aa'\sin\alpha,$$

on a

$$SABCC'B' = \tfrac{1}{2}aa'\sin\alpha.d;$$

donc

$$(X)\qquad SABC \text{ ou } V = \tfrac{1}{6}d.aa'\sin\alpha.$$

Ainsi le volume d'un tétraèdre s'obtient aussi, en multipliant le demi-produit de deux arêtes opposées par le sinus de l'angle compris et par le tiers de la plus courte distance de ces mêmes arêtes.

55. **Relation entre les plus courtes distances d, d', d'' des arêtes opposées a et a', b et b', c et c', et les angles α, β, γ compris entre ces arêtes.** La formule (IX) nous donne

$$daa'\sin\alpha = d'bb'\sin\beta = d''cc'\sin\gamma;$$

divisons par ces trois quantités égales les trois termes respectifs de l'égalité (II) du n° 39

$$aa'\cos\alpha + bb'\cos\beta + cc'\cos\gamma = 0,$$

nous obtenons la relation

(XI) $$\frac{\cot\alpha}{d}+\frac{\cot\beta}{d'}+\frac{\cot\gamma}{d''}=0$$

56. Dans la formule (X) mettons à la place de $aa'\sin\alpha$ sa valeur tirée de la première des relations (I) du n⁰ 38; elle devient, par l'élévation au carré

$$144\,V^2=d^2[4a^2a'^2-(b^2+b'^2-c^2-c'^2)^2],$$

et donne

(XII) $$V=\frac{d}{12}\sqrt{(2aa'+b^2+b'^2-c^2-c'^2)\,(2aa'+c^2+c'^2-b^2-b'^2)}.$$

57. **Volume du tétraèdre en valeur de trois faces et du sinus du supplément du trièdre compris.** L'expression (II) du n⁰ 48 peut s'écrire

$$V^2=\frac{1}{36}a^2b^2c^2\Delta^2=\frac{1}{36}.\,bc\sin\lambda.\,ca\sin\mu.\,ab\sin\nu.\,\frac{\Delta^2}{\sin\lambda\sin\mu\sin\nu};$$

or on sait que

$$bc\sin\lambda=2A,\quad ca\sin\mu=2B,\quad ab\sin\nu=2C;$$

d'ailleurs, en vertu de la formule (VIII) du n⁰ 17, on a

$$\frac{\Delta^2}{\sin\lambda\sin\mu\sin\nu}=\Delta';$$

donc il vient aussi

(XIII) $$V^2=\frac{2}{9}A.B.C.\Delta'.$$

Donc le carré du volume d'un tétraèdre est égal aux deux neuvièmes du produit de trois faces multiplié par le sinus du supplément du trièdre compris.

58. **Volume du tétraèdre en valeur de deux faces et du dièdre compris.** Dans la figure 7 menons DE perpendiculaire sur l'arête AB et tirons CE. Nous avons

$$V=\tfrac{1}{3}SAB.CD=\tfrac{1}{3}SAB.CE\sin c'=\tfrac{1}{3}SAB.\frac{AB.CE}{AB}\sin c';$$

or le produit $AB.CE$ est égal au double de la face ABC que nous avons représentée par S, de même que la face SAB a été désignée par C; il vient par conséquent

(XIV) $$V=\frac{2}{3}S.C.\frac{\sin c'}{c}=\frac{1}{3}S.C.\sin c':\frac{c}{2}.$$

Ainsi le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de deux faces, multiplié par le sinus du dièdre compris et divisé par la moitié de l'arête de ce dièdre (G. Dostor, Nouvelles Annales de mathématiques, 2e série, tome VI, 1867, page 413).

59. **Rapport des produits des arêtes opposées.** La formule précédente donne

$$\frac{3Vc'}{2} = S.C.\sin c',$$

et de même

$$\frac{3Vc}{2} = A.B.\sin c,$$

d'où on tire, en multipliant,

$$\frac{9V^2cc'}{4} = S.A.B.C\sin c \sin c'.$$

Or nous avons vu au n° 57 que

$$V^2 = \frac{2}{9}A.B.C.\Delta';$$

par conséquent on a la face

$$\text{(XV)} \qquad S = \frac{\Delta'}{2}\cdot\frac{cc'}{\sin c \sin c'}$$

On en déduit

$$\text{(XVI)} \qquad \frac{2S}{\Delta'} = \frac{aa'}{\sin a \sin a'} = \frac{bb'}{\sin b \sin b'} = \frac{cc'}{\sin c \sin c'}.$$

Donc dans tout tétraèdre les produits des arêtes opposées sont entre eux comme les produits des sinus des dièdres qui émergent de ces arêtes.

60. **Volume du tétraèdre en valeur d'un face et de ces inclinaisons sur les trois autres faces.** L'expression (XIII) permet d'écrire

$$V = \frac{2}{3}S.A\frac{\sin a'}{a'} = \frac{2}{3}S.B\cdot\frac{\sin b'}{b'} = \frac{2}{3}S.C\frac{\sin c'}{c'},$$

d'où on tire les équations

$$\text{(XVII)} \qquad \frac{A\sin a'}{a'} = \frac{B\sin b'}{b'} = \frac{C\sin c'}{c'},$$

qui étant combinées entre elles avec l'équation évidente

$$A\cos a' + B\cos b' + C\cos c' = S,$$

donnent d'abord

$$B = \frac{Ab'\sin a'}{a'}, \quad C = \frac{Ac'\sin a'}{a'},$$

puis

$$A = \frac{S}{a'\cot a' + b'\cot b' + c'\cot c'} \cdot \frac{a'}{\sin a'}.$$

Mettant cette valeur de A dans l'expression $V = \frac{1}{3} S . A . \sin a'$, on trouve

(XVIII) $$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{S^2}{a'\cot a' + b'\cot b' + c'\cot c'}$$

pour le volume du tétraèdre en valeur de la face S et de ces inclinaisons sur les trois autres faces A, B, C (G. Dostor, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, tome VI, 1867, page 414).

61. **Surface du triangle déterminé par les intersections d'un plan avec les trois plans de coordonnées.** Le plan

(1) $$Px + Qy + Rz + T = 0$$

coupe les trois plans de coordonnées à des distances de l'origine qui sont

(2) $$a = -\frac{T}{P}, \quad b = -\frac{T}{Q}, \quad c = -\frac{T}{R}.$$

Désignons par V le volume du tétraèdre qui a son sommet à l'origine des coordonnées et ces longueurs (2) pour arêtes latérales. Nous avons

$$V^2 = \frac{1}{36} a^2 b^2 c^2 . \varDelta^2 = \frac{T^6 . \varDelta^2}{36 P^2 Q^2 R^2}.$$

Mais, si nous désignons par S la surface du triangle formé par les intersections du plan (1) avec les plans de coordonnées et par p la distance de l'origine au plan sécant, nous avons aussi

$$V^2 = \frac{S^2 p^2}{9};$$

il s'ensuit que

$$S^2 p^2 = \frac{\varDelta^2 T^6}{4 P^2 Q^2 R^2} \quad \text{ou} \quad 4S^2 = \frac{\varDelta^2 T^6}{P^2 Q^2 R^2 p^2}.$$

Or on sait que la distance de l'origine au plan (1) est donnée par l'équation

$$\frac{T^2\Delta^2}{p^2} = -\begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix};$$

en substituant dans la valeur précédente, on trouve

$$\text{(XIX)} \qquad 4S^2 = -\frac{T^4}{P^2Q^2R^2}\begin{vmatrix} 0 & P & Q & R \\ P & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ Q & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ R & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

et, en développant

$$\text{(XX)} \qquad 4S^2 = \frac{T^4}{P^2Q^2R^2}\left|\begin{matrix} P^2\sin^2\lambda + 2QR(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + Q^2\sin^2\mu + 2RP(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + R^2\sin^2\nu + 2PQ(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{matrix}\right|.$$

Tel est le carré de la double surface du triangle en question.

62. **Surface de la base d'un tétraèdre en valeur des trois arêtes latérales et de leurs inclinaisons mutuelles.** Dans la formule (XIX) remplaçons P, Q, R par leurs valeurs tirées des égalités (2) et, dans le résultat changeons les signes de la première ligne et de la première colonne; elle deviendra

$$4S^2 = -a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{1}{b} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{1}{c} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

Si nous multiplions les trois dernières lignes et les trois dernières colonnes par les quantités a, b, c, cette expression prend la forme remarquable

$$\text{(XXI)} \qquad 4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ 1 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ 1 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix},$$

dont le développement

(XXII)
$$\begin{aligned}4S^2 = b^2c^2\sin^2\lambda + 2a^2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\\ + c^2a^2\sin^2\mu + 2b^2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\\ + a^2b^2\sin^2\nu + 2c^2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)\end{aligned}$$

exprime le carré de la double surface de la face ABC du tétraèdre $SABC$.

63. **Surface du tétraèdre $SABC$, ayant un sommet S à l'origine des coordonnées, en valeur des coordonnées x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' des trois autres sommets A, B, C.** Supposons les axes des coordonnées rectangulaires. Nous avons

(3) $$a^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad b^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2, \quad c^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2;$$

et, comme les équations des droites SA, SB, SC sont

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}, \quad \frac{x}{x''} = \frac{y}{g''} = \frac{z}{z''}, \quad \frac{x}{x'''} = \frac{y}{y'''} = \frac{z}{z'''},$$

il vient

$$\cos\nu = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2)}} = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{ab},$$

de sorte qu'on a

(4) $$ab\cos\nu = x'x'' + y'y'' + z'z'', \quad ca\cos\mu = x'x''' + x'y''' + z'z''',$$
$$bc\cos\lambda = x''x''' + y''y''' + z''z'''.$$

Si nous substituons les valeurs (3) et (4) dans la formule (IV) du n⁰ 50, nous obtenons l'égalité

$$36V^2 = \begin{vmatrix} x'^2 + y'^2 + z'^2 & x'x'' + y'y'' + z'z'' & x'x''' + y'y''' + z'z''' \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' & x''^2 + y''^2 + z''^2 & x''x''' + y''y''' + z''z''' \\ x'x''' + y'y''' + z'z''' & x''x''' + y''y''' + z''z''' & x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 \end{vmatrix}$$

Le second membre est le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

par conséquent on a, en extrayant la racine carrée

(XXIII)
$$6V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

64. **Volume du tétraèdre $SABC$, en valeur des coordonnées x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 des quatre sommets S, A, B, C**

Transportons l'origine des coordonnées au sommet S et soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' les nouvelles coordonnées des trois autres sommets A, B, C. Le volume du tétraèdre, exprimé en valeur de ces dernières coordonnées, sera donné par la formule (XXIII). Mais les égalités

$$\begin{aligned} x_1 &= x+x', & x_2 &= x+x'', & x_3 &= x+x''', \\ y_1 &= y+y', & y_2 &= y+y'', & y_3 &= y+y''', \\ z_1 &= z+z', & z_2 &= z+z'', & z_3 &= z+z''' \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned} x' &= x_1-x, & x'' &= x_2-x, & x''' &= x_3-x, \\ y' &= y_1-y, & y'' &= y_2-y, & y''' &= y_3-y, \\ z' &= z_1-z, & z'' &= z_2-z, & z''' &= z_3-z. \end{aligned}$$

Si nous substituons ces valeurs dans la formule (XXIII), nous obtenons

$$6V = \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ 0 & x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ 0 & x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix}.$$

Dans le second déterminant il suffira d'ajouter la première ligne à chacune des trois suivantes, pour avoir l'expression demandée

$$\text{(XXIV)} \qquad 6V = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

65. **Méthode directe pour déterminer cette formule.** Le plan $M_1M_2M_3$, qui passe par les trois points

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad M_3(x_3, y_3, z_3),$$

a pour équation

$$\text{(5)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

que, pour abréger, nous écrirons

$$\text{(6)} \qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

où x, y, z désignent les variables courantes. Dans cette équation les coefficients A, B, C sont les déterminants respectifs

$$-\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad +\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

ces déterminants, au signe près, représentent les doubles surfaces des projections du triangle $M_1M_2M_3$ sur les plans de coordonnées OYZ, OZX, OXZ; par suite la racine carrée de la somme des carrés de ces trois déterminants exprime la double surface de ce triangle $M_1M_2M_3$, c'est-à-dire que $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = 2\,M_1M_2M_3$.

Supposons que x, y, z soient les coordonnées d'un point S situé hors du plan (6); la distance d de ce point au plan (6) sera

$$d = \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{Ax+By+Cz+D}{2.M_1M_2M_3};$$

on en tire $2.M_1M_2M_3.d = Ax+By+Cz+D$. Or $2.M_1M_2M_3.d$ est égal à six fois le volume V du tétraèdre $SM_1M_2M_3$; donc on a

$$6V = Az+By+Cz+D,$$

ou bien

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Multiplions la première colonne successivement par les quantités arbitraires a, b, c et retranchons les produits obtenus des trois autres colonnes, la valeur du déterminant n'est pas altérée, et il vient encore

$$\text{(XXV)} \qquad 6V = \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b & z-c \\ 1 & x_1-a & y_1-b & z_1-c \\ 1 & x_2-a & y_2-b & z_2-c \\ 1 & x_3-a & y_2-b & y_3-c \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont quelconques.

66. Volume du tétraèdre compris sous les quatre plans

(1) $$Ax+By+Cz+D = 0,$$
(2) $$A'x+B'y+C'z+D' = 0,$$
(3) $$A''x+B''y+C''z+D'' = 0,$$
(4) $$A'''x+B'''y+C'''z+D''' = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées du point d'intersection des trois plans (2), (3) et (4); x', y', z' celles du point d'intersection des plans

(3), (4) et (1); x'', y'', z'' les coordonnées de l'intersection des plans (4), (1) et (3); enfin x''', y''', z''' celles de l'intersection des plans (1), (2) et (3). Le volume du tétraèdre sera

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Multiplions ce déterminant par le suivant

$$D = \begin{vmatrix} D & A & B & C \\ D' & A' & B' & C' \\ D'' & A'' & B'' & C'' \\ D''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} = (DA'B''C''');$$

nous obtenons

$$(5) \quad 6VD = \begin{vmatrix} D+Ax+By+Cz & D'+A'x+B'y+C'z & D''+A''x+B''y+C''z & D'''+A'''x+B''y+C''z \\ D+Ax'+By'+Cz' & D'+A'x'+B'y'+C'z' & D''+A''x'+B''y'+C''z' & D'''+A'''x'+B'''y'+C'''z' \\ D+Ax''+By''+Cz'' & D'+A'x''+B'y''+C'z'' & D''+A''x''+B''y''+C''z'' & D'''+A'''x''+B'''y''+C'''z'' \\ D+Ax'''+By'''+Cz''' & D'+A'x'''+B'y'''+C'z''' & D''+A''x'''+B''y'''+C''z''' & D'''+A'''x'''+B'''y'''+C'''z''' \end{vmatrix}.$$

Cela posé, le point (x, y, z) appartenant aux trois plans (2), (3) et (4) mais se trouvant extérieur au plan (1), on a évidemment

$$(6)\quad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=\lambda, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0, \\ A''x+B''y+C''z+D''=0, \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0; \end{cases}$$

et de même

$$\begin{aligned} &Ax'+By'+Cz'+D=0, && Ax''+By''+Cz''+D=0, \\ &A'x'+B'y'+C'z'+D'=\lambda', && A'x''+B'y''+C'z''+D'=0, \\ &A''x'+B''y'+C''z'+D''=0, && A''x''+B''y''+C''z''+D''=\lambda'', \\ &A'''x'+B'''y'+C'''z'+D'''=0, && A'''x''+B'''y''+C'''z''+D'''=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax'''+By'''+Cz'''+D&=0, \\ A'x'''+B'y'''+C'z'''+D'&=0, \\ A''x'''+B''y'''+C''z'''+D''&=0, \\ A'''x'''+B'''y'''+C'''z'''+D'''&=\lambda'''. \end{aligned}$$

Ces équations réduisent la valeur (5) à

$$(7)\qquad 6VD=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda''' \end{vmatrix}=\lambda\lambda'\lambda''\lambda''',$$

où il reste à déterminer les constantes λ, λ', λ'', λ'''.

Pour avoir λ, il suffira d'éliminer x, y, z entre les quatre équations (6). Nous obtenons ainsi l'égalité

$$0=\begin{vmatrix} A & B & C & D-\lambda \\ A' & B' & C' & D'-0 \\ A'' & B'' & C'' & D''-0 \\ A''' & B''' & C''' & D'''-0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} A & B & C & \lambda \\ A' & B' & C' & 0 \\ A'' & B'' & C'' & 0 \\ A''' & B''' & C''' & 0 \end{vmatrix},$$

qui, en faisant usage de la notation abrégée, revient à

$$0=D+\lambda(A'B''C'''),\quad \text{d'où}\quad \lambda=-\frac{(AB'C''D''')}{(A'B''C''')}.$$

On trouverait de même que

$$\lambda'=-\frac{(AB'C''D''')}{(A''B'''C)},\quad \lambda''=-\frac{(AB'C''D''')}{(A'''BC')},\quad \lambda'''=-\frac{(AB'C''D''')}{(AB'C'')};$$

par conséquent il vient

$$\lambda\lambda'\lambda''\lambda''' = \frac{(AB'C''D''')^4}{(AB'C'').(A'B''C''').(A''B'''C).(A'''BC')}.$$

Si nous substituons cette valeur dans l'équation (7), nous trouverons, pour le volume demandé,

$$6V = \frac{(AB'C''D''')^3}{(AB'C'').(A'B''C''').(A''B'''C).(A'''BC')},$$

ou bien

(XXVI)

$$6V = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}^3}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \\ A & B & C \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A''' & B''' & C''' \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}}$$

Cette formule est due à *Joachimsthal* (Journal der reinen und angewandten Mathematik von Crelle; T. XL, p. 21—47).

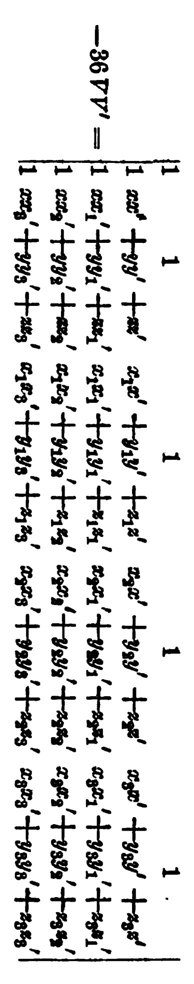
67. **Produit des volumes de deux tétraèdres en valeur des seize distances des quatre sommets du premier tétraèdre aux quatre sommets du second.** Soient V et V' les volumes de deux tétraèdres $SABC$, $S'A'B'C'$ ayant leurs sommets respectifs aux points

$$S(x\,y\,z), \quad A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3);$$
$$S'(x', y', z'), \quad A'(x_1', y_1', z_1'), \quad B'(x_2', y_2', z_2'), \quad C'(x_3', y_3', z_3').$$

Nous avons

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad 6V' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x' & y' & z' \\ 1 & 0 & x_1' & y_1' & z_1' \\ 1 & 0 & x_2' & y_2' & z_2' \\ 1 & 0 & x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix}.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il vient



Représentons les distances des sommets du premier tétraèdre à ceux du second par le notation

$$SS' = d_{11},\quad AS' = d_{21},\quad BS' = d_{31},\quad CS' = d_{41},$$
$$SA' = d_{12},\quad AA' = d_{22},\quad BA' = d_{32},\quad CA' = d_{42},$$
$$SB' = d_{13},\quad AB' = d_{23},\quad BB' = d_{33},\quad CB' = d_{43},$$
$$SC' = d_{14},\quad AC' = d_{24},\quad BC' = d_{34},\quad CC' = d_{44};$$

et désignons les distances des mêmes sommets à l'origine des coordonnées par les lettres suivantes

$$SO = \mathrm{s},\quad AO = \mathrm{a},\quad BO = \mathrm{b},\quad CO = \mathrm{c},$$
$$S'O = \mathrm{s}',\quad A'O = \mathrm{a}',\quad B'O = \mathrm{b}',\quad C'O = \mathrm{c}'.$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} d_{11}^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \\ &= (x^2+y^2+z^2)+(x'^2+y'^2+z'^2)-2(xx'+yy'+zz') \\ &= \mathrm{s}^2+\mathrm{s}'^2-2(xx'+yy'+zz'); \end{aligned}$$

on en tire

$$2(xx'+yy'+zz') = \mathrm{s}^2+\mathrm{s}'^2-d_{11}^2.$$

On obtiendrait des valeurs analogues pour les autres sommes de produits.

Cela étant, dans notre dernier déterminant, multiplions les quatre dernières lignes par 2, puis divisons par 2 la première colonne résultante; le déterminant sera multiplié par $2^4:2=2^3=8$. Remplaçons ensuite les sommes de produits par leurs valeurs

$$\mathrm{s}^2+\mathrm{s}'^2-d_{11}^2, \quad \mathrm{s}^2+\mathrm{s}'^2-d_{12}^2, \quad \text{etc.};$$

nous obtenons l'égalité

$$-288\,VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{s}^2+\mathrm{s}'^2-d_{11}^2 & \mathrm{a}^2+\mathrm{s}'^2-d_{21}^2 & \mathrm{b}^2+\mathrm{s}'^2-d_{31}^2 & \mathrm{c}^2+\mathrm{s}'^2-d_{41}^2 \\ 1 & \mathrm{s}^2+\mathrm{a}'^2-d_{12}^2 & \mathrm{a}^2+\mathrm{a}'^2-d_{22}^2 & \mathrm{b}^2+\mathrm{a}'^2-d_{32}^2 & \mathrm{c}^2+\mathrm{a}'^2-d_{42}^2 \\ 1 & \mathrm{s}^2+\mathrm{b}'^2-d_{13}^2 & \mathrm{a}^2+\mathrm{b}'^2-d_{23}^2 & \mathrm{b}^2+\mathrm{b}'^2-d_{33}^2 & \mathrm{c}^2+\mathrm{b}'^2-d_{43} \\ 1 & \mathrm{s}^2+\mathrm{c}'^2-d_{14}^2 & \mathrm{a}^2+\mathrm{c}'^2-d_{24}^2 & \mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2-d_{34}^2 & \mathrm{c}^2+\mathrm{c}'^2-d_{44} \end{vmatrix}.$$

Pour transformer ce déterminant, conservons la première colonne; multiplions-la ensuite successivement par s^2, a^2, b^2, c^2 et retranchons les produits respectivement des quatre dernières colonnes; le déterminant un change pas de valeur et l'on a

$$-288\,VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{s}'^2-d_{11}^2 & \mathrm{s}'^2-d_{21}^2 & \mathrm{s}'^2-d_{31}^2 & \mathrm{s}'^2-d_{41}^2 \\ 1 & \mathrm{a}'^2-d_{12}^2 & \mathrm{a}'^2-d_{22}^2 & \mathrm{a}'^2-d_{32}^2 & \mathrm{a}'^2-d_{42}^2 \\ 1 & \mathrm{b}'^2-d_{13}^2 & \mathrm{b}'^2-d_{23}^2 & \mathrm{b}'^2-d_{33}^2 & \mathrm{b}'^2-d_{43}^2 \\ 1 & \mathrm{c}'^2-d_{14}^2 & \mathrm{c}'^2-d_{24}^2 & \mathrm{c}'^2-d_{34}^2 & \mathrm{c}'^2-d_{44}^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, conservons la première ligne; multiplions-la ensuite successivement par s'^2, a'^2, b'^2, c'^2 et retranchons les produits respectivement des quatre dernières lignes; le déterminant conserve sa valeur, et il vient

$$-288\,VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -d_{11}^2 & -d_{21}^2 & -d_{31}^2 & -d_{41}^2 \\ 1 & -d_{12}^2 & -d_{22}^2 & -d_{32}^2 & -d_{42}^2 \\ 1 & -d_{13}^2 & -d_{23}^2 & -d_{33}^2 & -d_{43}^2 \\ 1 & -d_{14}^2 & -d_{24}^2 & -d_{34}^2 & -d_{44}^2 \end{vmatrix}.$$

Enfin, si, dans ce déterminant, nous multiplions par -1, d'abord les quatre dernières lignes, puis la première colonne résultante, le déterminant sera multiplié par la cinquième puissance de -1, changera de signe et deviendra

$$\text{(XXVII)}\quad 288\,VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11}^2 & d_{21}^2 & d_{31}^2 & d_{41}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & d_{22}^2 & d_{32}^2 & d_{42}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & d_{33}^2 & d_{43}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & d_{44}^2 \end{vmatrix}.$$

pour la valeur cherchée du produit $288\,VV'$.

Si les deux tétraèdres coïncident, on a

$$\begin{aligned} &d_{11} = 0, \quad d_{12} = d_{21} = a, \quad d_{13} = d_{31} = b, \quad d_{14} = d_{41} = c, \\ &d_{22} = 0, \quad d_{23} = d_{32} = c', \quad d_{24} = d_{42} = b', \\ &d_{33} = 0, \quad d_{34} = d_{43} = a', \\ &d_{44} = 0, \end{aligned}$$

et il vient

$$288\,VV^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

comme au n^0 51.

§ III. Expressions diverses du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

68. **Expression en déterminant du rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre $SABC$, en valeur de trois arêtes contiguës $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes, $BSC = \lambda$, $CSA = \mu$, $ASB = \nu$.** Prenons le sommet S pour origine et les arêtes SA, SB, SC pour axes des coordonnées. Désignons par x, y, z les coordonnées du centre O de la sphère circonscrite. Le centre O sera le point d'intersection des trois plans élevés sur les milieux des arêtes a, b, c perpendiculairement à ces arêtes; par conséquent $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ seront les projections orthogonales du rayon $SO = R$ sur les trois axes de coordonnées SX, SY, SZ; de sorte que, si α, β, γ sont les inclinaisons de SO sur ces trois axes, nous avons

(1) $$a = 2R\cos\alpha,\quad b = 2R\cos\beta,\quad c = 2R\cos\gamma.$$

Cela posé, projetons le rayon SO et la ligne brisée $x+y+z$ successivement sur SO et sur les trois axes de coordonnées; nous formons les quatre équations

$$\begin{aligned}
-R+x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma &= 0,\\
-R\cos\alpha+x+y\cos\nu+z\cos\mu &= 0,\\
-R\cos\beta+x\cos\nu+y+z\cos\lambda &= 0,\\
-R\cos\gamma+x\cos\mu+y\cos\lambda+z &= 0.
\end{aligned}$$

Entre ces quatre équations éliminons les trois variables x, y, z; nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous multiplions la première ligne et la première colonne par $2R$ et que dans le résultat nous faisons la substitution des valeurs (1), nous trouvons l'équation

(I) $$\begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui nous donne l'expression demandée

(II) $$4R^2\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

69. **Expression développée du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur des trois arêtes contiguës et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes.** Le second membre de l'équation précédente revient à

$$a\begin{vmatrix} a & b & c \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \end{vmatrix};$$

ces trois déterminants sont respectivement égaux à

$$a\sin^2\lambda + b(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + c(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu),$$
$$-b\sin^2\mu - c(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) - a(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu),$$
$$c\sin^2\nu + a(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + b(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda);$$

multipliant par les quantités respectives a, $-b$ et c, puis ajoutant, on trouve que

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} 4R^2\Delta^2 = a^2\sin^2\lambda &+ 2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + b^2\sin^2\mu &+ 2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + c^2\sin^2\nu &+ 2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned}$$

70. **Expression en déterminant du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur des six arêtes** a **et** a', b **et** b', c **et** c', **opposées deux à deux.** Dans le déterminant (II), multiplions les trois dernières colonnes respectivement par $2a$, $2b$, $2c$, puis les quatre dernières lignes résultantes par $\frac{1}{2}$, a, b, c; nous obtenons l'équation

$$16a^2b^2c^2\Delta^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 2a^2 & 2ab\cos\nu & 2ca\cos\mu \\ b^2 & 2ab\cos\nu & 2b^2 & 2bc\cos\lambda \\ c^2 & 2ca\cos\mu & 2bc\cos\lambda & 2c^2 \end{vmatrix},$$

ou, en remarquant que $a^2b^2c^2\Delta^2 = 36V^2$ et

$$2ab\cos\nu = a^2 + b^2 - c'^2, \quad 2ca\cos\mu = c^2 + a^2 - b'^2$$
$$2ab\cos\nu = a^2 + b^2 - c'^2,$$

$$576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & c^2+a^2-b'^2 \\ b^2 & a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ c^2 & c^2+a^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Retranchons la première ligne de chacune des trois suivantes; il nous vient

$$576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & a^2 & a^2-c'^2 & a^2-b'^2 \\ b^2 & b^2-c'^2 & b^2 & b^2-a'^2 \\ c^2 & c^2-b'^2 & c^2-a'^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Si, actuellement, nous retranchons la première colonne de chacune des trois suivantes, nous trouvons

$$576\, V^2 R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -c'^2 & -b'^2 \\ b^2 & -c'^2 & 0 & -a'^2 \\ c^2 & -b'^2 & -a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Enfin changeons les signes des trois dernières lignes, puis le signe de la première colonne resultante; le déterminant sera multiplié par la quatrième puissance de -1 et n'aura pas changé de signe. Nous avons ainsi l'expression demandée

$$\text{(IV)} \qquad 576\, V^2 R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

71. **Calcul direct de ce déterminant.** Supposons que le tétraèdre *SABC* soit rapporté au centre de la sphère circonscrite et désignons par $x, y, z;\ x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3$ les coordonnés des quatre sommets S, A, B, C.

Dans l'expression (XXIV, n° 64) du volume V du tétraèdre, multiplions la première colonne du déterminant d'abord par R, puis par $-R$; nous obtenons les deux égalités

$$6\, VR = \begin{vmatrix} R & x & y & z \\ R & x_1 & y_1 & z_1 \\ R & x_2 & y_2 & z_2 \\ R & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad -6\, VR = \begin{vmatrix} -R & x & y & z \\ -R & x_1 & y_1 & z_1 \\ -R & x_2 & y_2 & z_2 \\ -R & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

dont le produit est

$$-36V^2R^2 = \begin{vmatrix} -R^2+x^2+y^2+z^2 & -R^2+xx_1+yy_1+zz_1 & -R^2+xx_2+yy_2+zz_2 & -R^2+xx_3+yy_3+zz_3 \\ -R^2+xx_1+yy_1+zz_1 & -R^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2 & -R^2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & -R^2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 \\ -R^2+xx_2+yy_2+zz_2 & -R^2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & -R_2+x_2^2+y_2^2+z_2^2 & -R^2+x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 \\ -R^2+xx_3+yy_3+zz_3 & -R^2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 & -R^2+x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 & -R^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2 \end{vmatrix}.$$

Cela trouvé, les sommets S, A, B, C étant situés sur la sphère, nous avons d'abord

$$\begin{aligned}
-R^2+x^2+y^2+z^2&=0,\\
-R^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2&=0,\\
-R^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2&=0,\\
-R^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2&=0.
\end{aligned}$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned}
SA^2&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\\
&=(x^2+y^2+z^2)+(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-2(xx_1+yy_1+zz_1),
\end{aligned}$$

ou

$$a^2=2[R^2-(xx_1+yy_1+zz_1)],$$

de sorte qu'on a

$$\begin{aligned}
-R^2+xx_1+yy_1+zz_1&=-\frac{a^2}{2}, & -R^2+x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3&=-\frac{a'^2}{2},\\
-R^2+xx_2+yy_2+zz_2&=-\frac{b^2}{2}, & -R^2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3&=-\frac{b'^2}{2},\\
-R^2+xx_3+yy_3+zz_3&=-\frac{c^2}{2}, & -R^2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2&=-\frac{c'^2}{2}.
\end{aligned}$$

Substituant toutes ces valeurs dans notre dernier déterminant et multiplions les quatre colonnes par -2; le déterminant sera multiplié par $(-2)^4=16$ et nous obtiendrons encore la formule (IV).

72. **Deuxième forme du déterminant qui donne le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur des six arêtes.** Multiplions les trois dernières colonnes du déterminant (IV) par les quantités respectives b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2; le déterminant se trouvera multiplié par le produit $b^2c^2.c^2a^2.a^2b^2=a^4b^4c^4$ et l'on aura

$$576a^4b^4c^4V^2R^2=-\begin{vmatrix}0 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2\\ a^2 & 0 & a^2c^2c'^2 & a^2b^2b'^2\\ b^2 & b^2c^2c'^2 & 0 & b^2a^2a'^2\\ c^2 & c^2b^2b'^2 & c^2a^2a'^2 & 0\end{vmatrix}.$$

Divisons maintenant les quatre lignes respectivement par $a^2b^2c^2$, a^2, b^2, c^2; le déterminant se trouvera divisé par le produit $a^2b^2c^2.a^2.b^2.c^2$, de sorte qu'il vient aussi

$$\text{(V)}\qquad 576V^2R^2=-\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2\\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2\\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0\end{vmatrix}.$$

73. **Troisième forme du déterminant qui donne le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre en valeur des six arêtes.** Dans ce dernier déterminant multiplions les quatre lignes par les quantités respectives $aa'bb'cc'$, aa', bb', cc'; le déterminant sera multiplié par le produit $aa'bb'cc'.aa'.bb'.cc' = a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$; nous avons, par suite,

$$576\,a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' \\ aa' & 0 & aa'c^2c'^2 & aa'b^2b'^2 \\ bb' & bb'c^2c'^2 & 0 & bb'a^2a'^2 \\ cc' & cc'b^2b'^2 & cc'a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Divisons actuellement les trois dernières colonnes respectivement par $bb'cc'$, $cc'aa'$, $aa'bb'$; le déterminant se trouvera divisé par le produit $bb'cc'.cc'aa'.aa'bb' = a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$. Il vient donc encore

$$\text{(VI)} \qquad 576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

74. **Expression développée de la valeur de $576\,V^2R^2$.** Dans ce déterminant remplaçons la première colonne par la somme des quatre colonnes; nous obtenons

$$576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} aa'+bb'+cc' & aa & bb' & cc' \\ aa'+bb'+cc' & 0 & cc' & bb' \\ aa'+bb'+cc' & cc' & 0 & aa' \\ aa'+bb'+cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous voyons ainsi que le déterminant (VI) est divisible par $aa'+bb'+cc'$. Si l'on avait remplacé la première colonne par la somme des quatre colonnes respectivement multipliées par 1, 1, -1 et -1, on aurait vu que le déterminant (VI) est aussi divisible par $bb'+cc'-aa'$. Il est facile de voir qu'il est de même divisible par $cc'+aa'-bb'$ et par $aa'+bb'-cc'$ et qu'en définitive on a

$$\text{(VII)}$$
$$576\,V^2R^2 = (aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')(aa'+bb'-cc'),$$

ou

$$\text{(VIII)} \qquad 72\,V^2R^2 = P^2(P^2-aa')(P^2-bb')(P^2-cc'),$$

en posant

$$aa'+bb'+cc' = 2P^2.$$

Cette dernière formule (VIII) est due à Crelle (*Crelle*, Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen, T. I, 3. page 105).

§ IV. Rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre.

75. Prenons encore le sommet S pour origine et les arêtes SA, SB, SC pour axes des coordonnées. Soit O le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre; désignons par x, y, z les coordonnées de ce centre et par r le rayon de la sphère.

L'équation du plan de la face SBC ou du plan des yz étant $x=0$, nous obtenons la distance du centre O à ce plan, en faisant $A=1$, $B=C=D=0$ dans la formule générale qui donne la distance d'un point à un plan. Cette distance étant représentée par r, nous avons ainsi l'égalité $\frac{x^2\Delta^2}{r^2}=\sin^2\lambda$, qui donne $x=\frac{r\sin\lambda}{\Delta}$.

Les coordonnées du centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre seront par suite

(1) $$x=\frac{r\sin\lambda}{\Delta},\quad y=\frac{r\sin\mu}{\Delta},\quad z=\frac{r\sin\nu}{\Delta};$$

ce centre appartient à la droite

(2) $$\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu},$$

qui a tous ses points également éloignés des trois faces du trièdre S.

Le plan ABC, passant par les extrémités des arêtes $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$, est représenté par l'équation

(3) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0.$$

La distance du centre O à ce plan se trouvera en faisant

$$A=\frac{1}{a},\quad B=\frac{1}{b},\quad C=\frac{1}{c},\quad p=z$$

$$D=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=\frac{r}{\Delta}\left(\frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}-\frac{\Delta}{r}\right)$$

dans la formule qui donne la distance d'un point à un plan.

Cette formule donne ainsi

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}-\frac{\Delta}{r}\right)^2\cdot\frac{1}{\Delta^2} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{1}{b} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{1}{c} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et donne

$$\left(\frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}-\frac{\Delta}{r}\right)^2 = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{1}{b} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{1}{c} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Or, en vertu de l'égalité qui précède la formule (XXI) du n⁰ 62, le second membre, multiplié par $a^2b^2c^2$, est égal au carré de la double surface S du triangle ABC. Nous avons donc

$$\left(\frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}-\frac{\Delta}{r}\right) = \frac{4S^2}{a^2b^2c^2},$$

d'où nous tirons

$$\text{(I)} \qquad \frac{\Delta}{r} = \frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}\pm\frac{2S}{abc}.$$

Cette formule donne les rayons des deux sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre, lesquelles sphères ont leurs centres situés sur la droite (2).

Si l'on a soin de changer dans cette équation (I) successivement le signe de $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$, on formera les trois équations

$$\text{(II)} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta}{r'} &= \frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}-\frac{\sin\lambda}{a}\pm\frac{2S}{abc}, \\ \frac{\Delta}{r''} &= \frac{\sin\nu}{c}+\frac{\sin\lambda}{a}-\frac{\sin\mu}{b}\pm\frac{2S}{abc}, \\ \frac{\Delta}{r'''} &= \frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}-\frac{\sin\nu}{c}\pm\frac{2S}{abc}, \end{aligned}\right.$$

qui donnent les rayons des six autres sphères tangentes aux plans des quatre faces du tétraèdre.

Ces sphères ont leurs centres situés, deux par deux, sur les droites respectives

$$(4)\qquad \begin{cases} -\dfrac{x}{\sin\lambda}=\dfrac{y}{\sin\mu}=\dfrac{z}{\sin\nu}, \\ \dfrac{x}{\sin\lambda}=-\dfrac{y}{\sin\mu}=\dfrac{z}{\sin\nu}, \\ \dfrac{x}{\sin\lambda}=\dfrac{y}{\sin\mu}=-\dfrac{z}{\sin\nu}, \end{cases}$$

qui, étant dirigées dans l'intérieur des trois trièdres

$$SA'BC, \quad SAB'C, \quad SABC',$$

formés par deux des arêtes SA, SB, SC et le prolongement de la troisième, sont les lieux des points équidistants des faces de ces trièdres (*G. Dostor*, Nouvelles annales de mathématiques, 2e série, tome XII, 1873, page 367).

L'équation (1) peut d'ailleurs s'obtenir directement. En effet, en y faisant évanouir les dénominateurs, on la change en

$$abc\Delta = r(bc\sin\lambda + ca\sin\mu + ab\sin\nu \pm 2S).$$

mais, en désignant par V le volume du tétraèdre et par A, B, C les trois faces SBC, SCA, SAB, on a

$$abc\Delta = 6V, \quad bc\sin\lambda = 2A, \quad ca\sin\mu = 2B, \quad ab\sin\nu = 2C,$$

ce qui réduit notre équation à

$$3V = r(A+B+C\pm S),$$

d'où

$$V = (A+B+C\pm S)\frac{r}{3},$$

ce qui est évident.

§ V. Tétraèdre circonscriptible par les arêtes.

76. Nous donnerons ce nom aux tétraèdres dont les six arêtes sont tangentes à une même sphère.

Conservons toutes les notations précédentes et appelons α, β, γ, δ les segments des arêtes qui sont compris entre les sommets A, B, C, S du tétraèdre et les points de contact de ces arêtes avec la sphère. Nous avons

$$(1)\qquad \begin{cases} a = \alpha+\delta, & b = \beta+\delta, & c = \gamma+\delta, \\ a' = \beta+\gamma, & b' = \gamma+\alpha, & c' = \alpha+\beta, \end{cases}$$

d'où nous tirons, en ajoutant verticalement,

$$(\mathrm{I})\qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta = a+a' = b+b' = c+c'.$$

Donc, dans tout tétraèdre circonscriptible par les arêtes, les sommes des arêtes opposées sont égales entre elles.

77. **Cosinus des angles au sommet** S. Désignons toujours ces angles BSC, CSA, ASB respectivement par λ, μ, ν. Puisque

$$a'^2 = b^2+c^2-2bc\cos\lambda,$$

il vient

$$\cos\lambda = \frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc} = \frac{(\beta+\delta)^2+(\gamma+\delta)^2-(\beta+\gamma)^2}{2bc} = \frac{2(\beta+\delta)(\gamma+\delta)-4\beta\gamma}{2bc};$$

nous avons donc

$$(\mathrm{II})\qquad \cos\lambda = 1-\frac{2\beta\gamma}{bc},\quad \cos\mu = 1-\frac{2\gamma\alpha}{ca},\quad \cos\nu = 1-\frac{2\alpha\beta}{ab},$$

d'où on tire

$$(\mathrm{III})\qquad \sin^2\frac{\lambda}{2} = \frac{\beta\gamma}{bc},\quad \sin^2\mu = \frac{\gamma\alpha}{ca},\quad \sin^2\nu = \frac{\alpha\beta}{ab}.$$

78. **Volume du tétraèdre.** La formule (IV) du n° 50 nous donne

$$36V^2 = -a^2b^2c^2\begin{vmatrix} -1 & -\cos\nu & -\cos\mu \\ -\cos\nu & -1 & -\cos\lambda \\ -\cos\mu & -\cos\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\cos\nu & -\cos\mu \\ 1 & -\cos\nu & -1 & -\cos\lambda \\ 1 & -\cos\mu & -\cos\lambda & -1 \end{vmatrix};$$

si nous ajoutons la première colonne à chacune des trois suivantes, il nous viendra

$$36V^2 = -a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\cos\nu & 1-\cos\mu \\ 1 & 1-\cos\nu & 0 & 1-\cos\lambda \\ 1 & 1-\cos\mu & 1-\cos\lambda & 0 \end{vmatrix};$$

mais nous avons par les égalités précédentes (II)

$$1-\cos\lambda=\frac{2\beta\gamma}{bc},\quad 1-\cos\mu=\frac{2\gamma\alpha}{cb},\quad 1-\cos\nu=\frac{2\alpha\beta}{ab}.$$

Substituons ces valeurs dans notre dernier déterminant, puis multiplions respectivement par a, b, c d'abord les trois dernières lignes puis les trois dernières colonnes; nous trouvons

$$36V^2=-\begin{vmatrix}1 & a & b & c\\ a & 0 & 2\beta\alpha & 2\gamma\alpha\\ b & 2\alpha\beta & 0 & 2\gamma\beta\\ c & 2\alpha\gamma & 2\beta\gamma & 0\end{vmatrix}.$$

Si nous divisons les trois dernières lignes par 2 et que nous multiplions aussi par 2 la première colonne résultante, le déterminant sera divisé par 4, de sorte qu'il nous viendra

(IV) $$9V^2=-\begin{vmatrix}2 & a & b & c\\ a & 0 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ b & \beta\alpha & 0 & \gamma\beta\\ c & \gamma\alpha & \gamma\beta & 0\end{vmatrix}=-\alpha^2\beta^2\gamma^2\begin{vmatrix}2 & \frac{a}{\alpha} & \frac{b}{\beta} & \frac{c}{\gamma}\\ \frac{a}{\alpha} & 0 & 1 & 1\\ \frac{b}{\beta} & 1 & 0 & 1\\ \frac{c}{\gamma} & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

pour le triple carré du volume du tétraèdre.

79. **Rayon du la sphère tangente aux six arêtes du tétraèdre.** Soient O le centre de cette sphère et r son rayon. Appelons φ l'inclinaison commune de la droite SO sur les trois arêtes du trièdre S. Nous avons, en égard à la valeur (I) du n⁰ 20,

$$r=\delta\operatorname{tang}\varphi=\frac{4\delta\sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}}{\varDelta};$$

et si nous mettons dans cette expression les valeurs (III) nous trouverons que

(V) $$r=\frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{abc\varDelta}=\frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{6V}=\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{3V}.$$

80. **Angles des arêtes opposées.** Représentons par A, B, C les angles des arêtes opposées a et a', b et b', c et c'. Nous avons (n⁰ 38)

$$2aa'\cos A=b^2+b'^2-c^2-c'^2;$$

remplaçant les arêtes par leurs valeurs en fonction de α, β, γ, δ, nous obtenons

$$\text{(VI)} \quad \cos A = \frac{(\beta-\gamma)(\delta-\alpha)}{(\beta+\gamma)(\delta+\alpha)}, \quad \cos B = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{(\gamma+\alpha)(\delta+\beta)},$$
$$\cos C = \frac{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}{(\alpha+\beta)(\delta+\gamma)},$$

d'où nous tirons

$$\text{(VII)} \quad \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2} = \frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\gamma+\beta\delta}, \quad \operatorname{tang}^2 B = \frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{\beta\alpha+\gamma\delta}, \quad \operatorname{tang}^2 C = \frac{\gamma\alpha+\beta\delta}{\gamma\beta+\alpha\delta},$$

et, par suite

$$\text{(VIII)} \qquad \operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2} = 1.$$

§ VI. Tétraèdre équifacial.

81. Nous donnerons ce nom au tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles égaux; les arêtes opposées y sont deux à deux égales et les angles plans de chaque trièdre valent ensemble deux angles droits.

Nous représenterons par a, b, c les trois côtés du triangle générateur ABC et par A, B, C les angles opposés à ces côtés. Nous désignerons d'ailleurs par les mêmes lettres a, b, c les angles dièdres qui sont adjacents aux arêtes a, b, c du tétraèdre.

Si dans les formules des n⁰ 2 et suivants, nous substituons les petites lettres aux grandes et réciproquement, nous obtiendrons les relations qui existent entre les trois angles plans A, B, C du triangle générateur et les trois dièdres a, b, c.

Les principales de ce relations sont les suivantes:

$$\text{(I)} \quad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}}, \quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos A}{\sin B\sin C}},$$
$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos A}};$$

$$\text{(II)} \quad \cos A\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \cos B\operatorname{tang}\frac{b}{2} = \cos C\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2};$$

$$\text{(III)} \qquad \sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}+\sin^2\frac{c}{2} = 1,$$

$$\text{(IV)} \qquad \cos a+\cos b+\cos c = 1;$$

(V) $\Delta = 2\sqrt{\cos A \cos B \cos C} = 2 \operatorname{tang}\frac{a}{2} \operatorname{tang}\frac{b}{2} \operatorname{tang}\frac{c}{2}.$

82. **Volume du tétraèdre.** Mettons cette valeur de Δ dans la formule (II), $V = \frac{1}{6} abc\,\Delta$, du n° 48, nous obtenons pour le volume du tétraèdre

(VI) $$V = \tfrac{1}{3} abc \sqrt{\cos A \cos B \cos C};$$

or le triangle générateur nous donne

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

par suite nous trouvons, en substituant et en élevant au carré,

(VII) $$72 V^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

83. **Rayons des sphères inscrite et ex-inscrite.** Désignons ces rayons par r et r', et par S la surface du triangle générateur. Il est évident que

$$V = \tfrac{4}{3} Sr = \tfrac{2}{3} Sr';$$

il vient donc

(VIII) $$8r^2 = 2r'^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Soit H la hauteur du tétraèdre. Puisque $V = \frac{1}{3} SH$, on a

(IX) $$H = 4r = 2r'.$$

Ainsi la hauteur du tétraèdre équifacial est égale au diamètre de la sphère ex-inscrite et égale au double diamètre de la sphère inscrite.

84. **Rayon de la sphère circonscrite.** Les arêtes opposées du tétraèdre équifacial étant égales, la formule (VII) du n° 74 nous donnera

$$576 V^2 R^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2);$$

divisant cette égalité membre à membre par la relation (VII) du n° 82, nous obtenons

(X) $$8R^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Donc le double diamètre de la sphère circonscrite au tétraèdre équifacial est égal à la racine carré de la somme des carrés des six arêtes du tétraèdre.

§ VII. Tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires.

85. **Théorème I.** Dans tout tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires, les sommes des carrés des arêtes opposées sont égales entre elles.

Nous avons vu, au n° 39, que, si deux systèmes d'arêtes opposées sont rectangulaires, les deux arêtes opposées restantes sont aussi perpendiculaires entre elles. En supposant donc

$$(1) \qquad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0,$$

les trois formules (I) du n° 38 donnent de suite

$$(\mathrm{I}) \qquad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2.$$

86. **Théorème II.** Dans tout tétraèdre, à arêtes opposées rectangulaires, les trois arêtes d'un même trièdre sont proportionnelles aux cosinus des faces opposées de ce trièdre.

Car l'hypothèse (1) réduit les égalités (III) du n° 40 aux suivantes

$$a\cos\mu = b\cos\lambda, \qquad b\cos\nu = c\cos\mu, \qquad c\cos\lambda = a\cos\nu,$$

qui donnent

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{a}{\cos\lambda} = \frac{b}{\cos\mu} = \frac{c}{\cos\nu}.$$

87. **Relation entre les trois arêtes d'un même trièdre et les angles dièdres adjacents.** Soit $\frac{1}{r}$ la valeur commune de ces trois rapports (II), de sorte que

$$(2) \qquad \cos^2\lambda = a^2r^2, \quad \cos^2\mu = b^2r^2, \quad \cos^2\nu = c^2r^2.$$

Le trièdre S nous donne aussi

$$\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2\mu}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2\nu}{\sin^2 c} = r'^2,$$

d'où nous tirons

$$(3) \qquad \sin^2\lambda = r'^2\sin^2 a, \quad \sin^2\mu = r'^2\sin^2 b, \quad \sin^2\nu = r'^2\sin^2 c.$$

Ajoutant les égalités (2) et (3), nous obtenons

$$-1 + r^2a^2 + r'^2\sin^2 a = 0,$$
$$-1 + r^2b^2 + r'^2\sin^2 b = 0,$$
$$-1 + r^2c^2 + r'^2\sin^2 c = 0.$$

Eliminant les inconnues r^2 et r'^2 entre ces trois équations, on trouve la relation

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & \sin^2 a \\ 1 & b^2 & \sin^2 b \\ 1 & c^2 & \sin^2 c \end{vmatrix} = 0,$$

qui, étant développée, se met sous la forme

$$\text{(IV)} \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sin^2 b}{b^2} - \frac{\sin^2 c}{c^2}\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\sin^2 c}{c^2} - \frac{\sin^2 a}{a^2}\right) + \left(\frac{\sin^2 a}{a^2} - \frac{\sin^2 b}{b^2}\right) = 0.$$

On a pareillement les égalités

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & \sin^2 a \\ 1 & b'^2 & \sin^2 b' \\ 1 & c'^2 & \sin^2 c' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & b^2 & \sin^2 b \\ 1 & c'^2 & \sin^2 c' \\ 1 & a'^2 & \sin^2 a' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & c^2 & \sin^2 c \\ 1 & a'^2 & \sin^2 a' \\ 1 & b'^2 & \sin^2 b' \end{vmatrix} = 0.$$

88. Dans les relations (XI) et (XII) du n° 46 posons $\alpha = \frac{\pi}{2}$; elles donnent

$$\text{(V)} \qquad \frac{a^2 a'^2}{4} = B^2 + C^2 - 2BC\cos a = A^2 + S^2 - 2AS\cos a'.$$

On en conclut que

Théorème III. **Dans tout tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires, le carré du demi-produit de deux arêtes opposées égale la somme des carrés des deux faces adjacentes à l'une de ces arêtes, moins le double produit de ces deux faces par le cosinus du dièdre compris.**

89. Faisons $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = 1$ dans la relation (XIV) du même numéro 46; nous trouvons que

$$\text{(VI)} \qquad \tfrac{1}{4}(a^2 a'^2 + b^2 b'^2 + c^2 c'^2) = A^2 + B^2 + C^2 + S^2.$$

Ainsi

Théorème IV. **Dans tout tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires, la somme des carrés des demi-produits des arêtes opposées est égale à la somme des carrés des quatre faces.**

90. **Volume du tétraèdre.** Les égalités (II) donnent

$$\frac{a^2}{\cos^2\lambda} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda}{\cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu} = \frac{a'^2}{\cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

d'où il vient

$$\cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu = \frac{a'^2\cos^2\lambda}{a^2}.$$

Substituant dans l'expression

$$\Delta^2 = \sin^2\lambda - (\cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu),$$

on voit que

$$a^2\Delta^2 = a^2\sin^2\lambda - a'^2\cos^2\lambda.$$

On trouve ainsi que

(VII) $$36V^2 = a^2b^2c^2\Delta^2 = b^2c^2(a^2\sin^2\lambda - a'^2\cos^2\lambda)$$
$$= c^2a^2(b^2\sin^2\mu - b'^2\cos^2\mu)$$
$$= a^2b^2(c^2\sin^2\nu - c'^2\cos^2\nu).$$

§ VIII. Tétraèdre régulier.

91. Soit a le côté du tétraèdre régulier, nous avons

$$\cos A = \cos B = \cos C = \tfrac{1}{2},$$
$$\sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

si nous substituons ces valeurs dans les formules qui précèdent, nous obtiendrons pour ce polyèdre régulier les valeurs suivantes:

(I) Angle dièdre: $\cos\alpha = \tfrac{1}{3}$, $\sin\alpha = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}$, $\operatorname{tang}\alpha = 2\sqrt{2}$;

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6},\quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

(II) Sinus du trièdre: $\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

(III) Volume: $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$.

(IV) Hauteur: $H = \tfrac{1}{3}a\sqrt{6}$.

(V) Rayon de la sphère inscrite: $r = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$.

(VI) Rayon de la sphère tangente aux arêtes: $\rho = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6}$.

(VII) Rayon de la sphère circonscrite: $R = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6}$.

92. De ces trois dernières valeurs on déduit

(VIII) $$Rr = \frac{a^2}{8} = \rho^2.$$

Nous voyons ainsi que: Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux six arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et le rayon de la sphère circonscrite.

93. Il est facile de trouver, pour le rayon de la sphère ex-inscrite, la valeur

$$\text{(IX)} \qquad r' = \tfrac{1}{6} a \sqrt{6}.$$

On trouve ainsi que:

Dans le tétraèdre régulier:

1° le rayon de la sphère ex-inscrite est double du rayon de la sphère inscrite;

2° le rayon de la sphère circonscrite est triple du rayon de la sphère inscrite.

Troisième Partie.

Méthode directe et élémentaire pour calculer en déterminants la surface du triangle et le volume du tétraèdre en valeur des côtés.

94. Cette partie est tout-à-fait indépendante de ce qui précède. Les procédés que nous y avons employés sont simples et directs. Nous y avons exposé la méthode la plus rapide et la plus élémentaire que fournissent les déterminants pour calculer la surface du triangle et le volume du tétraèdre.

§ I. Surface du triangle.

95. **Nouvelles expression de la surface du triangle.** Considérons le triangle ABC (Fig. 9), dont nous représenterons les trois côtés BC, CA, AB respectivement par a, b, c et les trois angles par A, B, C. Soient O le centre et R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle. Si nous tirons les droites AO, BO, CO, nous décomposons le triangle donné ABC dans le trois triangles BCO, CAO, ABO.

Or, l'angle BOC étant le double de l'angle A la perpendiculaire

OD abaissée du centre O sur le côté BC formera avec le rayon OD un angle égal à l'angle A; on a donc

$$OD = OB \cos DOB = S \cos A,$$

de sorte que la surface du triangle BCO sera $\frac{1}{2} aR \cos A$. On a de même $CAO = \frac{1}{2} bR \cos B$, $ABO = \frac{1}{2} cR \cos C$. Donc il vient, pour la surface S du triangle donné ABC

$$S = \frac{1}{2} aR \cos A + \frac{1}{2} bR \cos B + \frac{1}{2} cR \cos C,$$

ou

(I) $$S = \frac{1}{2} R (a \cos A + b \cos B + c \cos C).$$

Ainsi la surface d'un triangle est égale au demi-rayon du cercle circonscrit multiplié par la somme des produits que l'on obtient, en multipliant chaque côté par le cosinus de l'angle opposé.

96. **Corollaire.** La surface d'un triangle est égale au demi-rayon du cercle circonscrit multiplié par le périmètre du triangle, dont les sommets sont les pieds des trois hauteurs du triangle donné. (*G. Dostor*, L'Instruction publique, 1874, page 328).

97. Multiplions l'égalité (I), d'abord membre à membre, puis en croix, par l'égalité connue

$$4RS = abc;$$

nous obtenons

(II) $$8S^2 = abc(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

(III) $$R^2 = \frac{abc}{2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)}$$

98. **Surface du triangle en valeur des côtés.** La relation (II) peut s'écrire

$$\frac{8S^2}{abc} - a \cos A - b \cos B - c \cos C = 0.$$

Or, si nous projetons sur chaque côté du triangle la ligne brisée formée par les deux autres côtés, nous formons les trois nouvelles égalités

$$a - o.\cos A - c \cos B - b \cos C = 0,$$
$$b - c \cos A - o.\cos B - a \cos C = 0,$$
$$c - b \cos A - a \cos B - o.\cos C = 0.$$

Entre ces quatre équations éliminons les trois quantités $-\cos A$, $-\cos B$, $-\cos C$; nous obtenons l'équation résultante

$$\begin{vmatrix} \frac{8S^2}{abc} & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne

$$\frac{8S^2}{abc}\begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix};$$

mais le déterminant du premier membre est égal à $2abc$ donc on a

$$\text{(IV)} \qquad 16S^2 = -\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix}.$$

99. On sait quo le premier membre $16S^2$ est égal à un produit de quatre facteurs du second degré; par conséquent on a

$$\text{(V)} \qquad -\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix} = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$= 16p(p-a)(p-b)(p-c), \quad \text{où} \quad 2p = a+b+c.$$

100. **Deuxième forme du déterminant précédent.** Multiplions les trois dernières lignes par les quantités respectives bc, ca, ab; le déterminant sera multiplié par le produit $bc.ca.ab = a^2b^2c^2$, de sorte qu'il vient

$$16a^2b^2c^2S^2 = -\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ abc & o & bc^2 & cb^2 \\ abc & ac^2 & o & ca^2 \\ abc & ab^2 & ba^2 & o \end{vmatrix};$$

divisons les quatre colonnes par les quantités respectives abc, a, b et c; le déterminant se trouvera divisé par le produit $abc.a.b.c = a^2b^2c^2$ et nous obtenons

$$\text{(VI)} \qquad 16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

101. **Surface du triangle déterminé par l'intersection d'un plan avec les trois plans de coordonneés.** Supposons qu'un plan P coupe les trois axes de coordonnés OX, OY, OZ aux points A, B, C, à des distances de l'origine

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c$$

et proposons-nous de calculer la surface S du triangle ABC.

Si les côtés de ce triangle sont

$$BC = a', \quad CA = b', \quad AB = c',$$

nous avons

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -c'^2 & -b'^2 \\ 1 & -c'^2 & 0 & -a'^2 \\ 1 & -b'^2 & -a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le second déterminant se déduit du premier, en multipliant par -1 d'abord la première ligne puis les dernières colonnes résultantes.

Or les trois triangles OBC, OCA, OAB donnent

$$-a'^2 = 2bc\cos\lambda - b^2 - c^2,$$
$$-b'^2 = 2ca\cos\mu - c^2 - a^2,$$
$$-c'^2 = 2ab\cos\nu - a^2 - b^2$$

où λ, μ, ν sont les inclinaisons mutuelles YOZ, ZOX, XOY des trois axes de coordonnées; par suite on peut écrire

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2ab\cos\nu - a^2 - b^2 & 2ca\cos\mu - c^2 - a^2 \\ 1 & 2ab\cos\nu - a^2 - b^2 & 0 & 2bc\cos\lambda - b^2 - c^2 \\ 1 & 2ca\cos\mu - c^2 - a^2 & 2bc\cos\lambda - b^2 - c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Multiplions la première ligne successivement par a^2, b^2, c^2 et ajoutons les résultats respectivement aux trois autres lignes; il nous vient

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 2ab\cos\nu - b^2 & 2ca\cos\mu - c^2 \\ 1 & 2ab\cos\nu - a^2 & b^2 & 2bc\cos\lambda - c^2 \\ 1 & 2ca\cos\mu - a^2 & 2bc\cos\lambda - b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions maintenant la première colonne successivement par a^2, b^2, c^2 et ajoutons les résultats respectivement aux trois dernières colonnes; nous trouvons que

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a^2 & 2ab\cos\nu & 2ca\cos\mu \\ 1 & 2ab\cos\nu & 2b^2 & 2bc\cos\lambda \\ 1 & 2ca\cos\mu & 2bc\cos\lambda & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions enfin par 2 la première ligne, puis divisons par 2 les trois dernières colonnes résultantes; le déterminant sera divisé par $2^3:2 = 4$. Nous obtenons ainsi l'expression demandée

$$\text{(VII)} \qquad 4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ 1 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ 1 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix}.$$

§ II. Volume du tétraèdre.

102. **Hauteur du tétraèdre en valeur des trois arêtes contiguës à cette hauteur et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes.** Considérons le tétraèdre $OABC$. Du sommet O tirons dans le solide une droite quelconque OD qui fait avec les arêtes issues de ce sommet O les angles respectifs α, β, γ. Conservons les notations du n⁰ précédent, posons $OD = d$ et soient x, y, z les coordonnées du point D.

Projetons la droite OD et le contour brisé $x+y+z$ successivement sur OD et sur les trois arêtes ou axes de coordonnées OA, OB, OC. Nous obtenons les quatre équations homogènes du premier degré

$$\begin{aligned} -d + x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma &= 0, \\ -d\cos\alpha + x + y\cos\nu + z\cos\mu &= 0, \\ -d\cos\beta + x\cos\nu + y + z\cos\lambda &= 0, \\ -d\cos\gamma + x\cos\mu + y\cos\lambda + z &= 0 \end{aligned}$$

entre les quatre variables $-d, x, y, z$. Elimant ces inconnues, on obtient la relation générale

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cela fait, supposons que la droite OD soit la hauteur du tétraèdre issue du sommet O et rencontrant en H la face opposée ABC. Si nous faisons $OH = h$, nous aurons, par les triangles rectangles OAH, OBH, OCH, les relations

$$\text{(1)}\qquad h = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma.$$

Dans le déterminant (VIII) multiplions, d'abord les trois dernières colonnes, puis les trois dernières lignes par les quantités respectives a, b, c. La relation (VIII) devient, en égard aux égalités (1),

$$\begin{vmatrix} 1 & h & h & h \\ h & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ h & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ h & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en divisant par h la première ligne et la première colonne,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{h^2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ 1 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ 1 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

De cette relation nous tirons l'équation

$$\text{(IX)}\qquad \frac{1}{h^2}\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ 1 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ 1 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix}$$

qui donne la hauteur h du tétraèdre $OABC$, qui est issue du sommet O.

103. **Volume de ce tétraèdre en valeur des trois arêtes contiguës a, b, c et de leurs inclinaisons mutuelles λ, μ, ν.** Le second membre de l'équation précédente (IX) est égal à la valeur (VII) de $4S^2$. Or si nous représentons par V le volume de notre tétraèdre, nous avons

$$V = \tfrac{1}{3}Sh, \quad \text{d'où} \quad 4S^2 = \frac{36V^2}{h^2}.$$



Il vient donc

$$\text{(X)}\qquad 36V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix},$$

ou, en divisant par a, b, c d'abord les premières lignes, puis les trois colonnes

$$\text{(XI)}\qquad 36V^2 = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2\varDelta^2,$$

en posant

$$\text{(2)}\qquad \varDelta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

104. **Volume du tétraèdre en valeur des six arêtes.** Multiplions par -2 les trois lignes du déterminant (X), il nous vient

$$288V^2 = -\begin{vmatrix} -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2c^2 \end{vmatrix}.$$

A ce déterminant nous pouvons substituer un déterminant équivalent du cinquième ordre et écrire

$$288V^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ b^2 & 0 & -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ c^2 & 0 & -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & a^2 & -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ 0 & b^2 & -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ 0 & c^2 & -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2b^2 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons d'abord la seconde ligne aux trois suivantes, puis la seconde colonne aux trois dernières; nous obtenons

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & c^2+a^2-2ca\cos\mu \\ 1 & b^2 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & 0 & b^2+c^2-2bc\cos\lambda \\ 1 & c^2 & c^2+a^2-2ca\cos\mu & b^2+c^2-2bc\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

Mais les triangles OBC, OCA, OAB donnent

(3)

$$b^2+c^2-2bc\cos\nu = a'^2,\quad c^2+a^2-2ca\cos\mu = b'^2,\quad a^2+b^2-2ab\cos\nu = c'^2.$$

Substituant dans l'égalité précédente, nous trouvons l'expression cherchée

$$\text{(XII)}\qquad 288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & a'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ III. Rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

105. **Rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur de trois arêtes contiguës et de leurs inclinaisons mutuelles.** Soit I le centre de cette sphère et R son rayon. Si nous supposons que la droite OD (n⁰ 102) passe par le point I et que A', B', C' soient les milieux des arêtes OA, OB, OC, les triangles rectangles OIA', OIB', OIC' nous donneront

$$\text{(4)}\qquad \frac{a}{2} = R\cos\alpha,\quad \frac{b}{2} = R\cos\beta,\quad \frac{c}{2} = R\cos\gamma.$$

Dans le déterminant (VIII) multiplions par $2R$ la première ligne et la première colonne; il nous vient, en ayant égard aux égalités (4)

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où nous tirons

$$\text{(XIII)}\qquad 4R^2\varDelta^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

106. **Rayon de la sphère circonscrite en valeur de six arêtes.** Multiplions par a, b, c les trois dernières lignes de ce déterminant; puis par $-2a$, $-2b$, $-2c$ les trois dernières colonnes; enfin divisons par -2 la première ligne résultante; il nous vient

$$16a^2b^2c^2\varDelta^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ b^2 & -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ c^2 & -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2c^2 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons d'abord la première ligne aux trois suivantes, puis la première colonne aux trois autres colonnes, nous obtenons

$$16a^2b^2c^2\varDelta^2R^2 = -$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & c^2+a^2-2ca\cos\mu \\ b^2 & a^2+b^2-2ab\cos\nu & 0 & b^2+c^2-2bc\cos\lambda \\ c^2 & c^2+a^2-2ca\cos\mu & b^2+c^2-2bc\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais nous avons trouvé (n⁰ 103) que $a^2b^2c^2\varDelta^2 = 36V^2$; par conséquent, nous trouvons, en ayant égard aux égalités (3)

$$\text{(XIV)}\qquad 576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

107. Aux nos 72 et 73 on a transformé ce déterminant dans les deux suivants

$$\text{(XV)}\qquad 576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{(XVI)}\qquad 576\,V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

108. Si l'on rapproche ce dernier déterminant de celui (V) du n° 99, qui donne la surface du triangle en valeur des trois côtés, on verra de suite que

$$\text{(XVII)}$$

$$576\,V^2R^2 = (aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')(aa'+bb'+cc')$$

ou

$$72\,V^2R^2 = P^2(P^2-aa')(P^2-bb')(P^2-cc')$$

en posant

$$aa'+bb'+cc' = 2P^2.$$

Table des matières.

VII.

Equation générale des deux tangentes menées d'un même point à une conique et équation du cône circonscrit á une surface du second degré.

Par

Georges Dostor.

---

1. Pour déterminer ces équations sous leur forme implicite, nous allons établir deux théorèmes très importants sur les fonctions homogènes du second degré, qui trouvent leur application constante en Géométrie analytique.

Une fonction entière du second degré, entre trois variables, est nécessairement de la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D.$$

Nous pouvons rendre cette fonction homogène par rapport aux variables, en y remplaçant celles-ci par leurs rapports à l'unité u, et en considérant cette unité comme une quatrième variable. La fonction, dans ce cas, peut être désigné par $f(x, y, z, u)$ et devient

$$(1)\quad f(x, y, z, u) = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy + 2Cxu+2C'yu+2C''zu+Du^2.$$

Nous donnerons à cette fonction le nom de fonction générale quadratique à trois variables distinctes.

2. Pressons les derivées de cette fonction successivement par rapport aux quatre variable x, y, z et u; il nous vient

$$(2)\qquad \begin{cases} f_x' = 2(Ax + B''y + B'z + Cu), \\ f_y' = 2(B''x + A'y + Bz + C'u), \\ f_z' = 2(B'x + By + A''z + C''u), \\ f_u' = 2(Cx + C'y + C''z + Du). \end{cases}$$

Multiplions ces quatre dérivées respectivement par x, y, z, u et ajoutons, nous obtenons

$$xf_x' + yf_y' + zf_z' + uf_u' = 2(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + (2Cxu + 2C'yu + 2C''zu + Du^2).$$

Le second membre est visiblement égal au double de la fonction (1); donc on a

$$\text{(I)}\qquad 2f(x, y, z, u) = xf_x' + yf_y' + zf_z' + uf_u'.$$

Théorème I. Ainsi La double fonction quadratique, rendue homogène est égale à la somme des dérivées par rapport à toutes les variables, multipliées respectivement par ces variables.

3. Dans la fonction (1) remplaçons les variables x, y, z, u respectivement par $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, $u+u'$, où x', y', z', u' designent des quantités constantes, numériques ou littérales. Dans la fonction résultante, l'ensemble des termes du second degré par rapport aux variables x, y, z et u sera la fonction (1) elle-même; l'ensemble dês termes du second degré par rapport aux accroissements x', y', z' et u' sera encore la fonction (1) dans la quelle les variables x, y, z et u ont été remplacées leurs accroissements x', y', z' et u', tandisque les termes du premier degré par rapport à x, y, z, u seront

$$x(2Ax' + 2B''y' + 2B'z' + 2Cu') + y(2B''x' + 2A'y' + 2Bz' + 2C'u') + z(2B'x' + 2By' + 2A''z' + 2C''u') + u(2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + 2Du'),$$

ou bien

$$xf_{x'}' + yf_{y'}' + zf_{z'}' + uf_{u'}'.$$

Le développement de la nouvelle fonction sera donc

$$\text{(II)}\qquad f(x+x', y+y', z+z', u+u') = f(x, y, z, u) + xf_{x'}' + yf_{y'}' + zf_{z'}' + uf_{u'}' + f(x', y', z'\, u').$$

Théorème II. Donc, Lorsque, dans la fonction quadratique rendue homogène, on donne aux variables x, y, z, u les accroissements respectifs x', y', z', u', la fonction s'accroît 1° de la valeur qu'elle prend si l'on y remplace x,

y, z, u respectivement par x', y', z', u'; et 2° de la valeur que prend l'expression $xf_x'+yf_y'+zf_z'+uf_u'$ si l'on y fait la même substitution dans les dérivées f_x', f_y', f_z', f_u'.

4. Dans le développement précédent (II), changeons x, y, z, u respectivement en x', y', z', u'; il est évident que la fonction ne change pas; par conséquent on a

(III) $$xf_{x'}'+yf_{y'}'+zf_{z'}'uf_{u'}' = x'f_x'+y'f_y'+z'f_z'+u'f_u'.$$

5. Tout ce qui précède s'applique à toute fonction quadratique homogène, à un nombre quelconque de variables. Nous prendrons toujours les équations des droites, des coniques des plans et des surfaces du second degré sous leur forme homogène.

6. **Condition pour que la droite**

(3) $$ax+by+cz=0$$

soit tangente à la conique

(4) $$f(x,y,z) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2 = 0.$$

Soient x', y', z' les coordonnées homogènes du point de contact de la droite (3) avec la courbe (4). L'équation générale de la tangente en ce point étant

$$xf_{x'}'+yf_{y'}'+zf_{z'}' = 0,$$

et devant être identique avec (3), il faudra que l'on ait

$$\frac{f_{x'}'}{a} = \frac{f_{y'}'}{b} = \frac{f_{z'}'}{z} = 2\lambda,$$

ou bien

$$f_{x'}' = 2a\lambda,\quad f_{y'}' = 2b\lambda,\quad f_{z'}' = 2c\lambda.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer a, b, c et λ, les quatre équations

$$\begin{aligned} -0\lambda+ax'+by'+cz' &= 0,\\ -a\lambda+Ax'+By'+Dz' &= 0,\\ -b\lambda+Bx'+Cy'+Ez' &= 0,\\ -c\lambda+Dx'+Ey'+Fz' &= 0, \end{aligned}$$

dont la première exprime que le point de contact (x', y', z') est situé sur la droite (3).

Ces quatre équations, du premier degré entre les quatre inconnues $-\lambda, x', y', z'$, sont homogènes par rapport à ces inconnues;

elles ne seront compatibles que si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & A & B & D \\ b & B & C & E \\ c & D & E & F \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation de condition demandée.

Lorsque la droite (3) satisfait à cette condition, elle est tangente à la conique (4).

7. **Coordonnées du point de contact.** Les valeurs de ces coordonnées x', y', z' s'obtiennent en résolvant le système des trois équations

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} Ax' + By' + Dz' = a\lambda, \\ Bx' + Cy' + Ez' = b\lambda, \\ Dx' + Ey' + Fz' = c\lambda. \end{cases}$$

Appelons Δ le discriminant de la conique (4), de sorte que

$$\text{(6)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2;$$

et représentons, selon l'usage, par $\frac{d\Delta}{dA}$ la dérivée de Δ prise par rapport à A; nous aurons

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \frac{d\Delta}{dA} = CF - E^2, \quad \frac{d\Delta}{dC} = AF - D^2, \quad \frac{d\Delta}{dF} = AC - B^2, \\ \frac{d\Delta}{dB} = 2(DE - BF), \quad \frac{d\Delta}{dD} = 2(BE - CD), \quad \frac{d\Delta}{dE} = 2(BD - AE). \end{cases}$$

Cela posé, il est aisé de voir qu'on a

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} 2\Delta &= 2A\frac{d\Delta}{dA} + B\frac{d\Delta}{dB} + D\frac{d\Delta}{dD} \\ &= B\frac{d\Delta}{dB} + 2C\frac{d\Delta}{dC} + E\frac{d\Delta}{dE} \\ &= D\frac{d\Delta}{dD} + E\frac{d\Delta}{dE} + 2F\frac{d\Delta}{dF}; \end{aligned}$$

ensuite que

$$(9)\quad \begin{cases} 2B\dfrac{d\Delta}{dA}+C\dfrac{d\Delta}{dB}+E\dfrac{d\Delta}{dD}=2D\dfrac{d\Delta}{dA}+E\dfrac{d\Delta}{dB}+F\dfrac{d\Delta}{dD}=0,\\ A\dfrac{d\Delta}{dB}+2B\dfrac{d\Delta}{dC}+D\dfrac{d\Delta}{dE}=D\dfrac{d\Delta}{dB}+2E\dfrac{d\Delta}{dC}+F\dfrac{d\Delta}{dE}=0,\\ A\dfrac{d\Delta}{dD}+B\dfrac{d\Delta}{dE}+2D\dfrac{d\Delta}{dF}=B\dfrac{d\Delta}{dD}+C\dfrac{d\Delta}{dE}+2E\dfrac{d\Delta}{dF}=0. \end{cases}$$

Multiplions actuellement la première des équations (5) par $2\frac{d\Delta}{dA}$, la seconde par $\frac{d\Delta}{dB}$ et la troisième par $\frac{d\Delta}{dD}$, puis ajoutons; le multiplicateur de x' sera égal à 2Δ tandisque ceux de y' et z' se réduiront à zéro.

En opérant d'un manière analogue pour éliminer d'abord z' et x', ensuite x' et y', on trouve que

$$(\text{IV})\quad \begin{cases} \dfrac{2\Delta x'}{\lambda}=\dfrac{d\Delta}{dA}2a+\dfrac{d\Delta}{dB}\,b+\dfrac{d\Delta}{dD}c\\ \qquad =2a(CF-E^2)+2b(DE-BF)+2c(BE-CD),\\ \dfrac{2\Delta y'}{\lambda}=\dfrac{d\Delta}{dB}\,a+\dfrac{d\Delta}{dC}2b+\dfrac{d\Delta}{dE}c\\ \qquad =2a(DE-BF)+2b(AF-D^2)+2c(BD-AE),\\ \dfrac{2\Delta z'}{\lambda}=\dfrac{d\Delta}{dD}\,a+\dfrac{d\Delta}{dE}\,b+\dfrac{d\Delta}{dF}2c\\ \qquad =2a(BE-CD)+2b(BD-AE)+2c(AC-B^2). \end{cases}$$

Si l'on divise les deux premières de ces équations par la troisième et que l'on observe que $z'=1$, on aura les valeurs des coordonnées x' et y' du point de contact.

8. **Autre forme de l'expression de condition (III).** Multiplions les deux membres de l'équation (3) par $\frac{\Delta}{\lambda}$ et substituons dans le résultat les valeurs (IV); nous obtenons la relation

$$(\text{V})\quad \frac{d\Delta}{dA}a^2+\frac{d\Delta}{dB}ab+\frac{d\Delta}{dC}b^2+\frac{d\Delta}{dD}ac+\frac{d\Delta}{dE}bc+\frac{d\Delta}{dF}c^2=0$$

qui exprime sous une autre forme la condition de contact de la droite (3) avec la conique (4).

9. **Equation des tangentes menées par un point donné à la courbe du second degré (4).** Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées homogènes du point donné P, et x, y, z celles d'un point quelconque

M de l'une des deux tangentes menées de ce point à la conique (4) L'équation de cette tangente sera

(10) $$\frac{X-x_1}{x-x_1}=\frac{Y-y_1}{y-y_1}=\frac{Z-z_1}{z-z_1},$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes de la droite.

Désignons par x', y', z' les coordonnées du point de contact I de la tangente (10); on a évidemment

(11) $$x'=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda},\quad y'=\frac{x+\lambda y_1}{1+\lambda},\quad z'=\frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda},$$

où λ est une indéterminée dont la valeur dépend de la position du point M sur la tangente.

Puisque le point I appartient à la courbe (4), nous avons $f(x', y', z')=0$, ou, en ayant égard aux valeurs (11),

$$f\left(\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda},\ \frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda},\ \frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda}\right)=\frac{1}{(1+\lambda)^2}f(x+\lambda x_1, y+\lambda y_1, z+\lambda z_1)=0.$$

Or la formule (II) nous donne

$$f(x+\lambda x_1, y+\lambda y_1, z+\lambda z_1)=f(x,y,z)+x\lambda f_{x_1}'+y\lambda f_{y_1}'+z\lambda f_{z_1}'+\lambda^2 f(x_1,y_1,z_1);$$

par suite nous avons, pour déterminer la valeur de λ, l'équation du second degré

$$\lambda^2 f(x_1,y_1,z_1)+\lambda(xf_{x_1}'+yf_{y_1}'+zf_{z_1}')+f(x,y,z)=0.$$

Mais la droite (10) étant tangente, λ ne saurait admettre qu'une seule et même valeur, il s'ensuit que les deux racines de l'équation précédente, ce qui nous fournit la relation

(VI) $$(xf_{x_1}'+yf_{y_1}'+zf_{z_1}')^2-4f(x,y,z)f(x_1,y_1,z_1)=0$$

qui existe entre les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'une ou l'autre des deux tangentes issues du point P; elle est donc l'équation de ces deux tangentes.

10. **Equation des tangentes menées à une courbe du second degré (4) par les intersections de cette ligne avec une droite donnée**

(12) $$px+qy+rz=0.$$

Si nous appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées inconnues du point de concours P de ces tangentes, le point P sera le pôle de la droite (12), qui elle-même est dite la corde de contact des deux tangentes

Or l'équation de la corde de contact des deux tangentes issues du point (x_1, y_1, z_1), c'est-à-dire l'équation

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=0$$

devant être identique avec (12), on a nécessairement

(13) $$f'_{x_1}=2p\lambda,\quad f'_{y_1}=2q\lambda,\quad f'_{z_1}=2r\lambda,$$

où λ est une indéterminée.

Multiplions ces trois équations (13) par les coordonnées respectives x_1, y_1, z_1 et ajoutons; nous obtenons l'égalité

$$x_1f'_{x_1}+y_1f'_{y_1}+z_1f'_{z_1}=2\lambda(px_1+qy_1+rz_1),$$

qui, jointe aux équations (13), fournit le système des quatre équations

$$\begin{aligned}
-f(x_1, y_1, z_1)+\lambda px_1+\lambda qy_1+\lambda rz_1 &= 0,\\
-\lambda p \quad +Ax_1+By_1+Dz_1 &= 0,\\
-\lambda q \quad +Bx_1+Cy_1+Ez_1 &= 0,\\
-\lambda r \quad +Dx_1+Ey_1+Fz_1 &= 0;
\end{aligned}$$

entre les trois inconnues x_1, y_1, z_1. Ces quatre équations sont nécessairement compatibles; par suit leur déterminant est nul, ce qui fournit l'égalité

$$\begin{vmatrix} f(x_1, y_1, z_1) & \lambda p & \lambda q & \lambda r \\ \lambda p & A & B & D \\ \lambda q & B & C & E \\ \lambda r & D & E & F \end{vmatrix}=0.$$

On en tire

(14) $$f(x_1, y_1, z_1)=-\frac{\lambda^2}{\Delta}\begin{vmatrix} o & p & q & r \\ p & A & B & D \\ q & B & C & E \\ r & D & E & F \end{vmatrix},$$

où

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Les relations (13) donnent aussi

(15) $$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=2\lambda(px+qy+rz).$$

Il nous reste à substituer les valeurs (14) et (15) dans l'équation (VI) pour avoir l'équation demandée des deux tangentes. Celle-ci est donc

$$\text{(VII)}\quad f(x,y,z)\begin{vmatrix} o & p & q & r \\ p & A & B & D \\ q & B & C & E \\ r & D & E & F \end{vmatrix} = -(px+qy+rz)^2 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

10. **Condition pour que le plan**

$$(16)\qquad ax+by+cz+du=0$$

soit tangent à la surface du second degré

$$(17)\qquad f(x,y,z,u) = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy + 2Cxu+2C'yu+2C''zu+Du^2=0.$$

Si x', y', z', u' sont les coordonnées du point de contact, cette équation (16) devra être identique avec

$$xf_{x'}'+yf_{y'}'+zf_{z'}'+uf_{u'}'=0;$$

par conséquent, λ désignant une indéterminée, on devra avoir

$$f_{x'}'=2\lambda a,\qquad f_{y'}'=2\lambda b,\qquad f_{z'}'=2\lambda c,\qquad f_{u'}'=2\lambda d,$$

ou bien

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} -a\lambda+A\,x'+B''y'+B'z'+C\,u'&=0,\\ -b\lambda+B''x'+A'y'+B\,z'+C'u'&=0,\\ -c\lambda+B'x'+B\,y'+A''z'+C''u'&=0,\\ -d\lambda+C\,x'+C'y'+C''z'+D\,u'&=0.\end{aligned}\right.$$

Ces quatre équations, jointes à

$$(19)\qquad ax'+by'+cz'+du'=0,$$

forment un système de cinq équations homogènes du premier degré entre les inconnues $-\lambda$, x', y', z', u'; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul, ce qui fournit la condition demandée

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & A & B'' & B' & C \\ b & B'' & A' & B & C' \\ c & B' & B & A'' & C'' \\ d & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

11. **Coordonnées du point de contact.** Les valeurs de ces coordonnées s'obtiennent en résolvant, par rapport à x', y', z', u', le système des quatre équations (18). Cette résolution donne

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x'}{\lambda} &= (A'A''-B^2)(Da-Cd)+(BB'-A''B'')(Db-C'd) \\
&\quad +(B''B-A'B')(Dc-C''d), \\
\frac{\Delta y'}{\lambda} &= (A''A-B'^2)(Db-C'd)+(B'B''-AB)(Dc-C''d) \\
&\quad +(BB'-A''B'')(Da-Cd), \\
\frac{\Delta z'}{\lambda} &= (AA'-B''^2)(Dc-C''d)+(B''B-A'B')(Da-Cd) \\
&\quad +(B'B''-AB)(Db-C'd), \\
\frac{\Delta u'}{\lambda} &= (A'A''-B^2)(Ad-Ca)-(B'B''-AB)(C'c+C''b) \\
&\quad +(A''A-B'^2)(A'd-C'b)-(B''B-A'B')(C''a+Cc) \\
&\quad +(AA'-B''^2)(A''d-C''c)-(BB'-A''B'')(Cb+C'a) \\
&\quad +2(BB'B''-AA'A'')d,
\end{aligned}$$

où Δ représente le discriminant de l'équation du second degré, ayant pour valeur

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}=\left\{\begin{aligned} &D(AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2) \\ &+C^2(B^2-A'A'')+C'^2(B'^2-A''A) \\ &+C''^2(B''^2-AA')+2C'C''(AB-B'B'') \\ &+2C''C(A'B'-B''B)+2CC'(A''B''-BB'). \end{aligned}\right.$$

Si l'on divise les trois premières de ces équations par la quatrième et que l'on pose $u'=1$, on aura les valeurs des coordonnées x', y', z' du point de contact.

Ces coordonnées peuvent aussi s'exprimer en fonction des dérivées du discriminant Δ, prises par rapport aux coefficients de l'équation (17). On trouve que

$$\text{(IX)}\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{2\Delta x'}{\lambda} &= \frac{d\Delta}{dA}2a+\frac{d\Delta}{dB''}b+\frac{d\Delta}{dB'}c+\frac{d\Delta}{dC}d, \\
\frac{2\Delta y'}{\lambda} &= \frac{d\Delta}{dB''}a+\frac{d\Delta}{dA'}2b+\frac{d\Delta}{dB}c+\frac{d\Delta}{dC'}d, \\
\frac{2\Delta z'}{\lambda} &= \frac{d\Delta}{dB'}a+\frac{d\Delta}{dB}b+\frac{d\Delta}{dA''}2c+\frac{d\Delta}{dC''}d, \\
\frac{2\Delta u'}{\lambda} &= \frac{d\Delta}{dC}a+\frac{d\Delta}{dC'}b+\frac{d\Delta}{dC''}c+\frac{d\Delta}{dD}2d.
\end{aligned}\right.$$

12. **Autre forme de l'expression de condition (VIII).** Multiplions par $\frac{2\Delta}{\lambda}$ les deux membres de l'équation (19) et substituons dans le résultat les valeurs (IX); nous obtenons la relation

$$\text{(X)}\qquad \frac{d\Delta}{dA}a^2+\frac{d\Delta}{dA'}b^2+\frac{d\Delta}{dA''}c^2+\frac{d\Delta}{dB}bc+\frac{d\Delta}{dB'}ca+\frac{d\Delta}{dB''}ab$$

$$+\frac{d\Delta}{dC}ad+\frac{d\Delta}{dC'}bd+\frac{d\Delta}{dC''}cd+\frac{d\Delta}{dD}d^2=0,$$

qui exprime sous une autre forme la condition de contact de la droite (16) avec la surface (17).

13. **Condition pour que la droite**

$$\text{(20)}\qquad ax+by+cz+du=0,\qquad a'x+b'y+c'z+d'u=0$$

soit tangente à la surface du second degré (17). Les plans conduits par la droite donnée, c'est-à-dire par l'intersection des deux plans (20), sont représentés par l'équation générale

$$\text{(21)}\qquad (a+\lambda a')x+(b+\lambda b')y+(c+\lambda c')z+(d+\lambda d')=0.$$

Or l'une de ces plans est évidemment tangent à la surface (17) au point de contact x', y', z', u' de la droite (20). Si l'équation (21) représente ce plan tangent, on devra avoir les égalités de condition

$$\frac{f_{x'}'}{a+\lambda a'}=\frac{f_{y'}'}{b+\lambda b'}=\frac{f_{z'}'}{c+\lambda c'}=\frac{f_{u'}'}{d+\lambda d'}=-2k.$$

Les coordonnées du point de contact et les deux indéterminées λ et k devront donc satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
a\,x'+b\,y'+c\,z'+d\,u'&=0,\\
a'x'+b'y'+c'z'+d'u'&=0,\\
ak+a'\lambda k+A\,x'+B''y'+B'z'+C\,u'&=0,\\
bk+b'\lambda k+B''x\,+A'y'+B\,z'+C'u'&=0,\\
ck+c'\lambda k+B'x'+B\,y'+A''z'+C''u'&=0,\\
dk+d'\lambda k+C\,x'+C'\,y'+C''z'+Du'&=0,
\end{aligned}$$

dont les deux premières expriment que le point de contact appartient aux deux plans (20). Ces six équations sont homogènes et du premier degré par rapport aux inconnues; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. On trouve ainsi la relation de condition cherchée

$$\text{(XI)}\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \\ a & a' & A & B'' & B' & C \\ b & b' & B'' & A' & B & C' \\ c & c' & B' & B & A'' & C'' \\ d & d' & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

14. Equation générale des surfaces du second degré qui touchent les trois axes de coordonnées. Les équations de l'axe des x étant $y = 0$, $z = 0$, nous obtenons la condition pour que l'axe des x soit tangent à la surface (17), en faisant dans la relation (XI)

$$a = 0,\quad b = 1,\quad c = 0,\quad d = 0;$$
$$a' = 0,\quad b' = 0,\quad c' = 1,\quad d' = 0.$$

Mais cette condition se détermine plus rapidement en faisant $y = z = 0$ dans l'équation (17) de la surface, et en exprimant que les deux racines de l'èquation résultante en x

$$Ax^2 + 2Cx + D = 0$$

sont égales. Donc l'axe des x est tangent à la surface (17), si $C^2 - AD = 0$.

De même les deux autres axes de coordonnées sont tangents à la surface du second degré pour $C'^2 - A'D = 0$, $C''^2 - A''D = 0$.

Supposons que la surface soit à la fois tangente aux trois axes de coordonnées. Multiplions l'équation (17) de la surface par D et dans le résultat remplaçons AD, $A'D$, $A''D$ respectivement par C^2, C'^2, C''^2. L'équation de la surface sera

$$C^2x^2 + C'^2y^2 + C''^2z^2 + 2BDyz + 2B'Dzx + 2B''Dxy$$
$$+ 2CDx + 2C'Dy + 2C''Dz + D^2 = 0,$$

ou

$$(Cx + C'y + C''z + D)^2$$
$$+ 2(BD - C'C'')yz + 2(B'D - C''C)zx + 2(B''D - CC')xy = 0.$$

Ainsi, en représentant par $-P$, $-Q$, $-R$ les coefficients de yz, zx, xy, on voit que

$$\text{(XII)}\qquad (Cx + C'y + C''z + D)^2 = Pyz + Qzx + Rxy$$

est l'équation générale des surfaces du second degré qui touchent à la fois les trois axes de coordonnées.

Si l'on désigne par a, b, c les distances à l'origine des trois points de contact, cette équation prend la forme

$$\text{(XIII)} \qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)^2=\frac{yz}{p^2}+\frac{zx}{q^2}+\frac{xy}{r^2},$$

où p^2, q^2, r^2 sont les quotients de P, Q, R par D^2.

15. **Le Cône circonscrit à une surface du second degré (17).** Soient x_1, y_1, z_1, u_1 les coordonnées du sommet S du cône, et x, y, z, u celles d'un point quelconque M d'une génératrice SG du cône. L'équation de cette génératrice sera

$$\text{(22)} \qquad \frac{X-x_1}{x-x_1}=\frac{Y-y_1}{y-y_1}=\frac{Z-z_1}{z-z_1}=\frac{U-u_1}{u-u_1}.$$

Désignons par x', y', z', u' les coordonnées du point de contact I de la génératrice (20) avec la surface (17); on a évidemment

$$\text{(23)} \quad x'=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda},\quad y'=\frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda},\quad z'=\frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda},\quad u'=\frac{u+\lambda u_1}{1+\lambda}.$$

Le point I appartenant à la surface (17), on a $f(x', y', z', u')=0$, ou, en substituant les valeurs (23),

$$f\left(\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda},\ \frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda},\ \frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda},\ \frac{u+\lambda u_1}{1+\lambda}\right)$$
$$=\frac{1}{(1+\lambda)^2}f(x+\lambda x_1,\ y+\lambda y_1,\ z+\lambda z_1,\ u+\lambda u_1)=0.$$

Mais la formule (II) nous donne

$$f(x+\lambda x_1,\ y+\lambda y_1,\ z+\lambda z_1,\ u+\lambda u_1)$$
$$=f(x,\ y,\ z)+\lambda(xf_{x_1}'+yf_{y_1}'+zf_{z_1}'+uf_{u_1}')+\lambda^2 f(x_1,\ y_1,\ z_1).$$

Le second membre, égalé à zéro, fournit une équation, dont les racines ne seront égales que si

$$\text{(XIV)} \quad (xf_{x_1}'+yf_{y_1}'+zf_{z_1}'+uf_{u_1}')^2-4f(x,\ y,\ z,\ u)f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ u_1)=0.$$

Cette équation est donc celle du cône qui, émergeant du point (x_1, y_1, z_1, u_1) enveloppe la surface du second degré (17).

16. **Equation du cône qui touche la surface du second degré (17) suivant la courbe d'intersection de cette surface avec le plan**

$$\text{(24)} \qquad px+qy+rz+su=0.$$

En opérant, comme au n° 10, on trouve que ce cône est représenté par l'équation

(XV)

$$f(x,y,z,u)\begin{vmatrix} o & p & q & r & s \\ p & A & B'' & B' & C \\ q & B'' & A' & B & C' \\ r & B' & B & A'' & C'' \\ s & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = -(px+qy+rz+su)^2 \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

VIII.

Nouvelle expression de la surface du triangle, avec application au calcul en déterminant de cette surface en valeur des trois côtés du triangle.

Par

Georges Dostor.

---

1. Soient a, b, c les trois côtés BC, CA, AB du triangle ABC, O le centre et R le rayon du cercle circonscrit. Tirons les rayons OA, OB, OC; nous décomposerons le triangle donné ABC dans les trois triangles isocèles BCO, CAO, ABO, dont les angles au sommet O sont les doubles des angles opposés A, B, C du triangle.

Or, si du centre O nous abaissons sur le côté BC la perpendiculaire OD, elle passera par le milieu D de ce côté BC et divisera l'angle au sommet BOC en deux parties égales.

La surface du triangle BCO est égale à la moitié du produit $BC \times OD$; mais le triangle rectangle BDO donne $OD = OB \cos BOD = R \cos A$; d'ailleurs $BC = a$; par suite on trouve que le triangle

$$BCO = \tfrac{1}{2} a R \cos A;$$

on verrait de même que

$$CAO = \tfrac{1}{2} b R \cos B, \quad ABO = \tfrac{1}{2} c R \cos C.$$

Nous obtenons ainsi, pour la surface S du triangle,

$$S = \tfrac{1}{2} aR\cos A + \tfrac{1}{2} bR\cos B + \tfrac{1}{2} cR\cos C,$$

ou

(I) $$S = \tfrac{1}{2} R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

Nous voyons ainsi que

Théorème I. L'aire d'un triangle est égale au demi-rayon du cercle circonscrit, multiplié par la somme des produits que l'on obtient en multipliant chaque côté par le cosinus de l'angle opposé.

2. **Corollaire I.** Les droites qui joignent les pieds des hauteurs de notre triangle sont respectivement égales à $a\cos A$, $b\cos B$, $c\cos C$; on peut donc dire que

L'aire S d'un triangle est égale au demi-rayon du cercle circonscrit, multiplié par le périmètre du triangle qui a ses sommets aux pieds des hauteurs du triangle donné.

3. **Corollaire II.** La surface s du triangle formé par les pieds des hauteurs étant égale au périmètre de ce triangle multiplié par le demi-rayon du cercle inscrit, on voit que

La surface S d'un triangle est à la surface S du triangle formé par les pieds des hauteurs, comme le rayon du cercle circonscrit au premier triangle est au rayon du cercle inscrit dans le second.

4. Appelons R' le rayon du cercle circonscrit au triangle qui a ses sommets aux pieds des hauteurs du triangle donné ABC. Nous avons

(1) $$4R's = a\cos A . b\cos B . c\cos C = abc\cos A\cos B\cos C.$$

Mais les angles du triangle s étant respectivement $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$, il nous vient

$$s = \tfrac{1}{2} b\cos B . c\cos C . \sin 2A = bc\sin A . \cos A\cos B\cos C$$

ou bien

(I) $$s = 2S . \cos A\cos B\cos C.$$

Divisant (1) par (2) nous obtenons

$$4R' = \frac{abc}{2S} = 2R$$

ou $R' = \tfrac{1}{2} R$. Donc

Théorème II. Le rayon du cercle qui passe par les pieds des trois hauteurs d'un triangle est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle.

5. **Corollaire.** On en conclut de suite que

Dans un triangle, le rayon du cercle qui passe par les points de concours des bissectrices des angles extérieurs, est le double du rayon du cercle circonscrit au triangle.

6. Multiplions l'équation (I) par l'égalité $4RS = abc$, d'abord membre à membre, puis en croix; nous obtenons les deux expressions

$$\text{(II)} \qquad S^2 = \tfrac{1}{8}abc(a\cos A + b\cos B + c\cos C),$$

$$\text{(III)} \qquad R^2 = \frac{abc}{2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)}.$$

7. L'équation (II) est très importante; elle nous permet de trouver immédiatement l'expression en déterminant de la surface du triangle en valeur des trois côtés.

En effet, si nous considérons cette équation comme simultanée avec les trois équations que l'on obtient, en projetant sur chaque côté du triangle la ligne brisée formée par les deux autres côtés, nous aurons un système de quatre équations

$$\begin{aligned}
\frac{8S^2}{abc} - a\cos A - b\cos B - c\cos C &= 0,\\
a - o.\cos A - c\cos B - b\cos C &= 0,\\
b - c\cos A - o.\cos B - a\cos C &= 0,\\
c - b\cos A - a\cos B - o.\cos C &= 0
\end{aligned}$$

entre les trois inconnues $-A$, $-B$, $-C$.

L'élimination de ces inconnues nous donne de suite la résultante

$$\begin{vmatrix} \frac{8S^2}{abc} & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix} = 0,$$

d'où nous tirons

$$\frac{8S^2}{abc}\begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix}.$$

Or le déterminant du premier membre est égal à $2abc$; nous obtenons donc

$$\text{(IV)} \qquad 16S^2 = - \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix}$$

par le carré de la quadruple surface du triangle dont les côtés sont a, b, c.

8. Nous pouvons donner une autre forme au déterminant (IV). Pour cela multiplions les trois dernières colonnes par les quantités respectives bc, ca et ab: le déterminant sera multiplié par le produit $bc.ca.ab = a^2b^2c^2$ et il nous viendra

$$16a^2b^2c^2S^2 = - \begin{vmatrix} o & abc & abc & abc \\ a & o & ac^2 & ab^2 \\ b & bc^2 & o & ba^2 \\ c & cb^2 & ca^2 & o \end{vmatrix};$$

divisons actuellement les quatre lignes respectivement par abc, a, b et c; le déterminant sera divisé par le produit $abc.a.b.c = a^2b^2c^2$ et nous obtiendrons encore

$$\text{(V)} \qquad 16S^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & o & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

pour l'expression du carré de la quadruple surface du triangle.

Note. Considérons, indépendamment de ce qui précède, un triangle ABC, dont nous désignerons les trois côtés par a, b, c et par A, B, C les angles opposés. Soient a', b', c' les côtés et A', B', C' les angles du triangle $A'B'C'$ formé par les pieds des trois hauteurs; et représentons par a_1, b_1, c_1 les côtés et par A_1, B_1, C_1 les angles du triangle formé par les centres des trois cercles ex-inscrits. Il sera facile de voir qu'on a

$$a' = a\cos A, \qquad b' = b\cos B, \qquad c' = c\cos B,$$
$$A' = \pi - 2A, \qquad B' = \pi - 2B, \qquad C' = \pi - 2C;$$

puis

$$a_1 = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}, \quad b_1 = \frac{b}{\sin\frac{B}{2}}, \quad c_1 = \frac{c}{\sin\frac{C}{2}},$$

$$A_1 = \frac{B+C}{2}, \quad B_1 = \frac{C+A}{2}, \quad C_1 = \frac{A+B}{2}.$$

Or si nous désignons par R, R', R_1 les rayons des cercles circonscrits à ces trois triangles, nous aurons

$$R = \frac{a}{2\sin A},$$

$$R' = \frac{a'}{2\sin A'} = \frac{a\cos A}{2\sin 2A} = \frac{a\cos A}{4\sin A\cos A} = \frac{a}{4\sin A},$$

$$R_1 = \frac{a_1}{2\sin A_1} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}} \times \frac{1}{2\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}} \times \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{\sin A};$$

donc on voit de suite que

$$R_1 = 2R = 4R'.$$

Si en autre S, S', S_1 expriment les surfaces de nos trois triangles ABC, $A'\ B'\ C'$, A_1, B_1, C_1 on trouvera aisément que

$$S' = 2S\cos A\cos B\cos C,$$

et

$$S_1 = \frac{S}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

IX.

Ein stereometrisches Problem.

Von

Siegmund Günther.

---

§. 1. Vor Kurzem wurde in dieser Zeitschrift von Bender[1]) die Aufgabe behandelt, die grösste Anzahl congruenter Kugeln anzugeben, welche sich auf ein und dieselbe Kugel vom gleichen Radius auflegen lassen. Die Aufgabe ist an und für sich von geometrischem Interesse, sie hat jedoch auch eine molecularphysicalische Bedeutung, insoferne sie die Anzahl derjenigen Atome normirt, welche mit einem gegebenen Atome allerhöchstens in directen Contact zu treten vermögen. Anders formulirt können wir auch sagen: Man ersieht daraus, wie viele Atome sich zu gleicher Zeit in der Wirkungssphäre eines Atomes von doppeltem Radius, also achtfachem körperlichen Inhalte befinden können. Hiebei ist allerdings jedes einzelne Atom als kugelförmig vorausgesetzt; allein wie wenig innere Gründe dieser Hypothese zur Seite stehen mögen, so werden wir uns derselben gleichwohl[2]) im Interesse der Rechnung wie einer übersichtlichen Darstellung der Erscheinungen nicht entschlagen können.

Die Auflösung von Bender war, wie in einer Notiz[3]) der Redaction hervorgehoben wurde, insoferne keine genügende, als sie zwar nachwies, dass bei einer bestimmten Anordnung, für 12 Kugeln Platz vorhanden sei, es aber unentschieden liess, ob nicht durch geeignete Verschiebung dieser Kugeln der zum Auflegen einer dreizehnten Kugel erforderliche Raum hergestellt werden könnte. Diesen Kernpunkt der Frage hat Hoppe in jener Anmerkung erledigt und gezeigt, dass 12 in der Tat die Maximalzahl sei. Da jedoch zu dieser Feststellung

die Variation von 6 Kugeln verwandt wurde, so dürfte es sich wohl empfehlen, die nämliche Untersuchung zuvor mit Hülfe einfacherer Betrachtungen durchzuführen. Um noch einmal in Kürze das Ziel der eigentlichen Aufgabe zu fixiren: Es soll gezeigt werden, dass es unmöglich ist, 13 gleiche Kugeln mit einer ebensolchen zur Berührung zu bringen.

1) Bender, Bestimmung der grössten Anzahl von Kugeln, welche sich auf eine gleiche Kugel auflegen lassen, Archiv d. Math. u. Phys. 56. Band. S. 302.

2) Budde, Ueber die Abweichungen der Gase, insbesondere des Wasserstoffs, vom Mariotte'schen Gesetz, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. Jahrgang. S. 298.

3) Hoppe, Anmerkung zu Bender's Aufsatz Archiv d. Math. u. Phys. 56. Band. S. 307.

§. 2. Denken wir uns, es seien wirklich auf die Kugel vom Radius R 13 ihr gleiche Kugeln aufgelegt, und legen wir an jede derselben aus dem Mittelpunkte der gegebenen Kugel (wir wollen dieselbe mit I bezeichnen) einen Berührungskegel; alsdann ist ersichtlich, dass keine zwei dieser Kegel einander schneiden dürfen, indem sonst auch mit den von ihnen umhüllten Kugeln das Gleiche der Fall wäre. Jeder solche Berührungskegel ist eine Rotationsfläche und schneidet deshalb aus der concentrischen Kugel I einen kleinen Kreis vom Radius ϱ aus. Der obigen Bedingung können wir dann auch die substituiren, dass diese Kugelkreise sich nicht schneiden dürfen. Im Ganzen entstehen unsrer Annahme gemäss 13 solche Kreise, deren Flächen zusammengenommen kleiner sein müssen als die Oberfläche von Kugel I. Dass sich diess wirklich so verhält, kann ohne Schwierigkeit nachgewiesen werden.

Bezeichnen wir die Oeffnung jedes einzelnen Kegels mit α, so besteht offenbar die Relation

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{2R} = \tfrac{1}{2},$$

also

$$\alpha = 60^0.$$

Den sphärischen Radius ϱ ergiebt demzufolge die Proportion

$$\varrho : 2r\pi = 30 : 360,$$

woraus

$$\varrho = \frac{r\pi}{6}$$

folgt. Der in sphärischem Masse gemessene Inhalt eines kleinen Kugelkreises vom Radius ϱ bestimmt sich gleich

$$r^2 . 2\pi(1 - \cos\varrho).$$

Setzt man somit der Einfachheit halber $r = 1$, so ist der Inhalt

$$J = 2\pi\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi(1 - \cos 30^0) = \pi(2 - \sqrt{3}).$$

Wird dann

$$\sqrt{3} = 1{,}73205$$

angenommen, so erhält man

$$13 J = 13 . 3{,}1416 . (2 - 1{,}73) = 10{,}9433.$$

Hingegen ist die Gesammtoberfläche der Kugel I gleich

$$4 r^2 \pi = 4 . 3{,}1416 = 12{,}5664.$$

Die Differenz hat also den Wert

$$12{,}5664 - 10{,}9433 = 1{,}623.$$

Es fragt sich also nunmehr, ob die sonst noch in Frage kommenden Oberflächenstücke nicht einen grössten Flächeninhalt liefern, als die so eben berechnete Zahl ausdrückt.

§. 3. Um hierüber ins Klare zu kommen, denken wir uns die 13 Kugeln in eine möglichst nahe Lage gebracht. Der bessern Uebersicht halber beginnen wir mit 4 Kugeln, die wir so anordnen, dass das zwischen den vier zugehörigen Kreisen mit dem Radius ϱ eingeschlossne Stück der Oberfläche von Kugel I ein Kleinstes wird. Damit überhaupt diese Figur eine geschlossne sei, müssen die 4 Kugeln so liegen, dass je zwei davon eine dritte berühren. Die weitren Betrachtungen können wir entschieden auch an vier in Einer Ebene befindlichen Kreisen vornehmen, indem die uns hier interessirenden Verhältnisse auf der Sphäre die nämlichen sind.

Es seien (Fig. 1) die 4 gleichen Kreise um A, B, C, D so construirt, dass bezüglich in den vier Punkten E, F, G, H Berührung eintritt; es entsteht dann ein Rhombus $ABCD$ mit der Seite er und dem spitzen Winkel $ABC = \varphi$. Um zu ermitteln, bei welchem Winkel φ das (in der Figur schraffirte) krummlinige Viereck $EFGH$ ein (natürlich nur relatives) Kleinstes wird, sehen wir zunächst zu, unter welchen Umständen sie ein Grösstes ist, und verschieben hierauf die Kreise so lange, als es angeht, die so erreichte Schlussstellung wird dann das gesuchte Minimum repräsentiren.

Der Inhalt des Rhombus ist

$$2r . 2r \sin\alpha,$$

Die vier Sectoren AEH, BEF, CFG, DGH ergeben zusammen den Kreisinhalt

$$r^2\pi,$$

so dass demnach der Inhalt jener Figur

$$j = 4r^2 \sin\alpha - r^2\pi$$

sein wird. Der Ausdruck erhält seinen grössten Wert dann, wenn

$$\sin\alpha = 1, \quad \alpha = 90^0$$

ist.

Wird nunmehr das Quadrat bei gleichbleibender Seitenlänge verschoben, bis eine weitere Verschiebung nicht mehr möglich ist, so gelangt man zu einer Anordnung der Kreise, bei welcher zwei der vorhin getrennt liegenden einander tangiren, und aus der viereckigen Figur $EFGH$ sind zwei congruente dreieckige mit einem gemeinschaftlichen Eckpunkte geworden. Für den Winkel φ ist dann die Relation diese:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2},$$

$$\varphi = 60^0.$$

Auf die Kugelfläche übertragen lautet dieses Resultat so:

Vier eine gegebene Kugelfläche von gleichem Radius berührende Kugeln nehmen von jener dann den geringsten Oberflächenteil in Anspruch, wenn die durch die vier Berührungspunkte der von den Tangentialkegeln aus der ersten Kugel ausgeschnittenen Kreise gebildete sphärische Viereck in zwei congruente Dreiecke zerfällt.

§. 4. Die nächste Frage, welche wir uns vorlegen müssen, ist die nach dem Flächeninhalt eines solchen Dreieckes. A, B, C (Fig. 2) mögen die sphärischen Centra dreier solcher Kreise sein, so dass

$$AD = AE = BD = BF = CE = CF = \varrho$$

ist. Wir suchen den Flächeninhalt l des (schraffirten) sphärischen Dreieckes DEF zu bestimmen.

Versteht man unter l' den Flächeninhalt eines der drei Sectoren

$$ADE, \; BFD, \; CEF,$$

unter l'' hingegen den Flächeninhalt des gesammten Dreieckes ABC, so ist offenbar

$$l = l'' - 3l'.$$

Sowohl für l', als auch für l'', ist die Kenntniss des Winkels

$$BAC = ACB = CBA = \psi$$

erforderlich. Eine bekannte Formel liefert*

$$\cos 2\varrho = \cos^2 2\varrho + \sin^2 2\varrho \cos\psi,$$

woraus

$$\cos\psi = \frac{\cos 2\varrho (1 - \cos 2\varrho)}{1 - \cos^2 2\varrho} = \frac{\cos 2\varrho}{1 + \cos 2\varrho}$$

sich ergiebt. Setzt man für ϱ den früher gefundenen Wert ein, so fliesst hieraus weiter

$$\psi = \arccos \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{1 + \cos \frac{\pi}{3}} = \arccos \tfrac{1}{3}.$$

Dann gilt die Proportion

$$\arccos \tfrac{1}{3} : 2\pi = l' : J,$$

und mit Substitution des bekannten Wertes von J aus §. 2,

$$l' = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \arccos \tfrac{1}{3}.$$

Sind α, β, γ die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks, so ist dessen Flächeninhalt durch den Ausdruck

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$

gegeben; in unsrem Falle sind diese drei Winkel unter sich gleich, und man hat

$$l'' = 3 \arccos \tfrac{1}{3} - \pi.$$

Da l' und l'' jetzt gefunden sind, so bekommt man zum Schlusse

$$l = \tfrac{3}{2} \sqrt{3} \arccos \tfrac{1}{3} - \pi.$$

Wie oft dürfen wir diese Grösse l zu sich selbst addiren, um die oben erhaltene Zahl

1,623

zu erreichen, resp. zu überschreiten?

§. 5. Die ganze Rechnung soll, da sie nicht zur Feststellung von Grössenbeziehungen, sondern nur zur Erkenntniss gewisser Grenzbedingungen dienen soll, unter Annahme der günstigsten Umstände geführt werden. Zur Berechnung des obigen Ausdrucks hat man:

$$\arccos \tfrac{1}{3} = 0{,}39183 . \pi; \quad \tfrac{3}{2} \sqrt{3} = 2{,}59808$$

Das Product ist nicht ganz $1{,}018 . \pi$, also

$$l = 0{,}018 \pi = 0{,}05655.$$

Diese Zahl ist in 1,623 etwas mehr als 28 mal enthalten. Nun kann jede aufgelegte Kugel nie mit 6 andern in Berührung kommen, also nie 6 Bogendreiecke wie DEF begrenzen. Lassen wir aber auch diese zu hoch gegriffene Zahl gelten, so werden zwischen den aufgelegten Kugeln immer erst $\frac{6}{3}\, 13 = 26$ solche Zwischenräume entstehen, also, da noch 28 Platz haben, die Unmöglichkeit der Berührung von 13 Kugeln nicht dargetan sein. Zum Beweise ist es demnach erforderlich den durch die Anordnung notwendigen Ueberschuss der Zwischenräume über ihr Minimum in Rechnung zu ziehen, ein Standpunkt, von dem jeder neue Versuch einer Vereinfachung des citirten Beweises auszugehen hat. Es hat sich ergeben:

Selbst trotz des absichtlich zu hoch angenommenen Wertes einer gewissen Zahl, nehmen je 3 von 13 gleichen eine Kugel des nämlichen Radius berührenden Kugeln keinen so grossen Teil jener Kugel für sich in Anspruch dass sich die Unmöglichkeit ergäbe, 13 Kugeln in der verlangten Weise anzuordnen.

§. 6. Die bisher angestellten Betrachtungen hatten nur den Zweck, die Unmöglichkeit von 13 congruenten Berührungskugeln ein und derselben Kugel darzutun. Es könnte jedoch möglich sein, a priori die grösste Anzahl solcher Berührungskugeln zu bestimmen. Die Angabe einer solchen Methode ist der Zweck der nächsten Zeilen, es verhilft uns dazu folgende Ueberlegung.

Wir nehmen an, es gäbe n solcher Kugeln; n ist natürlich eine ganze positive Zahl. Wir nehm es es als möglich an, diese n Kugeln in eine solche gegenseitige Lage zu bringen, dass die ihre Centra mit dem Mittelpunkte von Kugel I verbindenden Radien sämmtlich gleiche Winkel mit einander einschliessen. Irgend drei der Berührungspunkte werden dann ein sphärisch gleichseitiges Dreieck bilden, und es erhebt sich die Aufgabe, die Kugelfläche in n solche Dreiecke einzuteilen — eine Aufgabe, wie solche bereits den arabischen Mathematikern bis zu einem gewissen Grade sehr geläufig gewesen zu sein scheinen. Jene Aufgabe liefert uns in ihrer Lösung die Seitenlänge jenes Dreiecks, und es bleibt uns dann nur noch zu untersuchen, für welches n diese Länge noch statthaft ist. Für alle ganzzahligen positiven Werte n ist alsdann die bewusste Anordnung nicht mehr möglich. Den uns unbekannten Winkel des Dreiecks setzen wir gleich x. Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks, den Radius zur Einheit genommen,

$$3x-\pi,$$

und zur Bestimmung von x besteht die Gleichung

$$n(3x-\pi)=4\pi,$$

woraus der Wert

$$x=\pi\frac{n+4}{3n}$$

sich herleitet.

Die Seite y berechnet sich aus der bereits benützten Gleichung

$$\cos y=\cos^2 y+\sin^2 y\cos x.$$

Diese Gleichung giebt, wie oben, zunächst

$$\cos x=\frac{\cos y}{1+\cos y},$$

also

$$\cos y=\frac{\cos x}{1-\cos x},$$

und, mit Einsetzung der gefundenen Werte,

$$\cos y=\frac{\cos\pi\frac{n+4}{3n}}{1-\cos\pi\frac{n+4}{3n}}.$$

Andererseits ist jedoch y insoweit bestimmt, als es eine Grenze giebt, welche diese Grösse nicht überschreiten darf, ohne die Aufgabe illusorisch zu machen; es darf nämlich y nicht kleiner sein, als die Distanz zweier Berührungspunkte der Kugeln. Diese ist 60^0, und wir haben demgemäss die Gleichung

$$\cos 60^0=\tfrac{1}{2}=\frac{\cos\pi\frac{n+4}{3n}}{1-\cos\pi\frac{n+4}{3n}}$$

aufzulösen. Diess giebt

$$3\cos\pi\frac{n+4}{3n}=1,$$

$$\pi\frac{n+4}{3n}=\operatorname{arc}\cos\tfrac{1}{3}.$$

Nun ist

$$\pi\cdot\frac{22+4}{3.22}=\frac{13\pi}{33}>\operatorname{arc}\cos\tfrac{1}{3},$$

$$\pi\cdot\frac{23+4}{3.23}=\frac{9\pi}{23}<\operatorname{arc}\cos\tfrac{1}{3}.$$

d. h. bei 22 Dreiecken giebt es noch eine Lösung, bei 23 hingegen nicht mehr. Erstere Zahl widerspricht nicht dem Falle von 13 Kugeln. Das hier angewandte Verfahren kann also nicht a priori entscheiden.

X.

Miscellen.

1.

Kurze Notiz zu dem Aufsatze des Herrn H. Rath „Die rationalen Dreiecke“ (Archiv T. LVI. S. 188 ff.).

In der eben citierten interessanten Abhandlung hat Herr Rath übersehen, dass eine grosse Zahl seiner Sätze, auch derjenigen, welche er für neu hält, schon in der Mitte des X. Jahrhunderts unsrer Zeitrechnung von den Arabern ausgesprochen und bewiesen sind. F. Woepcke hat 1861 eine Uebersetzung eines anonymen Fragmentes herausgegeben [1]), das sich mit der Bildung der rechtwinkligen Dreiecke in ganzen Zahlen beschäftigt. Aus diesem fast vollständigen Fragmente — es fehlen nur einige Anfangszeilen, und deshalb auch der Name des Verfassers — entnehme ich unter andern folgende Sätze, welche sich sämmtlich auf Primdreiecke beziehen, denn nur solche (triangles souches) betrachtet der Verfasser.

Kein pythagoreisches Dreieck ist gleichschenklig.

Jede Hypotenusenzahl ist ungerade; sie lässt sich in die Summe zweier Quadrate zerlegen.

1) Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le Prince B. Boncompagni et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes. 1r partie: Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits. III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn. Rome 1861.

Jede Hypotenusenzahl hat die Form $12m+1$ oder $12m+5$.[1])

Diese letzte Eigenschaft gilt nicht umgekehrt, es ist also nicht jede Zahl von der Form $12m+1$ oder $12m+5$ eine Hypotenusenzahl, sondern nur diejenigen, welche sich in die Summe zweier Quadrate zerlegen lassen.

Ist die Zerlegung der Hypotenusenzahl m^2+n^2, so ist die Formel für die drei Seiten des betreffenden Dreiecks

$$a=m^2-n^2,\quad b=2mn,\quad c=m^2+n^2.$$

Das sind die von Herrn Rath sogenannten indischen Formeln, die aber schon Diophant in seinem VI. Buche constant benutzt.

Man hat stets $m+n=2p+1$, also ist dies immer eine ungerade Zahl, m und n sind relativ prim.

Eine Kathete ist stets eine gerade Zahl, die Hypotenuse und die andere Kathete beide ungerade.

Der anonyme Autor benutzt dann seine Resultate zur Lösung der gleichzeitigen Gleichungen

$$s^2+w=u^2,\quad s^2-w=v^2,$$

das heisst er versucht die Lösung der Aufgabe von den congruenten Zahlen, w ist dabei eine gegebene Zahl. In einer am Ende angehängten Zusammenstellung der Resultate geordnet nach den Hypotenusenzahlen finden sich sämmtliche Resultate des Herrn Rath bis zur Hypotenuse 205 eingeschlossen, und ausserdem noch die Lösung, welche für $d=13$, $n=1$ in der Rath'schen Tabelle auftreten würde, nämlich

$$a=28,\quad b=195,\quad c=197.$$

Von den congruenten Zahlen hat der Anonymus die 30 folgenden gefunden

5	34	210	429	2730
6	65	221	546	3570
14	70	231	1155	4290
15	110	286	1254	5610
21	154	330	1785	7954
30	190	390	1995	10374

Das Finden der congruenten Zahlen ist nach dem zweiten Tractat des Alhoçaïn der eigentliche Zweck der Theorie der Pythagoreischen Dreiecke.

Thorn, Juli 1874. M. Curtze.

1) Herr Rath hat die Form $4n+1$ angegeben. Da aber keine Hypotenusenzahl, wie man sich leicht überzeugt, durch 3 teilbar sein kann, so fällt die Form $12m+9$, welche in $4n+1$ steckt, weg; hier ist also der Araber genauer als Herr Rath.

2.

Ueber das Diagonalenfünfeck eines Kreisfünfeckes.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ in Fig. 1. seien 5 aufeinanderfolgende Punkte einer Kreisperipherie. Es bezeichne dann a_i die Seite $A_{i+2}A_{i+3}$, wo der Index $k+5$ mit dem Index k zusammenfällt. Die 5 Diagonalen dieses Kreisfünfeckes bilden selbst wieder ein Fünfeck $B_1B_2B_3B_4B_5$, wo B_i der Schnittpunkt zweier Diagonalen ist, die von den Endpunkten der Seite a_i gezogen werden können.

Es besteht nun eine Relation zwischen den Winkeln dieser beiden Fünfecke, welche auf folgende Weise gefunden werden kann.

Jeder Winkel A_i des Kreisfünfeckes wird durch zwei Diagonalen in drei Winkel geteilt; wird der mittlere derselben mit α_i bezeichnet, so erhält man:

$$A_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+4}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 2R$$
$$B_i = 2R - \alpha_{i+1} - \alpha_{i+4} = \alpha_i + \alpha_{i+2} + \alpha_{i+3}$$
$$A_i + B_i = 2R + \alpha_i = A_{i+1} + A_{i+4}$$

somit

$$B_i = A_{i+1} + A_{i+4} - A_i$$

welche 5 Gleichungen die gesuchte Beziehung darstellen.

Wien, den 13. Jan. 1874. Emil Hain.

3.

Ueber Kreise im Dreieck.

Werden in einem Dreieck ABC von den Ecken durch einen merkwürdigen Punkt O gerade Linien gezogen, welche die Seiten in $A_1B_1C_1$ treffen, so entstehen drei Paare von Dreiecken, deren In- und Umkreisradien in gegenseitigen Beziehungen stehen. Bezeichnen wir die Umkreisradien der Dreiecke ABA_1, ACA_1 mit r_{ab}, r_{ac} und die Inkreisradien mit ϱ_{ab}, ϱ_{ac}; so haben wir zunächst für O als den Schwerpunkt:

$$\frac{1}{\varrho_{ab}} - \frac{1}{\varrho_{ac}} = \frac{c-b}{F}$$
$$\Sigma\frac{1}{\varrho_{ab}} = \Sigma\frac{1}{\varrho_{ba}} = \frac{3}{\varrho} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\varrho'}$$
$$\Sigma\frac{r_{ab}r_{ac}}{a} = \frac{3r\Sigma a^2}{4F}$$

wo $abcr\varrho F$ Seiten, Um- und Inkreisradius und Flächeninhalt des Urdreieckes, ϱ' der Inkreisradius des von den Schwerpunkttransversalen als Seiten gebildeten Dreieckes sind.

Für den Höhenpunkt erhält man:

$$\frac{\varrho_{ab}}{\varrho_{cb}} = \frac{c}{a}$$

$$\Pi\varrho_{ab} = \Pi\varrho_{ba}$$

$$\varrho_{ab}(\varrho + s - b) + \varrho_{ac}(\varrho + s - c) = a\varrho$$

$$\Sigma(\varrho_{ab} + \varrho_{cb})(\varrho + s - b) = 2F$$

$$r_{ab} = \frac{c}{2} = r_{ba}$$

Für das Umkreiscentrum:

$$\frac{1}{\varrho_{ab}} - \frac{1}{\varrho_{ba}} = \frac{a-b}{c} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

$$\Sigma\frac{c}{\varrho_{ab}} = \Sigma\frac{c}{\varrho_{ba}}$$

$$\Sigma\frac{c^2}{\varrho_{ab}} = \Sigma\frac{c^2}{\varrho_{ba}}$$

$$\Sigma\frac{1}{a r_{ba}} = \frac{1}{r^2} = \Sigma\frac{1}{b r_{ab}} = \frac{1}{2r}\Sigma\frac{1}{AA_1}$$

Endlich gelten für das Inkreiscentrum folgende Relationen:

$$c\left(\frac{1}{\varrho_{ab}} - \frac{1}{\varrho}\right) = b\left(\frac{1}{\varrho_{ac}} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$\Sigma\frac{c}{\varrho_{ab}} = \Sigma\frac{c}{\varrho_{ba}}$$

$$\Pi\left(\frac{1}{\varrho_{ab}} - \frac{1}{\varrho}\right) = \Pi\left(\frac{1}{\varrho_{ba}} - \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{16r^2 s}$$

$$\Pi(r_{ab} + r_{ac}) = 2r^2 s$$

Ausser diesen einfacheren Formeln für die vier wichtigsten merkwürdigen Punkte können auch allgemeine Beziehungen aufgestellt werden wie z. B.

$$r_{ab} = \frac{BA_1}{2\sin BAA_1}$$

$$\Pi r_{ab} = \Pi r_{ba}$$

Wien, Ende Februar 1874. **Emil Hain.**

4.

Grenzen für die Basis der natürlichen Logarithmen.

1. Aus der bekannten Formel:

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+b^n$$

ergiebt sich, wenn $a>b$, die Ungleichung:

$$[(n+1)b-na]a^n<b^{n+1}.$$

Hieraus findet Schlömilch in seinem Compendium der Mathematik für $a=1+\frac{1}{n}$ und $b=1+\frac{1}{n+1}$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

und somit:

$$(1+\tfrac{1}{1})^1<(1+\tfrac{1}{2})^2<(1+\tfrac{1}{3})^3<(1+\tfrac{1}{4})^4 \quad \text{etc.}$$

2. Es ist:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Nun ist für $x>0$; $(1+x)^n>1+nx$ mithin auch

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1+\frac{n}{n^2-1}$$

$$>1+\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2-1}-\frac{1}{n}$$

$$>1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n^2-1)},$$

also um so mehr

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1+\frac{1}{n}$$

und somit

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

3. Für die vorstehende Ungleichung kann man auch schreiben:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

und auch

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

oder

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)},$$

also ist:

$$(1-\tfrac{1}{1})^{-1} > (1-\tfrac{1}{2})^{-2} > (1-\tfrac{1}{3})^{-3} > (1-\tfrac{1}{4})^{-4} \quad \text{etc.}$$

4. Da nun $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ für $n = \infty$, so ergiebt sich aus Nr. 1. und Nr. 3.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

oder auch

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > e > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

wodurch e so genau berechnet werden kann als man nur will.

5. Aus 4. folgt noch, wenn x und $y > 0$,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = e+x$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e-y.$$

Hieraus durch Multiplication:

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2+e(x-y)-xy,$$

und wenn man $2n$ statt n setzt:

$$\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n} = e^2+e(x-y)-xy.$$

Für $n = \infty$ werden x und y gleich Null, also:

$$e = \lim\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n.$$

Für $n = 1000$ giebt diese Formel e auf sieben Stellen richtig, während $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ eine solche Genauigkeit erst bei $n = 10^8$ giebt.

Kiel, den 18. Oktober 1874. **Ligowski.**

5.

Sommation directe et élémentaire des carrés, des cubes et des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers.

1. **Somme des carrés.** Nous avons

$$(n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1,$$
$$(n-1)(2n-1) = 2n^2-3n+1;$$

d'où nous tirons, en retranchant membre à membre,

$$(n+1)(2n+1)-(n-1)(2n-1) = 6n.$$

Multipliant par $\frac{n}{6}$, nous obtenons l'identité

$$\text{(I)} \qquad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n^2.$$

Dans cette formule, remplaçons n successivement par tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à n, nous trouvons la suite des égalités

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6},$$
$$2^2 = \frac{2.3.5}{6} - \frac{1.2.3}{6},$$
$$3^2 = \frac{3.4.7}{6} - \frac{2.3.5}{6},$$
$$4^2 = \frac{4.5.9}{6} - \frac{3.4.7}{6},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(2n-2)(n-1)(2n-3)}{6},$$
$$n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Si nous ajoutons membre à membre et que, dans le second membre de l'égalité résultante, nous supprimons les termes égaux et de signes contraires qui sont en évidence et qui s'entredétruisent, nous aurons la somme des carrés des n premiers nombres entiers

$$\text{(II)} \qquad 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. **Corollaire.** Puisque

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

nous obtenons, en divisant membre à membre,

(III) $$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{n+(n+1)}{3},$$

c'est-à-dire que

La somme des carrés des n premiers nombres entiers, divisée par la somme de ces mêmes nombres, est égale au tiers de la somme du dernier nombre n et du nombre suivant $n+1$.

3. **Somme des cubes.** Il est facile de voir que

$$(n+1)^2-(n-1)^2=4n;$$

multipliant par $\frac{n^2}{4}$, on obtient l'identité

(IV) $$\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(n-1)^2n^2}{4}=n^3.$$

Si nous remplaçons, dans cette formule, n successivement par tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à n, nous aurons la suite des équations

$$1^3=\frac{1^2.2^2}{4},$$

$$2^3=\frac{2^2.3^2}{4}-\frac{1^2.2^2}{4},$$

$$3^3=\frac{3^2.4^2}{4}-\frac{2^2.3^2}{4},$$

$$4^3=\frac{4^2.5^2}{4}-\frac{3^2.4^2}{4},$$

. . . .

$$(n-1)^3=\frac{(n-1)^2n^2}{4}-\frac{(n-2)^2(n-1)^2}{4},$$

$$n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(n-1)^2n^2}{4},$$

qu'il nous suffira d'ajouter membre à membre, pour trouver de suite, après suppression des parties communes,

(V) $$\frac{n^2(n+1)^2}{4}=1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ainsi la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces n premiers nombres.

4. **Corollaire.** Elevons au carré les deux membres de l'égalité (II), et divisons l'égalité résultante membre à membre par (V), nous obtenons

$$\text{(VI)} \qquad \frac{(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)^2}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3} = \left[\frac{n+(n+1)}{3}\right]^2,$$

ou, en langage ordinaire;

Le carré de la somme des carrés des n premiers nombres entiers, divisé par la somme des cubes de ces mêmes nombres, est égal au carré du tiers de la somme du dernier nombre n et du nombre suivant $n+1$.

Georges Dostor.

Litterarischer Bericht
CCXXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Die Rechenkunst im sechzehnten Jahrhundert. Von A. Kuckuck. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin 1874. Weidmann. 28 S.

Das sechzehnte Jahrhundert macht, wie die Schrift constatirt, eine Epoche in der Rechenkunst gleichzeitig in mehrfacher Beziehung. Hier vollzog sich der Uebergang vom römischen Verfahren, dem Rechnen mit römischer Zahlendarstellung, „auf der Linie“, mit Anwendung des Abacus, zum Decimalrechnen „mit der Feder“, welches den Gelehrten schon längst bekannt war, ohne dass bis dahin auch bei ihnen der augenfällige Vorzug die alte Gewohnheit zu verdrängen vermocht hätte, in schnellen Schritten; denn es erschienen von da an zahlreiche Rechenbücher in deutscher Sprache, und das Decimalrechnen ward Lehrgegenstand in den Elementarschulen. Die Beschreibung des alten Verfahrens, die Vorführung der betreffenden Zustände im 16. Jahrhundert und der Verdienste einzelner Autoren und ein schliesslicher Hinweis auf einen neuen bessernden Uebergang im 19. Jahrhundert, wo der Rechenunterricht mehr und mehr auf Einsicht statt wie früher auf Gedächtniss und gedankenlos eingeübte Regeln basirt wird, machen den Inhalt der Schrift aus.

Ein anderer Hinweis auf das 19. Jahrhundert hätte wol näher gelegen. Es war die wissenschaftsfeindliche Macht des Gewohnheitshanges charakterisirt an einem hervorragenden Beispiele, welches ausserdem zeigt, dass wenn auch erst nach Jahrtausenden ihr Wider-

stand gegen den Fortschritt endlich durchbrochen wird. Sind wir nun in diesem Kernpunkte während der 3 Jahrhunderte weitergekommen? Darf man heutzutage seine Beibehaltung anerkannt unpraktischer Einführungen nicht mehr mit der alten Gewohnheit rechtfertigen? Das Gegenteil ist hinreichend bekannt: wir brauchen nur an die Nonagesimal- und Sexagesimalteilung der Winkel zu erinnern, welche längst abgeschafft wäre, wenn die Gewohnheitsmacht nicht als Motiv zur Festhaltung, sondern, wie es in der Wissenschaft allein vernünftig ist, als Motiv zur Bekämpfung gälte. Erst wenn diese Lehre der Geschichte in weiterm Kreise in die Ueberzeugungen eingedrungen ist, kann von Fortschritt in der Hauptsache die Rede sein.

H.

Zur Erinnerung an Jakob Steiner. Ein Vortrag, gehalten in der mathematischen Section der schweiz. naturforschenden Versammlung an ihrer Jahresversammlung in Schaffhausen, den 22. August 1873. von Dr. C. F. Geiser, Professor am schweizerischen Polytechnikum. Zürich. Cäsar Schmidt (Schabelitz). 37 S.

Die Schrift enthält die Lebensgeschichte Steiner's von Jugend an, Schilderung der Persönlichkeit, Züge seines Auftretens, seinen Umgang mit Crelle und Abel, dann mit Jacobi, sein Verhältniss zu Humboldt, Entstehung und kurze Charakterisirung seiner Arbeiten, in einer durch heitern Witz belebten, anregenden Sprache.

H.

Intorno ad alcune lettere del Lagrange nota di A. Genocchi. 1874. G. B. Paravia e C. Estr. dagli Atti della R. Accad. d. Sc. di Torino, vol. IX. (21. Giugno). 19 S.

Mitteilung von 4 neuen Briefen Lagrange's an Fagnano 1755., Zanotti 1762., Gherli 1776. und Lorgna 1781. in italienischer Sprache, nebst Nachrichten über diese und andere Briefe desselben Autors.

H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VII. Roma 1874. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Das Maiheft enthält Geschichte der Entwickelung der Theorie der Kettenbrüche bis Euler, von Siegmund Günther. Uebersetzt in's Italienische von Alfonso Sparagna; ferner einen Brief von F. Woepcke an B. Boncompagni über eine Methode zur approximativen Bestimmung der Irrationalen 2. Grades. H.

Methode und Principien*).

Die ersten Sätze vom Dreiecke und die Parallelen. Nach Bolyai's Grundsätzen bearbeitet von Dr. Carl Spitz, Professor am Polytechnikum in Carlsruhe. Eine Beigabe zu des Verfassers Lehrbuch der ebenen Geometrie. Mit 43 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig und Heidelberg. 1875. C. F. Winter. 44 S.

Es hätte der Ueberzeugung des Verfassers, wie derselbe sagt, entsprochen, die in der vorliegenden Separatschrift entwickelte Methode als die einzig streng wissenschaftliche schon in der neusten Auflage seines Lehrbuchs der ebenen Geometrie zur Durchführung zu bringen; nur aus Rücksichten hat er sich zur Abtrennung entschlossen, so jedoch, dass die Einordnung unmittelbar erfolgen kann. Es leuchtet wohl beim ersten Blicke ein, dass die getroffene Auskunft eine glückliche, die eigentliche Absicht eine verfehlte war. Die einseitige Durchführung einer allein bestimmenden Idee war gerade geeignet eine Separatschrift zu einem lehrreichen und interessanten Ganzen zu machen; das Ergebniss ist aber weit entfernt mit dem Lehrsystem der Mathematik in Harmonie zu stehen und dem Unterrichtszwecke zu genügen. In dieser Beziehung wollen wir das Unternehmen nicht aus dem blossen Anschein verurteilen, sondern die Irrtümer aufweisen, welche ihm zugrunde liegen. In der Tat hat Bolyai, diese Tatsache ist der Ausgangspunkt der Schrift, bewiesen, dass der Satz von der Dreieckswinkelsumme auf Erfahrung beruht; was er aber nicht bewiesen hat, was als unwahr überhaupt nicht bewiesen werden kann, und doch von Vielen gedankenlos geglaubt wird, ist, dass irgend ein mathematischer Satz, oder die Evidenz irgend eines Schlusses nicht auf Erfahrung beruhte. Riemann hat die Frage weit umfassender aufgestellt und untersucht; die Ergebnisse sind jedoch sämmtlich positiv, und auf solche brauchen wir nicht einzugehen, sie bieten sich leicht genug dar. Die Schrift beginnt, um nur eins anzuführen, mit der Congruenz und definirt diese durch Deckung auf

*) Diese Abteilung der Litteratur stand bisher am Ende, sogar hinter den vermischten Schriften, sie ist hiernach vom Begründer des Archivs (unter dem Titel: Schriften über Unterrichtsmethode) als blosser Anhang betrachtet worden. Da jedoch inzwischen, namentlich durch bedeutendere Arbeiten, das Interesse an den principiellen Fragen sehr zugenommen hat, so lässt sich der dahin gehörigen Litteratur die coordinirte Stellung nicht länger versagen. Sie soll von jetzt an als zweite der 3 umfassenden Abteilungen, welche den 10 Abteilungen über die einzelnen Wissenschaftszweige vorausgehen, unmittelbar auf die Geschichte folgen, wodurch in die ursprüngliche Ordnung, soweit sie eben vollzogen war, wol in keiner Weise ein Eingriff geschieht. (D. Red.).

einander übertragener Figuren. Was heisst aber Uebertragung, wenn wir nicht die Figuren in festem Material haben, deren Unveränderlichkeit die Erfahrung uns anzunehmen erlaubt? Wie können wir Massstab oder Zirkel gebrauchen, ohne diese Voraussetzung der Unveränderlichkeit zu machen, die doch erst vermöge der Erfahrung einen Sinn hat? Wollte man den empirischen Elementen in der Mathematik nachgehen, so würde sich zeigen, dass alles empirischen Ursprungs ist, und hiermit wird die Unterscheidung des Winkelsatzes nichtig. Der Verfasser ist in einem Punkte durch Bolyai aufgeklärt worden, hat aber im übrigen die ungeprüfte vulgäre Meinung festgehalten, sieht nun im Abstand des Dunkel und Hell seiner Anschauung einen sachlichen Gegensatz, und hält sich sofort für verpflichtet, diesem Erzeugniss seiner Illusion Geltung im Unterricht zu verschaffen. Zunächst ist nun wol ersichtlich, dass die Statuirung eines einzelnen Erfahrungssatzes innerhalb des mathematischen Lehrsystems der Natur der Sache gar nicht entspricht, mithin auch die exacte Gestaltung nicht fördert. Sie ist nur eine zufällige, auf Unkenntniss beruhende, heterogene Behandlungsweise eines an sich homogenen Lehrstoffs.

Ferner waltet ein Irrtum in Betreff derjenigen Erfahrung, auf welche sich der Dreieckswinkelsummensatz stützen soll. Erst wird nämlich dieser auf die engste Voraussetzung zurückgeführt, dass die Summe der Winkel eines einzigen Dreiecks nicht $<$ 2 Rechte sei, und die Erfahrung soll nun darin bestehen, dass wir die Winkel eines Dreiecks ausmessen. Es ist bekannt, dass jede Messung einen möglichen Fehler übrig lässt, folglich kann diejenige Erfahrung, welche der Verfasser meint, nie stattfinden. Auch sind alle die frühern Mathematiker, welche von jener Reduction nichts wussten, von der Allgemeingültigkeit des Satzes auf Grund irgend welcher Erfahrung überzeugt gewesen. Hiernach muss doch die Rolle, welche der Erfahrung zukommt, eine wesentlich andere sein, als der Verfasser sich vorstellt. Wollen wir also nicht blind zuwerke gehen, so ist vor allem die Frage befriedigend zu beantworten: Wie gehen vollkommen ideelle und allgemeine Erkenntnisse aus Erfahrungen hervor, die in jeder Hinsicht unvollkommen sind, da sie nur an individuellen Objecten, nie an einer Allheit gemacht werden, mit Fehlern behaftet sind und nur mangelhafte Objecte, d. h. keine gerade Linie, keinen Kreis u. s. w. vorfinden? Diese Frage lässt sich exact beantworten. Von ihrer Lösung hängen erst die Gesichtspunkte ab, die bei eventueller Geltendmachung in der Lehrmethode massgebend sein würden. Da diese Erfordernisse bei der Absicht des Verfassers nicht in Betracht gezogen sind, so ist es wol begründet, wenn sie nicht der Beistimmung begegnet; nur ist zu wünschen, dass dem unbedachten Vor-

geben nicht blosse Langsamkeit der Entschliessung, sondern eine verständliche Würdigung des Sachverhalts entgegensteht.

Der wesentliche Inhalt der vorliegenden Schrift besteht in der strengen successiven Deduction derjenigen Reihe von Sätzen über das Dreieck und die Parallelen, welche von der Grundeigenschaft der Ebene unabhängig gelten. In Betreff der Parallelen mussten hier Einführungen gemacht werden, die in der wirklichen Planimetrie, wo durch einen Punkt nur eine Parallele mit einer Geraden geht, bedeutungslos sind. Der vermeintliche Erfahrungssatz, der sich aber nur durch den Namen von einem Axiom, d. h. dem notwendigen Minimum der Voraussetzung unterscheidet, kommt erst am Ende hinzu; die ungenügende Auffassung des Begriffs der Erfahrung war daher für die ganze Bearbeitung gleichgültig; diese hatte ihren strengen und deutlichen Gesichtspunkt für sich. Ein weiteres Gute hatte auch wol die Bestimmung der Bearbeitung für den Schulunterricht: wir haben dadurch eine methodisch geordnete und für Anfänger verständliche Darstellung der Bolyai'schen Geometrie erhalten. H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Die Elemente der Mathematik. Ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht an höhern Lehranstalten. Von Wilhelm Gallenkamp, Direktor der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule in Berlin. I. Theil. Arithmetik und Algebra. 1. Abtheilung — Planimetrie. Mit einer Figurentafel. Vierte Auflage 1874. II. Theil. Der Arithmetik und Algebra 2. Abtheilung, die Stereometrie und die Trigonometrie. Mit drei Figurentafeln. Dritte verbesserte Auflage. 1872. Iserlohn. Julius Bädeker. 331 S.

Die Abfassung des Leitfadens entspricht mehr dem Zwecke der Vergegenwärtigung als der exacten Begründung der Lehrobjecte. In ersterer Beziehung ist der Verfasser, soweit sich die Gelegenheit darbot, selbständig productiv vorgegangen, in letzterer bleibt die Leistung merklich gegen die billigsten Anforderungen zurück. Die 1. Abteilung der Arithmetik und Algebra, umfassend die Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen, dann in Brüchen, dann in algebraischen Zahlen, die Lehre von den Potenzen und die Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten, zeigt wenig eigentümliches. Es mag erwähnt werden, dass hier eine, vor Zeiten sehr gerügte und seit Decennien kaum wieder gehörte Erklärung der Multiplication — Multipliciren heisst eine Zahl so aus einer gegebenen Zahl (durch Addition) entstehen lassen, wie eine andere gegebene Zahl (durch Addition) aus

1 entstanden ist" — aufs neue auftritt. Die Parenthese lässt es zweifelhaft erscheinen, ob die Beifügung notwendige Ergänzung sein soll; jedenfalls ist sie keine vollständige Ergänzung; es musste dann heissen „Addition gleicher Summanden", d. h. um die Erklärung richtig zu verstehen, bedarf es der andern Erklärung: „Multiplication ist Addition gleicher Summanden". Will man also die vorliegende Erklärung nicht durch Substitution einer andern umstossen, so gehört die Parenthese nicht hin. Ohne letztere nun ist die Aufstellung in der Tat richtig und instructiv, nur nicht als Definition, sondern als leitender Gesichtspunkt, im allgemeinen zur Auffassung des Connexes des fortgebildeten Begriffs mit dem ursprünglichen, im besondern zur Auffassung der Multiplication als Uebergang zu einer neuen Einheit. Von beiden Anwendungen findet sich freilich im Leitfaden nichts; vielmehr gilt hier der Satz als Definition und dient zu Scheinbeweisen. Auf weitere logische Desiderata einzugehen hat kein Interesse, da im ganzen auf Entwickelung des logischen Vermögens zu wenig Wert gelegt ist. Im übrigen ist eine grosse Sorgfalt im Ausdruck und der Formulirung der Sätze anzuerkennen: die Abfassung ist durchweg natürlich, einfach, praktisch angemessen und vollständig bestimmend.

In der Planimetrie, handelnd von der graden Linie und der Lage grader Linien gegen einander, vom Dreieck, vom Viereck und Vieleck, der Grössenvergleichung der gradlinigen geschlossenen Figuren, der Formvergleichung gradliniger Figuren und vom Kreise, gelangt die Methode des Verfassers erst zu ihrer Entfaltung: das Ganze erwächst aus einem deutlichen, gleichmässig durchgeführten Princip, stellt sich als originelle Leistung dar und macht einen einnehmenden Eindruck. Der Anschauung, welche erst in diesem Gebiete den genügenden Spielraum findet, ist das bei weitem vorwiegende Recht eingeräumt, die logische Verbindung als ganz nebensächlich behandelt Diametral entgegen dem euklidischen Princip, alles auf ein Minimum von Voraussetzungen in strengem Nexus zu stützen, wird hier soviel als möglich jeder Satz selbständig auf genetische Weise abgeleitet. Die Erfolge dieser Methode geben sich sehr augenfällig kund: durch einfache Betrachtung werden manche Resultate auf überraschend kurzem Wege gewonnen, zu denen sonst eine Reihe von Schlüssen unter Zuziehung vorherbewiesener Sätze nötig war. Ist gleich die Entdeckung der Sache an sich nicht neu, so kommt es doch noch sehr darauf an, ob sie mit mehr oder minder Glück für die Elementarmathematik verarbeitet wird. Die Durchführung ist es, die, wenn man nur die eine, in Rede stehende Seite der Geistesbildung im Auge hat, zum grössten Teil recht wol gelungen ist. Sehr auffallend nämlich sticht hiergegen die Behandlung der harmonischen Punkte und Strahlen (S. 108.) ab, die in Ermangelung des Zusammenhangs, aus

sie gerissen zu sein scheint, für den Unkundigen gar nicht zu verstehen ist, wo also die Verarbeitung ganz gefehlt hat. Doch ist überhaupt eine Methode zu billigen, die eine, zwar immer nur von Wenigen gekannte und geschätzte, doch unersetzliche und seit Jahrtausenden für den Fortschritt der Wissenschaften wirksame Geistesfähigkeit in dem Masse vernachlässigt, wie es hier geschieht? Zwar lernt der Schüler hier gelegentlich Folgerungen ziehen, auch ist stets an's Licht gestellt, was notwendig und ausreichend ist, damit eine Figur bestimmt sei; was aber notwendig und ausreichend sei, damit eine mathematische Erkenntniss evident und unausweichlich sei, bringt die Behandlungsweise nie zum Bewusstsein. Gleich im Anfang wird das berüchtigte Dogma vom gemeinsamen Punkt der Parallelen, welches der Schüler gegen den Protest der Vernuft glauben muss, wol mehr aus Gehorsam als aus Ueberzeugung, verkündigt; deren Erläuterung steht nicht dabei, und Controle durch Anwendung folgt nirgends. Soweit im Uebrigen Begründung vorhanden ist, pflegt sie momentanem Zwecke zu dienen, und erscheint nicht als notwendig für die Folge. Um der bezeichneten Forderung, Ausbildung des exacten Denkens, Genüge zu tun, braucht man keinen der Vorzüge der vereinfachenden Methode preiszugeben. Euklid und Steiner sind nicht beschränkende und einander ausschliessende Autoritäten, sondern Zeugen der Fähigkeit des Geistes, beide darin einig, Vertrauen zu dieser zu erwecken, zwar Fähigkeiten in verschiedener Richtung, die sich aber um so mehr einander fordern, je weiter die Ausbildung in der einen fortschreitet: je freier und umfassender die Anschauung, desto notwendiger ist die Selbstcontrole, deren Vernachlässigung zur Abhängigkeit von Autoritäten, d. i. zum Verlust des grössten und unersetzlichen Vorzugs mathematischer Bildung, führt. Ist es nun gleich angemessen, bei aller Reform der Methode die strenge Logik stets als oberstes Gesetz festzuhalten, so ist es auch nicht unmöglich, von einem Versuche der vorliegenden Art auszugehen, und, gehörige Beherrschung des Lehrstoffs vorausgesetzt, ohne Einbusse der Einfachheit, und ohne im wesentlichen den Lehrgang zu ändern, die noch fehlenden Bedingungen mathematischer Ausbildung zu ergänzen.

Der 2. Teil enthält zuerst die höhern Lehrobjecte aus der Arithmetik und Algebra, die Logarithmen, Reihen, Kettenbrüche, Permutationen und Combinationen, simultanen und quadratischen Gleichungen. Die Darstellung ist eine gut gewählte, der richtigen Auffassung stets entsprechende, und das Notwendige allseitig berücksichtigende. Bei den Logarithmen hätte wol der Grund, warum die Grundzahl in der Schrift nicht bezeichnet zu werden braucht, obwol er in der Erklärung des Moduls verhüllt liegt, auch ausgesprochen werden sollen, der nämlich, dass der Logarithmus von x zur Grund-

zahl a, $=\frac{\log x}{\log a}$, nur von x, nicht von a auf neue Weise abhängt, (nicht transscendente Function zweier Variabeln ist.) Ferner hat sich der Verfasser noch nicht bewogen gefunden, die zufällig einmal aufgebrachte, dann gedankenlos auf den Schulen fortgepflanzte Schreibweise negativer Charakteristik 0,31563 — 2, welche bei Multiplication und Division Aufenthalt und Verwickelung mit sich bringt, statt der, aller Anwendung auf die leichteste Weise entsprechenden Schreibung 8,31563 — 10, wie sie jeder Rechner kennt, abzuschaffen. Es ist gewiss berechtigt, künstliche Auskunftsmittel zur Vereinfachung von den Schülern selbst finden zu lassen; aber sie erst zur Aneignung und Einübung schlechter Auskunftsmittel zu nötigen, die sie sich später wieder abgewöhnen müssen, ist doch unbedingt verwerflich.

Besonderes Interesse hat die Aufnahme der Determinantenlehre in den Cursus der Algebra. Sie schliesst sich hier an die vorausgehende Lehre von den simultanen linearen Gleichungen an. Es möchte sich wol als das natürlichere und in mehrfacher Hinsicht instructivere empfehlen, sie als Anwendung auf die Combinationslehre folgen zu lassen, und die simultanen Gleichungen gleich anfangs mit Hülfe der Determinanten zu behandeln. Von dem an einer andern Bearbeitung der Theorie für die Schulen im 222. litt. Ber. S. 10. gerügten grossen Missgriff, die Theorie durch vorausgehende, ermüdende Rechnungen vorzubereiten, ist die vorliegende frei (die gleichfalls unnötigerweise vorausgehenden Specialitäten sind wol nur durch die Anknüpfung hervorgerufen). Sie führt sogleich die notwendigen Anordnungen in voller Allgemeinheit ein, und lässt in angemessener Kürze die einfachsten Hauptsätze folgen. Warum aber finden sich die der Determinantentheorie eigentümlichen, überraschend einfachen, und doch so weitgreifenden, und von den Schlüssen der gewöhnlichen Algebra so wesentlich unterschiedenen Schlüsse, welche jene Hauptsätze begründen, nicht ausgesprochen? nicht als der lehrreichste Kern des Ganzen mit gesperrten Lettern gedruckt? Wenn an solcher Stelle das einemal nur steht: „Folgt aus 4." das anderemal eine Betrachtung nur angedeutet wird, die noch auszuführen sein würde, so kann man wol zweifeln, ob dem Verfasser nicht überhaupt jener einfache logische Connex entgangen ist. Kommen im übrigen die am 1. Teile des Leitfadens gemachten Ausstellungen im 2ten kaum in Betracht, so zeigt wol der genannte Punkt, dass sich eine ähnliche Geringachtung des logischen Vermögens auch hier geltend macht.

In der Stereometrie möchte es wol nicht gelungen sein, auch nur den beschränkten Zweck der Vergegenwärtigung des Lehrobjects zu erfüllen. Daran trägt wol die Vernachlässigung des logischen Ele-

mentes in der Planimetrie die Hauptschuld, aber nicht die einzige. Um das weitere Gebiet der dreifach ausgedehnten Gebilde zu beherrschen wird man gewiss wol tun beide Kräfte, Verstand und Vorstellung, zugleich in Anspruch zu nehmen. Will man alles durch blosse Vorstellung erreichen, so soll die Möglichkeit nicht bestritten werden. Dann aber war es doch die unglücklichste Massnahme, in die ersten Erklärungen Begriffe einzumischen, die keine Vorstellung zulassen, wie der unendlich entfernte Punkt, Behauptungen auszusprechen, die gerade der Vorstellung nach nicht wahr sind.

Die Trigonometrie ist ein sehr ausführlicher Schematismus und zeigt nichts methodisch erwähnenswertes. H.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz, Professor am Polytechnikum in Carlsruhe. Erster Theil: Die allgemeine Arithmetik bis einschliesslich zur Anwendung der Reihen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung nebst 2230 Beispielen und Uebungsaufgaben enthaltend. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig und Heidelberg 1874. C. F. Winter. 501 S.

Der Verfasser legt Gewicht auf seine Behandlung der entgegengesetzten Grössen, welche es ihm möglich gemacht habe, die Sätze über die Verbindung von Addition und Subtraction allgemein und ohne Umständlichkeit zu beweisen. Sie beruht auf der Darstellung der Zahl als Abscisse und der Auffassung beider Operationen als Fortschritt in entgegengesetzter Richtung. Diese Methode ist an sich nicht neu; eigentümlich ist daran der eingeführte Gegensatz. Anstatt die Construction als Darstellung vorhandener Zahlbegriffe zu gebrauchen, bemüht sich der Verfasser im Gegenteil, die auf neue Basis gestellten Begriffe abgesondert zu erhalten, und unterscheidet deshalb anfangs ausdrücklich Operations- und Richtungszeichen, die dann später identificirt werden. Das Bedenkliche dieser Distinction in didaktischer Beziehung fällt in die Augen: das von Natur Einfache wird erst in ein Doppeltes zerspalten, und damit in den Anfang der Disciplin eine Complication eingeführt, die der klaren Auffassung, der Aneignung und der Vertrautheit mit dem Erlernten sehr hinderlich im Wege steht. Dass dies ein Uebelstand ist, giebt sich offen zu erkennen; geht man aber auf den Grund, so zeigt sich, dass er bloss aus Irrtümern als Folge hervorgeht, und die Massnahme überhaupt verfehlt ist. Zunächst ist der Verfasser wol nur durch Mängel einiger Lehrbücher, die er zufällig allein kennt, zu der irrigen Meinung verleitet worden, die Begriffe entgegengesetzter Grössen und die Sätze über diese und die algebraischen Summen liessen sich nicht ohne Um-

ständlichkeit und allgemein aus der Addition und Subtraction ableiten. Diese ergeben sich sehr einfach aus der Vertauschbarkeit der Reihenfolge beliebiger Additionen und Subtractionen mit Beachtung des Umstandes, dass das Resultat eines Stückes der Reihe für weitere Rechnungen, in denen dasselbe vorkommt, verwendbar ist, das subtractive mithin ebensowol wie das additive Bedeutung hat. Hier bleiben die Operationszeichen und Vorzeichen von vorn herein und beständig identisch. Ist dies der Fall, so ist es ein didaktischer Fehler, von distinguirter Bedeutung auszugehen. Hierzu kommt noch, dass auf constructivem Wege der Begriff der entgegengesetzten Grössen unvollständig dargelegt wird; denn hier treten „positiv“ und „negativ“ als bloss relative Begriffe auf, was sie doch nicht sind, wie schon die Multiplication zeigt. Ein zweiter Irrtum liegt in der Beschränkung der Abscissenmethode auf die an der Grösse haftende Richtung. Hierdurch wird einige Confusion in die Begriffe gebracht: es entsteht der falsche Gegensatz zwischen Construction und Operation. als ob erstere nicht ebensogut auf den gesammten Zahl- und Operationsbegriff Anwendung zuliesse. In Wirklichkeit steht die Anschauung der Rechnung gegenüber; die Objecte aber sind beiden gemeinsam.

Abgesehen von diesem Punkte, den der Verfasser in der Vorrede betont, charakterisirt sich das Buch durch eine Häufung von Ungenauigkeiten und Unvollständigkeiten im Ausdruck, wie es wol kaum ein zweites Beispiel giebt. Um nur eins anzuführen, so fängt die Einleitung an: „Kann von zwei Dingen das eine ganz oder theilweise statt des andern gesetzt werden, so nennt man dieselben gleichartig (homogen), andernfalls ungleichartig (heterogen)“. Warum sollte man nicht Luft an die Stelle von Wasser setzen können? Die Wirkung der Substitution bleibt hier, wie überall, verschwiegen. Doch die Mängel bleiben nicht bloss formelle, sondern werden weiterhin sachliche von grossem Umfang, nur verbirgt sich der Anfang des Fehlers unter dem ungenauen Ausdruck. Unter Zahl wird nach anfänglicher Erklärung und nach Anwendung in Deductionen und Beweisen erst immer ganze Zahl verstanden, was nirgends gesagt ist. Erst bei den Brüchen heisst es ganze Zahl; ob ein Bruch eine Zahl sei, bleibt von da an zweifelhaft. Jedenfalls werden alle vorhergehenden über Zahlen aufgestellten Sätze ohne weiteres als gültig für rationale und irrationale Brüche betrachtet, wenn sie es in der Tat sind, was aber nirgends bewiesen ist. Die enorme Lücke ist daher vorhanden, liege sie nun in den Sätzen oder in deren Begründung. Die Multiplication ist in allen Deductionen auf Addition gleicher Grössen basirt (demgemäss auch die Beweise nicht auf gebrochene Multiplicatoren angelegt, was jedoch im Dunkeln bleibt), die Schreibung der Producte

als Summen wird sogar viel länger fortgesetzt als nötig war; gleichwol steht im Anfang des Capitels die Erklärung der Multiplication als Ableitung des Products aus dem Multiplicandus, wie der Multiplicator aus 1 entsteht, und, obgleich eine solche offenbar zu keinem Schlusse tauglich ist, bemüht sich doch der Verfasser die Täuschung zu erhalten, als ob alle Sätze aus ihr hervorgingen.

Im ganzen macht das Buch den Eindruck einer grossen logischen Unsicherheit. Um die Schüler nicht an eine solche zu gewöhnen, wäre nur zu wünschen, dass es beim Unterricht nicht in Anwendung käme. H.

Anhang zu dem ersten Theile des Lehrbuchs der allgemeinen Arithmetik. Von Dr. Carl Spitz, Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig und Heidelberg 1874. C. F. Winter. 93 S.

Die Andeutungen bestehen teils in vermittelnden Resultaten, nach denen in der Aufgabe nicht gefragt ist, teils in der Anleitung zum Ansatz der Gleichungen.

Geometrie.

Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte von Dr. Ad. Hochheim, Oberlehrer an der Höheren Gewerbeschule zu Magdeburg. Mit 14 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle 1874. Louis Nebert. 106 S.

Betrachtet man eine ebene Curve, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, als Darstellung einer Function einer Variabeln, so wird die gleiche Darstellung von deren Derivirten für irgend eine Linieneinheit die Differentialcurve der ersteren genannt; umgekehrt stellt dann die Ordinate der Urcurve die Quadratur der Differentialcurve dar. Nach kurzer Aufstellung der einfachsten allgemeinen Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken beider Curven geht die Schrift zur Anwendung auf die einzelnen Kegelschnitte, in der Reihenfolge: Parabel, Ellipse, Hyperbel — über, und leitet daraus eine grössere Reihe interessanter und sich successive leicht ergebender Theoreme, namentlich die Tangenten, Normalen, Polaren und Fusspunktcurven betreffend, ab. Die Behandlungsweise ist eine concinne,

exacte und wolgeordnete. In Vergleich mit vielen ähnlichen Schriften ist rühmlichst hervorzuheben, dass sich die vorliegende als selbständige Monographie frei von jeder partiellen Anlehnung an Fremdes erhalten hat und demgemäss die Bedeutung aller eingeführten Begriffe durch Erklärung oder durch die notwendigen Data ausser Zweifel stellt. Der Gegenstand ist kein Bestandteil der Curventheorie, sondern ein Excurs zur freien Beteiligung. Den Teilnehmern darf man nicht die anspruchsvolle Bedingung stellen, dass sie die Ergebnisse früherer Excurse im Gedächtniss haben. Das hier befolgte Verfahren ist nicht nur das geeignete für einen weiteren Leserkreis, sondern giebt auch der Bearbeitung eine mehr einheitliche Gestalt. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Heym, K., zur Gesch. d. mathem. u. naturwiss. Unterrichts an Gymn., insbesondere an d. Thomasschule in Leipzig. 4. Leipzig, Hinrichs. 20 Ngr.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 4. Bd. J. 1872. 1. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 1 Thlr. 6 Ngr.

Methoden und Principien.

Spitz, C., die ersten Sätze vom Dreiecke und die Parallelen. 8. Leipzig, C. F. Winter. 6 Ngr.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Abbreviaturen zu Mocnik's Arithmetik u. Algebra. 8. Wien, Seidel & S. 4 Ngr.

do. u. Zusätze zu Mocnik's Geometrie. 8. Ebd. 4 Ngr.

August, E. F., vollst. logarithm. u. trigonometr. Tafeln. 10. Afl. 16. Leipzig, Veit & Co. Geb. 16 Ngr.

Dölp, H., Aufgaben z. Differential- u. Integralrechng. 2. Afl. 8. Giessen, Ricker. 1 Thlr.

Focke, M., u. M. Krass, Lehrb. d. allg. Arithmetik nebst e. Aufgabensammlg. 8. Münster, Coppenrath. 25 Ngr.

Hermes, O., Sammlg. v. Aufg. aus d. Algebra und niederen Analysis. 8. Berlin, Springer. 20 Ngr.

Hoffmann, A., Sammlg. planimetr. Aufgaben. 2. Afl. 8. Paderborn, Schöningh. 27 Ngr.

Hofmann, F., Aufg. aus d. niederen Arithmetik. 3. Afl. 8. Bayreuth, Grau. 12 Ngr.

do. Sammlung d. wichtigsten Sätze aus d. Arithmetik u. Algebra. 3. Afl. 8. Ebd. 4 Ngr.

Holfert, H. F., geometr. Aufg. I. Planimetrie. 2. Afl. 8. Dresden, Huhle. 9 Ngr.

Huther, P., Sammlung v. arithmet. Aufgaben in systemat. Ordnung. 7. Afl. 8. Regensburg, Pustet. 12 Ngr.

Kahl, E., mathem. Aufg. aus d. Physik nebst Auflösgn. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 20 Ngr.

Stubba, A., Sammlg. algebr. Aufgaben. 7. Afl. 8. Altenburg, Pierer. 20 Ngr.

Worpitzky, Elemente d. Mathematik f. gelehrte Schulen u. z. Selbststudium. 3. Hft. Planimetrie. 8. Berlin, Weidmann. 1 Thlr.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, W., Lehrb. d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 1. Thl. 8. Neu-Ruppin, Petrenz. 28 Ngr.

Bohnstedt, R., das Rechnen m. Dezimalbrüchen. 8. Luckau, Meissner. 8 Ngr.

Hauck, A. F., & H. Hauck, Lehrb. d. Arithmetik f. Gewerb-, Handels- und Realschulen. 1. Thl. 3. Afl. 8. Nürnberg, Korn. 18 Ngr.

Königsberger, L., Vorlesgn. üb. d. Theorie d. elliptischen Functionen. 2. Thl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Thlr. 16 Ngr.

Porges, C., d. Arithmetik d. Verkehrs. 2 Bde. 8. Wien, Hölder. 4 Thlr. 20 Ngr.

Reidt, F., Vorschule d. Theorie d. Determinanten. 8. Leipzig, Teubner. 10 Ngr.

Schröder, E., üb. d. formalen Elemente d. absoluten Algebra. 8. Stuttgart, Schweizerbart. 8 Ngr.

Schwager, H., Lehrb. d. Arithmetik f. Real- u. Fortbildungsschulen. 3. Afl. 8. Würzburg, Kellner. 24 Ngr.

Sickenberger, A., Leitf. d. Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. 8. München, Ackermann. 16 Ngr.

Sommer, F., Leitf. beim ersten Unt. in d. Algebra. 8. Leipzig, Teubner. 6 Ngr.

Täschner, A., Abriss der Arithmetik u. Algebra. 1. Thl. 8. Breslau, Leuckart. 10 Ngr.

Winckler, A., üb. d. unbestimmte Integration e. Gattg. transcendenter Funct. 8. Wien, Gerold's Sohn. 6 Ngr.

Geometrie.

Adam, W., Lehr- u. Handbuch d. Flächen- u. Körperrechng. 4. Afl. 8. Langensalza, Verlags-Comptoir. 12 Ngr.

Adam, W., Repetitorium d. Planimetrie. 8. Wittenberg, Herrosé. 10 Ngr.

Fialkowski, N., die einheitl. Construction d. drei Kegelschnittslinien mittelst d. durch 2 Parallelen begrenzten Transversalen. 8. Wien, Sallmayer & Co. 8 Ngr.

Fialkowski, N., Lehrb. d. Geometrie des Zeichnens. 4. Afl. 8. Wien, Sallmayer & Co. 24 Ngr.

Fischer, F. W., Lehrbuch d. Geometrie f. Gymn. u. höhere Lehranst. 1. Thl. Planimetrie. 8. Freiburg, Herder. 12 Ngr.

Grosse, H., d. Elemente d. kinemat. Curvenlehre. 8. Berlin, Wassmuth. 6 Ngr.

Liersmann, K. H., planimetr. Construct. 1. Thl. Systemaufg. 8. Berlin, Calvary & Co. 10 Ngr.

Müller, J. H. T., Lehrbuch d. ebenen Geometrie f. höhere Lehranst. 2. Afl. Hrsg. v. K. L. Bauer. 2. Thl. 8. Halle, Buchh. d. Waisenhauses. 20 Ngr.

Niemtschik, R., üb. d. Construction der Linien 2. Ordnung, welche 2, 3 od. 4 Linien derselben Ordng. berühren. 8. Wien, Gerold's Sohn. 6 Ngr.

Schlömilch, O., Grundzüge e. wiss. Darstellg. d. Geometrie d. Maasses. 1. Thl. 5. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 10 Ngr.

— Dass. 2. Thl. 3. Afl. 8. Ebd. 1 Thlr. 10 Ngr.

Schumann, H., Lehrb. d. Planimetrie f. Gymn. u. Realschulen. 2. Afl. v. G. Gantzer. 8. Berlin, Weidmann. 20 Ngr.

Sturm, R., Elemente d. darstell. Geometrie. 8. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 10 Ngr.

Villicus, F., d. berechnende Geometrie. 8. Wien, Gerold's Sohn. 12 Ngr.

Zons, J. M., Lehrb. d. Geometrie f. Gymn., Realschulen u. andere höhere Lehranstalten. 2. Thl. 8. Cöln, Du Mont-Schauberg. 1 Thlr.

Geodäsie und practische Geometrie.

Geometer-Kalender, deut., f. d. J. 1875. Hrsg. v. W. Jordan. 16. Stuttgart, Wittwer. Geb. 1 Thlr.

Jordan, W., Hülfst. f. barometr. Höhenmessg. 8. Stuttgart, Wittwer. 6 Ngr.

Nehls, Ch., üb. d. Amsler'schen Polar-Planimeter u. üb. graphisch-mechan. Integriren im Allg. 4. Leipzig, Felix. 1 Thlr.

Mechanik.

Jost, E., d. Sonnensystem v. e. hydrodynom. Gesichtspunkte betrachtet. 8. Berlin, Mayer & M. 15 Ngr.

Wiessner, A., das Atom od. d. Kraftelement d. Richtung als letzter Wirklichkeitsfactor. 8. Leipzig, Thomas. 1 Thlr. 25 Ngr.

Optik.

Friedrich, O. O., üb. d. opt. u. magnet. Circularpolarisation d. Lichtes u. der Wärme u. ihre Anwendg. in wiss. u. techn. Beziehg. 4. Dresden, v. Zahn. 27 Ngr.

Astronomie und Meteorologie.

Hirsch, A., die Sonne. 8. Basel, Schweighauser. 12 Ngr.

Holetschek, J., Bahnbestimmg. d. ersten Kometen v. J. 1871. 2. Abth. 8. Wien, Gerold's Sohn. 4 Ngr.

Moebius, A. F., die Hauptsätze der Astronomie. 6. Afl. 8. Stuttgart, Göschen. 6 Ngr.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. A. Auwers u. A. Winnecke. 9. J. 2 Hft. Leipzig, Engelmann. 15 Ngr.

Zenker, W., d. Venusdurchgang durch d. Sonnenscheibe am 8—9. December 1874 u. d. z. Beobachtung desselben ausgesandten deutschen Expeditionen. 8. Berlin, Hempel. 10 Ngr.

Nautik.

Domke, F., nautische, astronom. u. logarithm. Tafeln. 6. Afl. 8. Berlin, v. Decker. 1 Thlr. 10 Ngr.

Physik.

Bergner, A., d. Anziehg. u. Abstossg. durch Wärme und d. Abstossg. durch Schall. 8. Boizenburg, Herold. 12 Ngr.

Crüger, J., Schule der Physik. 9. Afl. 8. Leipzig, G. W. Körner. 2 Thlr. 10 Ngr.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1870. 26. Jhrg. Red. v. B. Schwalbe. 1. Abth. 8. Berlin, G. Reimer. 2 Thlr. 10 Ngr.

Heussi, J., d. physikal. Apparat. 1. Hälfte. 8. Leipzig, Frohberg. 1 Thlr. 15 Ngr.

Krebs, G., Einleitg. in d. mechan. Wärmetheorie. 8. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 10 Ngr.

Subic, S., Lehrb. d. Physik f. Ober-Gymn. u. Ober-Realschulen. 3. Afl. 8. Pest, Heckenast. 3 Thlr.

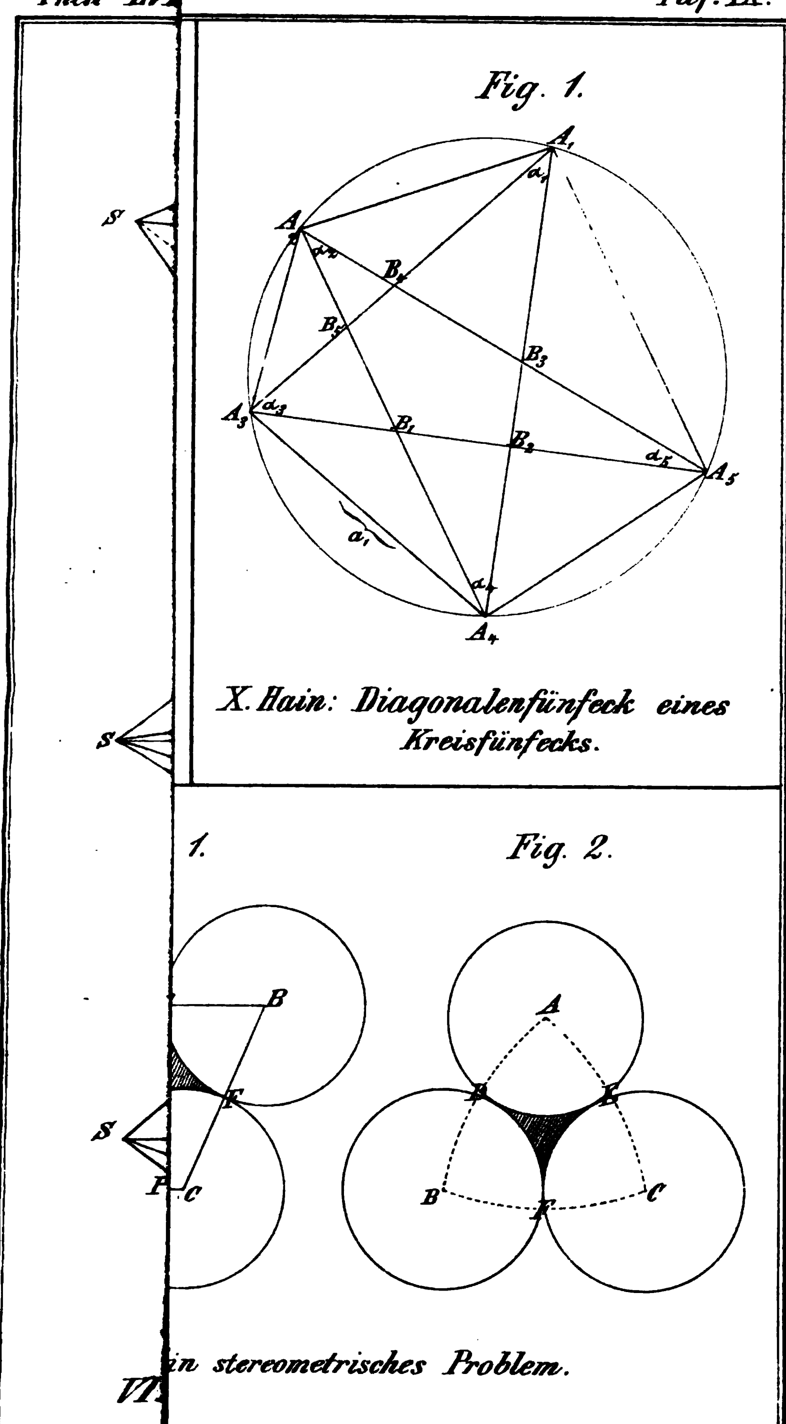
Weinhold, A. F., Vorschule d. Experimentalphysik. 2. Afl. 8. Leipzig, Quandt & H. 3 Thlr. 10 Ngr.

Vermischte Schriften.

Astrolog, der, f. 1875. 4. Wien, Gorischek. 11¼ Ngr.

Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. C. W. Borchardt. 77. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. 4. Berlin, G. Reimer. preplt. 4 Thlr.

Sitzungsberichte d. mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akademie d. Wiss. zu München 1874. 1. Hft. 8. München, Franz. 12 Ngr.



X. Hain: Diagonalenfünfeck eines Kreisfünfecks.

[E]in stereometrisches Problem.

PROSPECT.

Soeben erschien im Verlage von **Robert Oppenheim in Berlin** und ist durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Anleitung

zu

wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen.

Mit besonderer Rücksicht
auf die Bedürfnisse der Kaiserlichen Marine.

Verfasst von

P. Ascherson, A. Bastian, W. Förster, K. Friedel, G. Fritsch, A. Gerstäcker, A. Griesebach, A. Günther, J. Hann, G. Hartlaub, R. Hartmann, H. Kiepert, W. Koner, E von Martens, A. Meitzen, K. Möbius, G. Neumayer, A. Oppenheim, A. Orth, C. A. F. Peters, F. v. Richthofen, G. Schweinfurth, K. v. Seebach, H. Steinthal, F. Tietjen, R. Virchow, E. Weiſs, H. Wild

und herausgegeben

von

Dr. G. Neumayer,
Hydrograph der Kaiserlichen Admiralität.

Mit 56 Holzschnitten und 3 lithogr. Tafeln.
Preis geh. 18 M., fein geb. 20 M.

Inhalt.

Ueber die Bestimmung der Abstände der Himmelskörper von der Erde und über die besondere Bedeutung, welche die Beobachtungen der Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe für diese astronomische Aufgabe haben, von Dr. W. Förster, Prof. der Astronomie u. Director der k. Sternwarte in Berlin.

Geographische Ortsbestimmung, von Dr. F. Tietjen, Prof. der Astronomie und Dirigent des astronom. Seminars in Berlin.

Topographische Beobachtung und Zeichnung (Flying survey, Levée à coup d'oeil), von Dr. H. Kiepert, Prof. der Geographie und Mitglied der k. Akademie der Wissenschaften in Berlin.

Anweisung zur Beobachtung allgemeiner Phänomene am Himmel mit freiem Auge oder mittelst solcher Instrumente, wie sie dem Reisenden zur Verfügung stehen, von Dr. E. Weiss, Prof. der Astronomie u. I. Adjunkt der k. Sternwarte in Wien.

Anweisung zur Anstellung von Beobachtungen über Ebbe und Fluth, von Prof. C. A. F. Peters, Director d. königl. Sternwarte in Kiel.

Anleitung zur Bestimmung der Elemente des Erdmagnetismus auf Reisen, von Dr. H. Wild, Prof. u. Director des physikal. Centralobservatoriums zu St. Petersburg, u. Mitglied der k. Akademie der Wissenschaften daselbst.

Meteorologie, von Dr. J. Hann in Wien.

Politische Geographie und Statistik, von Dr. A. Meitzen, k. Geh. Regierungsrath in Berlin.

Heilkunde, von Dr. K. G. A. Friedel, Oberstabs- u. Chefarzt des. I. Preuss. Garde-Reg. zu Fuss in Potsdam.

Allgemeine Rückblicke auf die Erforschungsgebiete der Continente und Erklärung der gebräuchlichsten Ausdrücke in der physikalischen Geographie, von Prof. Dr. W. Koner, k. Bibliothekar in Berlin.

Geologie, von F. Freiherr von Richthofen, Dr. phil. in Berlin.

Erdbebenkunde, von Prof. Dr. K. von Seebach in Göttingen.

Pflanzengeographie, von Prof. Dr. A. Griesebach in Göttingen.

Die geographische Verbreitung der Seegräser, von Prof. Dr. P. Ascherson in Berlin.

Ueber Sammeln und Conserviren von Pflanzen höherer Ordnung (Phanerogamen), von Dr. G. Schweinfurth in Berlin.

Das Sammeln von Reptilien und Fischen, von Dr. Albert Günther, F. R. S. and Vice-President of the Zoological Society of London, Assistant-Keeper der Zoolog. Abthlg. des Britischen Museums in London.
Sammeln und Beobachten von Mollusken, von Dr. Eduard von Martens, k. Prof. u. Custos am zoolog. Museum in Berlin.
Wirbellose Seethiere, von Dr. Karl Möbius, Prof. der Zoologie u. Director des zoolog. Museums in Kiel.
Gliederthiere, von Prof. Dr. A. Gerstaecker in Berlin.
Vögel, von Dr. G. Hartlaub in Bremen.
Die Säugethiere, von Prof. Dr. R. Hartmann, Prosector am anatomischen Museum der k. Universität in Berlin.
Sammlung und Aufbewahrung chemisch wichtiger Naturproducte, von Prof. Dr. A. Oppenheim in Berlin.
Allgemeine Begriffe der Ethnologie, von Prof. Dr. A. Bastian, Custos am ethnolog. Museum in Berlin.
Landwirthschaft, von Dr. Albert Orth, Prof. der Landwirthschaft in Berlin.
Linguistik, von Prof. Dr. H. Steinthal in Berlin.
Anthropologie und prähistorische Forschungen, von Prof. Dr. R. Virchow, Director des Pathologischen Instituts, Mitglied der k. Akademie der Wissenschaften in Berlin.
Praktische Gesichtspunkte für die Verwendung zweier dem Reisenden wichtigen technischen Hülfsmittel: das Mikroskop und der photographische Apparat, von Prof. Dr. G. Fritsch, am anatomischen Museum in Berlin.
Hydrographie und Oceanographie, einschliesslich Winke über Höhenmessungen und magnetische Beobachtungen zur See, von Prof. Dr. G. Neumayer, Hydrograph der k. Admiralität in Berlin.
Anhang.

Karten.

Skizze meines Weges am 1. Mai 1870 (letzte Hälfte, drei Stunden bis nach Jerusalem), unterwegs entworfen von H. Kiepert.
Karte zur Illustration hydrographischen Zeichnens von L. Friederichsen.
Uebersichtskarte der Meeresströme und Trift von G. Neumayer.

Vorliegendes Werk, welches durch die Namen der Mitarbeiter seine hervorragende Bedeutung Kund giebt und seine Empfehlung in sich trägt, hat seines Gleichen in keiner Literatur, denn obgleich in der Anlage dem Englischen, Manual of scientific enquiry, nachgebildet, übertrifft es dasselbe sowohl an äusserem Umfange wie an innerm Gehalt, ohne dass dem Englischen Vorbilde, dessen Zweck ein verschiedener ist, sein eigenthümlicher Werth geschmälert werden soll.

Das vorliegende Unternehmen wendet sich nicht nur an den kleinen Kreis derer, welche es sich zur Lebensaufgabe gemacht haben, fremde Welttheile zu erforschen oder dem Ocean die ungehobenen Schätze zu entreissen und neue Strassen auf demselben zu suchen, sondern es richtet sich an den unbegränzten Kreis aller jener, welche über räthselhafte Naturphänomene klar zu werden, und neu entdeckte Naturprodukte zu verwerthen sich bemühen.

Also nicht nur jenen wünscht es zu dienen, welche Reiselust oder Beruf in noch wenig durchforschte Gegenden führt, sondern auch der



grösseren Zahl derer, welche im Studirzimmer und im Laboratorium oder als Bebauer des Bodens der Praxis einerseits das Ihrige zum Bau der Wissenschaft beitragen, andererseits die neu erworbenen Forschungsresultate praktisch verwerthen wollen.

Ferner soll das Werk angesichts der heutigen Theilung der Naturwissenschaften in unzählige Specialitäten, vor allem den Specialisten auf anderen Gebieten, einführen in die richtige Beurtheilung der physikalischen Erscheinungen der Erde und ihres geognostischen Baues, in die Erkenntniss der sie bedeckenden Pflanzenwelt, des Thier- und Menschenlebens in seinen wechselvollen Beziehungen u. s. w., es soll ihn damit vertraut machen, wie er diese Erscheinungen zu erfassen und zu beobachten hat, wo sich Lücken in den Beobachtungsreihen zeigen und wie dieselben auszufüllen sind. Der Reisende, Gelehrter sowohl als Laie, soll mit diesem Buche in der Hand mithin beobachten lernen, um selbst productiv zu wirken, und um mit Erfolg auf jedem Gebiete, je nachdem Neigung oder Gelegenheit ihn zu dem einen oder anderen hinziehen, an der grossen Aufgabe der Erforschung unsers Weltalls thätig mitarbeiten zu können.

Der heimische Forscher aber soll in den Stand gesetzt werden, seine Beobachtungen und Forschungen über sein eigentliches Fach hinaus auszudehnen und werthvolles Material zu sammeln auf ihm weniger vertrauten Gebieten.

Somit sei denn das Unternehmen nicht nur den Reisenden und Missionären, den Consulatsbeamten und den deutschen Grosshändlern und Colonisten in fremden Welttheilen, sondern auch sämmtlichen Naturforschern und Naturfreunden im Heimathlande empfohlen.

Bestellzettel.

[Kann auf eine Postkarte (Porto 5 Pf.) geklebt werden.]

Bei der Buchhandlung von

in

bestellt der Unterzeichnete hierdurch zur Ansicht, — in feste Rechnung. — Betrag auf Rechnung zu stellen — Betrag durch Postnachnahme einzuziehen. —

Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen.
Preis geh. 18 M. f. geb. 20 M.

ferner von umstehenden Werken No. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. (gewünschte Nummern gefl. durchstreichen.)

Name: Ort:



1. **Airy, George Biddell. Ueber den Magnetismus.** Autorisirte deutsche Uebersetzung. Mit 74 Holzschnitten. 8. VI u. 166 Seiten. 1873. Preis 3 M. 75 Pf.
2. **Bode, Fr. Beiträge zur Theorie und Praxis der Schwefelsäurefabrikation.** 8. IV u. 131 Seiten. Preis 2 M. 50 Pf.
3. **Dammer, O. Kurzes chemisches Handwörterbuch.** Zum Gebrauche für Chemiker, Techniker, Aerzte, Pharmaceuten, Landwirthe, Lehrer und für Freunde der Naturwissenschaft überhaupt. In 12—13 Lieferungen von je 3—4 Bogen gr. Lex.-8. Preis à 1 M. 20 Pf. Bisher (Januar 1875) erschienen Heft 1—10 (A—Pyr.)
4. **Ehrenberg, C. G. Gedächtnissrede auf Alexander v. Humboldt.** Velinpapier. gr. 8. 46 Seiten. 1870. Preis 1 M.
5. **Faraday, Michael. Naturgeschichte einer Kerze.** Mit 35 Holzschnitten. 16. II u. 159 Seiten. 1871. Preis 2 M.
6. **— Die verschiedenen Kräfte der Materie.** 16. 159 Seiten. 1873. Preis 2 M.
7. **Grasshoff, J. Die Retouche von Photographien.** Anleitung zum Ausarbeiten von negativen und positiven Photographien, so wie zum Koloriren und Uebermalen derselben mit Aquarell-, Anilin- und Oelfarben. Für Photographen und Dilettanten nach den bewährtesten Methoden verfasst. 3. Aufl. Mit zwei Photographien, die eine mit, die andere ohne Negativ-Retouche. Durchgesehen und vermehrt von H. Hartmann. 8. IV u. 88 Seiten. 1873. Preis 2 M. 50 Pf.
8. **Maedler, J. H. von. Reden und Abhandlungen über Gegenstände der Himmelskunde.** gr. 8. VIII u. 527 Seiten. 1870. Preis 8 M.
9. **Newton, Sir Isaac. Mathematische Principien der Naturlehre.** Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von J. Ph. Wolfers. Mit 283 Holzschn. gr. 8. VIII u. 666 Seiten. 1872. Preis 12 M.
10. **Pinner, A. Repetitorium der organischen Chemie.** Mit besonderer Rücksicht auf die Studirenden der Medicin und Pharmacie bearbeitet. 8. 2. Aufl. XVIII u. 337 Seiten. 1874. Preis 6 M.
11. **— Repetitorium der anorganischen Chemie.** Mit besonderer Rücksicht auf die Studirenden der Medicin und Pharmacie bearbeitet. 8. XV u. 399 Seiten. 1874. Preis 8 M.
12. **Remelé, Ph. Kurzes Handbuch der Landschaftsphotographie auf nassem Wege.** Mit einer Photographie. 8. 121 Seiten. 1869. Preis 2 M.
13. **Scrope, G. Poulett. Die Bildung der vulkanischen Kegel und Krater.** Uebersetzt von C. B. Griesbach. Mit Holzschnitten. gr. 8. XII u. 62 Seiten. 1872. Preis 1 M. 20 Pf.
14. **— Ueber Vulkane.** Der Charakter ihrer Phänomene, ihre Rolle in dem Bau und in der Zusammensetzung der Erdoberfläche und ihre Beziehung zu den Kräften des Innern. Nebst einem beschreibenden Verzeichnisse aller bekannten Vulkane und vulkanischen Bildungen. Nach der zweiten verbesserten Auflage des Originals übersetzt von G. A. von Klöden. Mit 65 Holzschnitten und einer lithogr. Ansicht. gr. 8. XXX und 473 Seiten. 1872. Preis 8 M.
15. **Swan's Pigmentdruck** oder: **Das photographische Kohleverfahren.** Beschrieben von G. Wharton Simpson. Vervollständigt durch die neuesten Erfahrungen von H. Vogel. Mit einer Pigmentdruck-Beilage. Velinpapier. 8. 96 Seiten. 1869. Preis 3 M.
16. **Vogel, Prof. Dr. H. Lehrbuch der Photographie.** Drei Theile in einem Bande, enthaltend die photographische Chemie, die photographische Praxis und die photographische Aesthetik. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit einer Farbentafel und danach gefertigtem Lichtdrucke von Obernetter, 4 in den Text eingefügten photographischen Beleuchtungsstudien und 215 Holzschnitten. gr. 8. XII u. 528 Seiten. 1874. Preis 11 M.
17. **— Photographisches Taschenwörterbuch.** Alphabetisch geordnete Sammlung praktisch-wichtiger Notizen über Atelier-Einrichtung, Auswahl und Prüfung der Objective und Chemikalien, erprobter Formeln für die verschiedensten photographischen Processe, von Maass- und Gewichtstabellen, von Regeln zur Vermeidung photographischer Fehler u. s. w. Für Photographen und Liebhaber der Photographie. 8. IV und 124 Seiten. 1872. Preis 2 M.
18. **Wohlwill, Emil. Der Inquisitionsprozess des Galileo Galilei,** eine Prüfung seiner rechtlichen Grundlage nach den Acten der Inquisition. 8. VI u. 96 Seiten. 1870. Preis 1 M. 60 Pf.
19. **Wurtz, Ad. Geschichte der chemischen Theorien** seit Lavoisier bis auf unsere Zeit. Deutsch herausgegeben von Alphons Oppenheim. 8. VIII u. 164 Seiten. 1870. Preis 2 M. 50 Pf.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47

Jahrbuch der Erfindungen

und

Fortschritte auf den Gebieten der Physik und Chemie, der Technologie und Mechanik, der Astronomie und Meteorologie.

Herausgegeben von

Dr. H. Hirzel, Prof. an der Universität Leipzig.

und

Dr. H. Gretschel, Prof. an der Bergakademie Freiberg.

Mit vielen in den Text gedruckten Abbildungen.

Erster Jahrg.,	1865.	Preis	$1\frac{1}{2}$	Thlr.	= 4	M.	50	Pf.
Zweiter „	1866.	„	$1\frac{1}{2}$	„	= 4	„	50	„
Dritter „	1867.	„	$1\frac{2}{3}$	„	= 5	„	—	„
Vierter „	1868.	„	$1\frac{2}{3}$	„	= 5	„	—	„
Fünfter „	1869.	„	$1\frac{2}{3}$	„	= 5	„	—	„
Sechster „	1870.	„	$1\frac{11}{12}$	„	= 5	„	75	„
Siebenter „	1871.	„	$1\frac{3}{4}$	„	= 5	„	25	„
Achter „	1872.	„	$1\frac{3}{4}$	„	= 5	„	25	„
Neunter „	1873.	„	$1\frac{3}{4}$	„	= 5	„	25	„
Zehnter „	1874.	„	$1\frac{5}{6}$	„	= 5	„	50	„

(Elfter Jahrg., 1875, im Herbst 1875).

In Deutschland fehlte bisher noch ein Buch, in welchem die große Zahl von Freunden der Naturwissenschaft, Industrielle und Gewerbtreibende sich über das Wissenswertheste, was auf dem Felde der Naturforschung und ihrer Anwendung fürs Leben Neues geleistet worden ist, unterrichten konnte. Diesem Zwecke soll das Jahrbuch der Erfindungen zu genügen suchen. Die von Jahr zu Jahr zunehmende Verbreitung spricht dafür, daß das Buch in immer weiteren Kreisen als das erkannt wird, was es nach dem Plane sein soll; ein willkommener Bote, der alljährlich Kunde bringt von den Fortschritten des Menschengeistes auf dem Wege der Erkenntniß und Dienstbarmachung der Natur.

„Die ungemein glückliche Idee, die auf dem Titel genannten Wissenschaften zusammenzufassen, aus denselben nur die hervorragendsten und bedeutendsten Neuigkeiten auszuheben, diese aber so eingehend darzustellen und auf solche Weise an das schon Bekannte anzuknüpfen, daß ein ebenso ansprechendes wie klares Bild entsteht: diese Idee ist von den Herausgebern festgehalten worden. Ihr verdankt das Buch den Character einer für jeden Gebildeten belehrenden und genußreichen Lectüre, welche nicht auf der Oberfläche bleibt, und doch auch nicht in die Abgeschlossenheit eines Fachwerks sich verliert." K. Karmarsch.

Im gleichen Verlage ist erschienen:

Ergebnisse der Spectral-Analyse in Anwendung auf die Himmelskörper. Von William Huggins, Mitglied der Königl. Astron. Gesellschaft in London. Deutsch mit Zusätzen von W. Klinkerfues. Mit 21 Abbildungen. 3. umgearbeitete Auflage. 8. Geh. $\frac{3}{4}$ Thlr. = 2 M. 25 Pf.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

INHALT.

Seite.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Siebenundfunfzigster Teil. Drittes Heft.

(Mit drei lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1875.

XI.

Distances du point à la droite et du point au plan.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Distance d'un point à une droite.** Soient

(1) $$Ax + By + C = 0$$

l'équation de la droite et x', y' les coordonnées du point donné P. De ce point abaissons sur la droite la perpendiculaire $PQ = p$ et désignons par α, β les angles qu'elle fait avec les axes de coordonnées et par θ l'angle de ces axes.

Par le point P menons à la droite (1) la parallèle

(2) $$Ax + By = Ax' + By'.$$

Les deux lignes (1) et (2) coupent l'axe des x à des distances de l'origine qui sont respectivement

$$a = -\frac{C}{A}, \qquad a' = \frac{Ax' + By'}{A},$$

et l'axe des y aux distances

$$b = -\frac{C}{B}, \qquad b' = \frac{Ax' + By'}{B}.$$

D'après cela, il est évident qu'on a

$$p = (a' - a)\cos\alpha = \frac{Ax' + By' + C}{A}\cos\alpha,$$

$$p = (b' - b)\cos\beta = \frac{Ax' + By' + C}{B}\cos\beta,$$

d'où nous tirons

$$\cos\alpha = \frac{Ap}{Ax'+By'+C}, \quad \cos\beta = \frac{Bp}{Ax'+By'+C}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation *)

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\theta \\ \cos\beta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

celle-ci devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{Ap}{Ax'+By'+C} & \dfrac{Bp}{Ax'+By'+C} \\ \dfrac{Ap}{Ax'+By'+C} & 1 & \cos\theta \\ \dfrac{Bp}{Ax'+By'+C} & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

---

*) L'équation (3) exprime la relation qui existe entre les inclinaisons mutuelles de trois droites issues d'un même point. On peut la déduire de celle qui donne l'angle de deux droites en valeur des inclinaisons de ces deux droites sur les axes de coordonnées.

Soient OD, OD' les deux droites, V leur angle; α et β, α' et β' les angles qu'elles font avec les deux axes de coordonnées OX, OY. Pour déterminer V, sur la première droite OD prenons une longueur $OM = 1$ et désignons par x, y les coordonnées MP, OP du point M. Projetons la longueur OM et la ligne brisée OPM successivement sur la seconde droite OD' et sur les deux axes OX, OY; nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned} \cos V - x\cos\alpha' - y\cos\beta' &= 0, \\ \cos\alpha - x \qquad - y\cos\theta &= 0, \\ \cos\beta - x\cos\theta - y \qquad &= 0, \end{aligned}$$

entre les quelles il suffit d'éliminer les variables $-x$ et $-y$ pour trouver la relation demandée. Celle-ci est ainsi

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \cos V & \cos\alpha' & \cos\beta' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\theta \\ \cos\beta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si la seconde droite OD' se confond avec la première, on aura $\cos V = \cos\theta = 1$, $\cos\alpha' = \cos\alpha$, $\cos\beta' = \cos\beta$, ce qui fournit la relation (3).

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\frac{Ax'+By'+C}{p}$, nous obtenons l'équation

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{(Ax'+By'+C)^2}{p^2} & A & B \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne

$$\frac{(Ax'+By'+C)^2 \sin^2\theta}{p^2} = - \begin{vmatrix} O & A & B \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = A^2+B^2-2AB\cos\theta.$$

Nous en tirons

$$\text{(II)} \qquad p = \frac{(Ax'+By'+C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}$$

pour la distance demandée.

La distance de l'origine O à la droite (1) s'obtiendra en posant $x' = y' = 0$ dans (II) et sera

$$\text{(III)} \qquad p = \frac{C\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

2. **Angle de deux droites données par leurs équations**

$$Ax+By+C=0, \quad A'x+B'y+C'=0.$$

Soient p et p' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces droites; nous avons d'abord, en conservant les notations de la note précédente,

$$\cos\alpha = -\frac{Ap}{C}, \quad \cos\beta = -\frac{Bp}{C},$$

$$\cos\alpha' = -\frac{A'p'}{C'}, \quad \cos\beta' = -\frac{B'p'}{C'}.$$

Si nous mettons ces valeurs dans la relation (4) de la note, après avoir multiplié la première colonne par $-\frac{C}{p}$ et la première ligne par $-\frac{C'}{p}$, elle deviendra

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{CC'\cos V}{pp'} & A' & B' \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et donnera

$$\frac{CC'\sin^2\theta\cos V}{pp'} = -\begin{vmatrix} 0 & A' & B' \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (AA'+BB') - (AB'+BA')\cos\theta.$$

Nous en tirons

$$\cos V = \frac{[AA'+BB'-(AB'+BA')\cos\theta]pp'}{CC'\sin^2\theta};$$

mais, en vertu de la formule (III), nous avons

$$pp' = \frac{CC'\sin^2\theta}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\theta)(A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta)}};$$

par suite nous obtenons, en substituant dans (IV),

$$\text{(V)} \quad \cos V = \frac{AA'+BB'-(AB'+BA')\cos\theta}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\theta)(A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta)}}.$$

3. **Condition de perpendicularité de deux droites (5).** Elle s'obtient en posant $\cos V$ dans l'une ou l'autre des égalités (4), (IV) et (V) et sera exprimée par l'une quelconque des relations

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha' & \cos\beta' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\theta \\ \cos\beta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0 = (\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta') - (\cos\alpha\cos\beta'+\cos\beta\cos\alpha')\cos\theta,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A' & B' \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0 = AA'+BB'-(AB'+BA')\cos\theta.$$

4. **Distance d'un point à un plan.** Soient

$$\text{(5)} \qquad Ax+By+Cz+D=0$$

l'équation du plan; x', y', z' les coordonnées du point donné P; p la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan (§); et α, β, γ les inclinaisons de cette perpendiculaire sur les trois axes de coordonnés.

Par le point P menons le plan parallèle au plan (5); son équation sera

$$\text{(6)} \qquad Ax+By+Cz = Ax'+By'+Cz'.$$

Les deux plans (5) et (6) coupent les axes de coordonnées aux distances de l'origine respectivement égales à

$$a = -\frac{D}{A}, \qquad b = -\frac{D}{B}, \qquad c = -\frac{D}{C};$$

$$a' = \frac{Ax'+By'+Cz'}{A}, \quad b' = \frac{Ax'+By'+Cz'}{B}, \quad c' = \frac{Ax'+By'+Cz'}{C}.$$

D'après cela, il est évident qu'on a

$$p = (a'-a)\cos\alpha = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{A}\cos\alpha,$$
$$p = (b'-b)\cos\beta = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{B}\cos\beta,$$
$$p = (c'-c)\cos\gamma = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{C}\cos\gamma,$$

d'où nous tirons

$$\cos\alpha = \frac{Ap}{Ax'+By'+Cz'+D},$$
$$\cos\beta = \frac{Bp}{Ax'+By'+Cz'+D},$$
$$\cos\gamma = \frac{Cp}{Ax'+By'+Cz'+D}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation*)

---

*) L'équation (7) exprime la relation qui existe entre les inclinaisons mutuelles de quatre droites issues d'un même point. On peut la déduire de celle qui donne l'angle de deux droites en valeur des inclinaisons de ces deux droites sur les axes de coordonnées.

Soient OD, OD' les deux droites; V leur angle; α, β, γ et α', β', γ' les angles qu'elles font avec les trois axes de coordonnées OX, OY, OZ; λ, μ, ν les inclinaisons mutuelles YOZ, ZOX, XOY de ces axes. Sur la première droite OD prenons une longueur $OM = 1$ et désignons par x, y, z les coordonnées MP, PQ, QO du point M. Projetons la longueur OM et la ligne brisée $OQPM$ successivement sur la seconde droite OD' et sur les trois axes OX, OY, OZ; nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned}
\cos V - x\cos\alpha' - y\cos\beta' - z\cos\gamma' &= 0,\\
\cos\alpha - x \qquad - y\cos\nu - z\cos\mu &= 0,\\
\cos\beta - x\cos\nu - y \qquad - z\cos\lambda &= 0,\\
\cos\gamma - x\cos\mu - y\cos\lambda - z \qquad &= 0
\end{aligned}$$

entre les quelles il suffit d'éliminer les quantités $-x$, $-y$, $-z$ pour avoir la relation demandée. Celle-ci est donc

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \cos V & \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si la seconde droite OD' se confond avec la première OD, on aura $\cos V = \cos O = 1$, $\cos\alpha' = \cos\alpha$, $\cos\beta' = \cos\beta$, $\cos\gamma' = \cos\gamma$, ce qui fournit la relation (7).

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

celle-ci devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{Ap}{Ax'+By'+Cz'+D} & \frac{Bp}{Ax'+By'+Cz'+D} & \frac{Cp}{Ax'+By'+Cz'+D} \\ \frac{Ap}{Ax'+By'+Cz'+D} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{Bp}{Ax'+By'+Cz'+D} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{Cp}{Ax'+By'+Cz'+D} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{p}$, nous obtenons l'équation

$$\text{(VI)}\qquad \begin{vmatrix} \frac{(Ax'+By'+Cz'+D)^2}{p^2} & A & B & C \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

qui donne

$$(9)\qquad \frac{(Ax'+By'+Cz'+D)^2\Delta^2}{p^2} = -\begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

où nous avons posé

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu = \Delta^2.$$

De l'égalité (9) nous tirons

$$\text{(VII)}\qquad p = \frac{(Ax'+By'+Cz'+D).\Delta}{\pm\sqrt{\begin{array}{l} A^2\sin^2\lambda+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\ +B^2\sin^2\mu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\ +C^2\sin^2\nu+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu) \end{array}}}$$

pour la distance demandée.

La distance de l'origine O au plan (5) s'obtiendra, en posant $x'=y'=z'=0$ dans (VII); elle sera

$$\text{(VIII)}\qquad p = \pm\frac{D\Delta}{H},$$

en faisant, pour abréger,

$$(10)\qquad \sqrt{\left.\begin{array}{l} A^2\sin^2\lambda+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\ +B^2\sin^2\mu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\ +C^2\sin^2\nu+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu) \end{array}\right\}} = H.$$

5. **Angle de deux plans donnés par leur équations**

$$(11)\qquad Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Soient p et p' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces plans; nous avons d'abord, en conservant les notations de la note qui précède,

$$\cos\alpha = -\frac{Ap}{D}, \quad \cos\beta = -\frac{Bp}{D}, \quad \cos\gamma = -\frac{Cp}{D},$$

$$\cos\alpha' = -\frac{A'p'}{D'}, \quad \cos\beta' = -\frac{B'p'}{D'}, \quad \cos\gamma' = -\frac{C'p'}{D'}.$$

Si nous mettons ces valeurs dans la relation (8) de la note, après avoir multiplié la première colonne par $-\frac{D}{p}$ et la première ligne par $-\frac{D'}{p'}$, elle deviendra

$$\text{(IX)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{DD'\cos V}{pp'} & A' & B' & C' \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et donnera

$$\text{(12)} \qquad \frac{DD'\Delta^2\cos V}{pp'} = -\begin{vmatrix} 0 & A' & B' & C' \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = K^2$$

en faisant encore, par abréviation,

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} K^2 = AA'\sin^2\lambda &+ (BC'+CB')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\ + BB'\sin^2\mu &+ (CA'+AC')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\ + CC'\sin^2\nu &+ (AB'+BA')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu). \end{aligned}$$

Mais, en vertu de la formule (VIII), nous avons

$$pp' = \frac{DD'\Delta^2}{HH'};$$

par suite nous obtenons, en substituant dans (12),

$$\cos V = \frac{K^2}{HH'};$$

ou, en remplaçant K, H et H' par leurs développements (10) et (13),

$$\text{(X)}\quad \cos V = \frac{\sqrt{\begin{array}{l} AA'\sin^2\lambda + (BC'+CB')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + BB'\sin^2\mu + (CA'+AC')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + CC'\sin^2\nu + (AB'+BA')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}}}{\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\begin{array}{l} A^2\sin^2\lambda + 2BC\ (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + B^2\sin^2\mu + 2CA\ (\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + C^2\sin^2\nu + 2AB\ (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}} \\ \times \sqrt{\begin{array}{l} A'^2\sin^2\lambda + 2B'C'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + B'^2\sin^2\mu + 2C'A'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + C'^2\sin^2\nu + 2A'B'(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}} \end{array}\right.}.$$

6. **Condition de perpendicularité de deux plans.** Elle s'obtient en posant $V = 0$ dans l'une ou l'autre des égalités (8), (IX) et (10) et sera exprimée par l'une quelconque des relations

$$\text{(XI)}\quad \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{(XII)}\quad \begin{vmatrix} 0 & A' & B' & C' \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{(XIII)}\quad \begin{array}{l} AA'\sin^2\lambda + (BC'+CB')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + BB'\sin^2\mu + (CA'+AC')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + CC'\sin^2\nu + (AB'+BA')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0, \end{array}$$

dont la dernière peut encore se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes

$$\text{(XIV)}\quad \begin{array}{l} A'[A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)] \\ + B'[B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)] \\ + C'[C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)] = 0, \end{array}$$

$$\text{(XV)}\quad \begin{array}{l} A[A'\sin^2\lambda + B'(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)] \\ + B[B'\sin^2\mu + C'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A'(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)] \\ + C[C'\sin^2\nu + A'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)] = 0. \end{array}$$

XII.

Die gemischte Poloconik zweier Geraden bezüglich der Differentialcurve [1]) der Parabel.

Von

Adolf Hochkheim.

Es sei

$$y_1^2 - p x_1 z_1 = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer gegebenen Parabel in homogenen Coordinaten. Construirt man mit Hülfe einer bestimmten Strecke k die zugehörige Differentialcurve, so ist die Gleichung derselben

$$y^2 x - \frac{k^2 p}{4} z^3 = 0 \tag{2}$$

Wir bezeichnen die Coordinaten eines Punktes mit ξ, η, ζ, dann entspricht der Gleichung

$$\xi y^2 + 2\eta y x - \tfrac{3}{4} k^2 p \zeta z^2 = 0 \tag{3a}$$

die conische Polare, und der Gleichung

$$\eta^2 x + 2\eta \xi y - \tfrac{3}{4} k^2 p \zeta^2 z = 0 \tag{3b}$$

---

1) Zieht man zu allen Tangenten einer auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Curve $y = f(x)$ durch einen Punkt $(-k, 0)$ Parallelen und trägt jeden der Abschnitte, welche von diesen auf der Y-Axe gebildet werden, mit Berücksichtigung seines Vorzeichens auf der dem entsprechenden Berührungspunkt zugehörigen Ordinate vom Fusspunkte aus ab, so ist der geometrische Ort der Endpunkte der Abschnitte die Differentialcurve der Curve $y = f(x)$. Vergleiche die Schrift des Verfassers: Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte. Verl. Louis Nebert. Halle 1874.

die gerade Polare des betr. Punktes bezüglich der Differentialcurve der Parabel.

Es mögen zwei gerade Linien A und A' ihrer Lage nach bestimmt sein. Wenn man zu jedem Punkte der Geraden A die conische Polare in Bezug auf die Differentialcurve der Parabel nimmt und bezüglich jedes dieser Kegelschnitte den Pol der zweiten Geraden A' aufsucht, so ist der geometrische Ort dieser Pole ein Kegelschnitt, welcher die gemischte Poloconik der beiden Geraden A und A' genannt wird.

Sind die Gleichungen der Geraden

$$(A) a_1x + a_2y + a_3z = 0 \tag{4a}$$

und

$$(A') a_1'x + a_2'y + a_3'z = 0 \tag{4b}$$

so ist die Gleichung der gemischten Poloconik

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & 0 & 2y & 0 \\ a_2' & 2y & 2x & 0 \\ a_3' & 0 & 0 & -\frac{3}{2}k^2pz \end{vmatrix} = 0 \tag{5a}$$

oder

$$4a_3a_3'y^2 - 3k^2p(a_1a_2' + a_2a_1')yz + 3k^2pa_1a_1'xz = 0 \tag{5b}$$

Geht man mittelst der Substitutionen

$$\frac{x}{z} = x_1, \quad \frac{y}{z} = y_1$$

zu rechtwinkligen cartesischen Coordinaten über, so erhält man

$$y_1^2 - \frac{3k^2p(a_1a_2' + a_2a_1')}{4a_3a_3'} y_1 = -\frac{3k^2pa_1a_1'}{4a_3a_3'} x. \tag{5c}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

1) **Die gemischte Poloconik der beiden Geraden A und A' ist eine Parabel, deren Axe der x-Axe parallel läuft, deren Parameter**

$$\frac{3k^2pa_1a_1'}{4a_3a_3'}$$

ist, und deren Scheitel die Coordinaten

$$\frac{3k^2p(a_1a_2' + a_2a_1')}{16a_1a_1'a_3a_3'},$$

$$\frac{3k^2p(a_1a_2'+a_2a_1')}{8a_3a_3'}$$

besitzt.

2) Der geometrische Ort bleibt unverändert, wenn man die beiden Geraden A und A' mit einander vertauscht.

Die gefundene Parabel ist demnach der geometrische Ort der Pole irgend einer von den Geraden A und A' in Bezug auf die Hyperbeln, welche die conischen Polaren der Punkte der anderen Geraden bezüglich der Differentialcurve sind[2]).

3) Setzt man

$$a_1 = a_1', \quad a_2 = a_2', \quad a_3 = a_3',$$

so geht die Gleichung (5c) über in

$$y_1^2 - \frac{3k^2pa_1a_2}{2a_3^2}y_1 = -\frac{3k^2pa_1^2}{4a_3^2}x_1 \tag{6}$$

d. h. lässt man die Gerade A' mit der Geraden A zusammenfallen, so geht die gemischte Poloconik über in die gewöhnliche Poloconik[3]) der Geraden A in Bezug auf die Differentialcurve.

4) Für $a_1 = 0$, $a_1' = 0$ geht die Gleichung (5c) über in

$$y_1 = 0 \tag{7}$$

Daraus folgt:

Laufen die beiden Geraden A und A' der x-Axe parallel, so degenerirt die gemischte Poloconik derselben in die x-Axe.

5) Ist nur $a_1 = 0$, so ergiebt sich

$$y_1^2 - \frac{3k^2pa_2a_1'}{4a_3a_3'}y_1 = 0,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_1 &= \frac{3k^2pa_2a_1'}{4a_3a_3'} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

2) Durège, Curv. dritt. Ordn. pag. 188.

3) Construirt man zu allen Punkten einer Geraden (A) die geraden Polaren in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung, so werden alle diese Geraden von einem Kegelschnitt, welcher die Poloconik der Geraden A heisst, eingehüllt. Vergl. Durège, Curv. dritt. Ordn. pag. 178.

d. h. läuft nur eine der beiden Geraden der x-Axe parallel, so degenerirt die gemischte Poloconik derselben in zwei parallele Gerade, von denen die eine mit der x-Axe zusammenfällt.

6) Für a_3 oder a_3' gleich Null erhält man aus (5c)

$$(a_1a_2' + a_2a_1')y = a_1a_1'x \tag{9}$$

Geht demnach eine der beiden Geraden oder auch beide durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems, so degenerirt die gemischte Poloconik derselben in eine Gerade, welche ebenfalls durch den Coordinatenanfangspunkt geht.

7) Setzt man in (5c)

$$a_1a_2' + a_2a_1' = 0,$$

so erhält man

$$y^2 = -\frac{3k^2p\,a_1a_1'}{4a_3a_3'}x \qquad (10$$

d. h. schliessen die beiden Geraden A und A' supplementäre Winkel mit der x-Axe ein, so breitet sich die Parabel symmetrisch zur x-Axe aus und ihr Scheitel fällt mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammen.

Ferner ergeben sich folgende Resultate:

8) Verschiebt man eine der beiden Geraden, so dass sie ihrer ursprünglichen Richtung stets parallel bleibt, so ändert sich die Lage und der Parameter der gemischten Poloconik, doch bleibt ihre Axe der x-Axe parallel. Rückt die eine Gerade in die Unendlichkeit, so degenerirt die gemischte Poloconik in die x-Axe.

9) Wird eine der beiden Geraden A und A' oder beide um die Punkte gedreht, in welchen sie die x-Axe schneiden, so bleibt der Paramter und die Axenrichtung der gemischten Poloconik ungeändert, dagegen ändern sich die Coordinaten des Scheitelpunktes.

10) Dreht man endlich eine der beiden Geraden A und A' um den Punkt, in welchem sie die y-Axe schneidet, so läuft die Axe der gemischten Poloconik der x-Axe stets parallel, dagegen ändern sich der Parameter und die Coordinaten des Scheitelpunktes.

11) Construirt man zu jedem Punkte der gemischten Poloconik als Pol die conische Polare bezüglich der Differentialcurve der Parabel, so entspricht das System von Hyperbeln der Gleichung

$$\xi_1 y_1^2 + 2\eta_1 y_1 x_1 - {}^{3}k^2 p = 0,$$

deren beide veränderliche Parameter ξ_1, η_1 der Gleichung

$$\eta_1^2 - \frac{3k^2 p(a_1 a_2' + a_2 a_1')}{4d_3 a_3'}\eta_1 + \frac{3k^2 p\, a_1 a_1'}{4a_3 a_3'}\xi_1 = 0$$

genügen müssen.

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen mit Hülfe von

$$\begin{vmatrix} y_1^2 & 2y_1 x_1 \\ \dfrac{3k^2 p\, a_1 a_1'}{4a_3 a_3'} & 2\eta_1 - \dfrac{3k^2 p(a_1 a_2' + a_2 a_1')}{4a_3 a_3'} \end{vmatrix} = 0$$

die variabeln Parameter, so erhält man als Gleichung der Enveloppe des Systems von Hyperbeln:

$$(a_1 a_2' + a_2 a_1')y_1 + 2a_1 a_1' x_1 = \pm 2\sqrt{a_1 a_1' a_3 a_3'} \qquad (11)$$

Das System der conischen Polaren (bezüglich der Differentialcurve der Parabel), deren Pole auf der gemischten Poloconik liegen, wird demnach eingehüllt von zwei parallelen Geraden, welche gleiche Abstände von dem Coordinatenanfangspunkt haben.

12) Die Gleichung der conischen Polaren (H) des Punktes (ξ_1, η_1, ζ_1) bezüglich der Differentialcurve der Parabel ist

$$\xi_1 y^2 + 2\eta_1 yx - \tfrac{3}{4}k^2 p\,\zeta_1 z^2 = 0.$$

Die beiden Geraden A und A', deren Gleichungen

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0,$$
$$a_1' x + a_2' y + a_3' z = 0$$

sind, mögen in Bezug auf diese conische Polare conjugirte Gerade sein, d. h. jede möge durch den Pol der andern bezüglich der conischen Polaren hindurchgehen.

Die gerade Polare eines Punktes x_1, y_1, z_1 in Bezug auf die conische Polare (H) besitzt die Gleichung

$$2\eta_1 y_1 x + 2(x_1 \eta_1 + y_1 \xi_1)y - \tfrac{3}{2}k^2 p\, z_1 \zeta_1 z = 0.$$

Bringt man diese in Einklang mit der Gleichung

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0,$$

entwickelt die Coordinaten des betreffenden Poles und setzt diese an Stelle von x, y, z in die Gleichung

$$a_1' x + a_2' y + a_3' z = 0$$

ein, so muss nach der Voraussetzung diese Gleichung eine identische werden. Es ergiebt sich auf diese Weise zwischen ξ_1, η_1, ζ_1 folgende Relation

$$4 a_3 a_3' \eta_1^2 - 3(a_1 a_2' + a_2 a_1') k^2 p \eta_1 \zeta_1 + 3 a_1 a_1' k^2 p \xi_1 \zeta_1 = 0 \qquad (12)$$

Daraus folgt:

Die gemischte Poloconik der beiden Geraden A und A' ist der geometrische Ort der Pole derjenigen conischen Polaren (in Bezug auf die Differentialcurve der Parabel), zu denen A und A' conjugirte Gerade sind.

In ähnlicher Weise lässt sich leicht das Resultat ableiten:

Ist P die gemischte Poloconik der beiden Geraden A und A' und construirt man zu jedem Punkte derselben die Polare bezüglich der Differentialcurve der Parabel, so sind die beiden Geraden A und A' in Bezug auf jede dieser conischen Polaren conjugirte Gerade, d. h. jede geht durch den Pol der andern.

Magdeburg, im August 1874.

Anmerkung. Unter Poloconik wird verstanden die Einhüllende der Polaren eines in gerader Linie bewegten Punktes in Bezug auf die vorliegende Curve. (D. Red.).

XIII.

Auflösung eines besonderen Systemes linearer Gleichungen.

Von

Siegmund Günther.

---

§. 1. Das System linearer Gleichungen, mit welchem wir uns

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots+a_{1n}x_n & +a_{1n}x_{n+1} & +\ldots \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots+a_{2n}x_n & -a_{2n}x_{n+1} & -\ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{2n-1\,1}x_1 & +a_{2n-1\,2}x_2 & +\ldots+a_{2n-1\,n}x_n & +a_{2n-1\,n}x_{n+1} & +\ldots \\
a_{2n1}x_1 & +a_{2n2}x_2 & +\ldots+a_{2nn}x_n & -a_{2nn}x_{n+1} & -\ldots
\end{array}$$

Bestimmt man hieraus eine willkürliche Unbekannte, etwa x_r, so er-

$$x_r = \frac{\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1r-1} & k_1 & a_{1r+1} & \ldots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2r-1} & k_2 & a_{2r+1} & \ldots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3r-1} & k_3 & a_{3r+1} & \ldots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ldots & a_{4r-1} & k_4 & a_{4r+1} & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{2q-1\,1} & a_{2q-1\,2} & a_{2q-1\,3} & \ldots & a_{2q-1\,r-1} & k_{2q-1} & a_{2q-1\,r+1} & \ldots \\
a_{2q1} & a_{2q2} & a_{2q3} & \ldots & a_{2qr-1} & k_{2q} & a_{2qr+1} & \ldots \\
a_{2q+1\,1} & a_{2q+1\,2} & a_{2q+1\,3} & \ldots & a_{2q+1\,r-1} & k_{2q+1} & a_{2q+1\,r-1} & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{2s-2\,1} & a_{2s-2\,2} & a_{2s-2\,3} & \ldots & a_{2s-2\,r-1} & k_{2s-2} & a_{2s-2\,r+1} & \ldots \\
a_{2s-1\,1} & a_{2s-1\,2} & a_{2s-1\,3} & \ldots & a_{2s-1\,r-1} & k_{2s-1} & a_{2s-1\,r+1} & \ldots \\
a_{2s1} & a_{2s2} & a_{2s3} & \ldots & a_{2sr-1} & k_{2s} & a_{2sr+1} & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{2n-1\,1} & a_{2n-1\,2} & a_{2n-1\,3} & \ldots & a_{2n-1\,r-1} & k_{2n-1} & a_{2n-1\,r+1} & \ldots \\
a_{2n1} & a_{2n2} & a_{2n3} & \ldots & a_{2nr-1} & k_{2n} & a_{2nr+1} & \ldots
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1r-1} & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2r-1} & a_{2r} & a_{2r+1} & \ldots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3r-1} & a_{3r} & a_{3r+1} & \ldots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ldots & a_{4r-1} & a_{4r} & a_{4r+1} & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{2n-1\,1} & a_{2n-1\,2} & a_{2n-1\,3} & \ldots & a_{2n-1\,r-1} & a_{2n-1\,r} & a_{2n-1\,r+1} & \ldots \\
a_{2n1} & a_{2n2} & a_{2n3} & \ldots & a_{2nr-1} & a_{2nr} & a_{2nr+1} & \ldots
\end{vmatrix}}$$

im Folgenden beschäftigen werden, ist durch die Eigentümlichkeit ausgezeichnet, dass in der 1ten, 3ten ... $(2r-1)$ten Gleichung je zwei gleichweit von Anfang und Ende abstehende Coëfficienten einander gleich sind, wogegen zwischen zwei ebensolchen Coëfficienten der 2ten, 4ten ... $2r$ten Gleichung entgegengesetzte Gleichheit besteht. Das System wird dann also, wenn wir die Anzahl der Gleichungen als eine gerade Zahl $(=2n)$ voraussetzen, nachstehendes sein:

$$\begin{array}{lllll}
\dots + a_{12}x_{2n-1} & + a_{11}x_{2n} & = k_1, \\
\dots - a_{22}x_{2n-1} & - a_{21}x_{2n} & = k_2, \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots + a_{2n-1\,2}x_{2n-1} & + a_{2n-1\,1}x_{2n} & = k_{2n-1}, \\
\dots - a_{2n\,2}x_{2n-1} & - a_{2n\,1}x_{2n} & = k_{2n}.
\end{array}$$

hält man in bekannter Weise

$$\frac{\begin{vmatrix}
\dots a_{1n} & a_{1n} & \dots & a_{1r+1} & a_{1r} & a_{1r-1} & \dots & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\
\dots a_{2n} & a_{2n} & \dots & -a_{2r+1} & -a_{2r} & -a_{2r-1} & \dots & -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\
\dots a_{3n} & a_{3n} & \dots & a_{3r+1} & a_{3r} & a_{3r-1} & \dots & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\
\dots a_{4n} & -a_{4n} & \dots & -a_{4r+1} & -a_{4r} & -a_{4r-1} & \dots & -a_{43} & -a_{42} & -a_{41} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots a_{2q-1\,n} & a_{2q-1\,n} & \dots & a_{2q-1\,r+1} & a_{2q-1\,r} & a_{2q-1\,r-1} & \dots & a_{2q-1\,3} & a_{2q-1\,2} & a_{2q-1\,1} \\
\dots a_{2qn} & -a_{2qn} & \dots & -a_{2qr+1} & -a_{2qr} & -a_{2qr-1} & \dots & -a_{2q3} & -a_{2q2} & -a_{2q1} \\
\dots a_{2q+1\,n} & a_{2q+1\,n} & \dots & a_{2q+1\,r+1} & a_{2q+1\,r} & a_{2q+1\,r-1} & \dots & a_{2q+1\,3} & a_{2q+1\,2} & a_{2q+1\,1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots a_{2s-2n} & -a_{2s-2n} & \dots & -a_{2s-2r+1} & -a_{2s-2r} & -a_{2s-2r-1} & \dots & -a_{2s-23} & -a_{2s-22} & -a_{2s-21} \\
\dots a_{2s-1\,n} & a_{2s-1\,n} & \dots & a_{2s-1\,r+1} & a_{2s-1\,r} & a_{2s-1\,r-1} & \dots & a_{2s-1\,3} & a_{2s-1\,2} & a_{2s-1\,1} \\
\dots a_{2sn} & -a_{2sn} & \dots & -a_{2sr+1} & -a_{2sr} & -a_{2sr-1} & \dots & -a_{2s3} & -a_{2s2} & -a_{2s1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots a_{2n-1\,n} & a_{2n-1\,n} & \dots & a_{2n-1\,r+1} & a_{2n-1\,r} & a_{2n-1\,r-1} & \dots & a_{2n-1\,3} & a_{2n-1\,2} & a_{2n-1\,1} \\
\dots a_{2nn} & -a_{2nn} & \dots & -a_{2nr+1} & -a_{2nr} & -a_{2nr-1} & \dots & -a_{2n3} & -a_{2n2} & -a_{2n1}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
\dots a_{1n} & a_{1n} & \dots & a_{1r+1} & a_{1r} & a_{1r-1} & \dots & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\
\dots a_{2n} & -a_{2n} & \dots & -a_{2r+1} & -a_{2r} & -a_{2r-1} & \dots & -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\
\dots a_{3n} & a_{3n} & \dots & a_{3r+1} & a_{3r} & a_{3r-1} & \dots & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\
\dots a_{4n} & -a_{4n} & \dots & -a_{4r+1} & -a_{4r} & -a_{4r-1} & \dots & -a_{43} & -a_{42} & -a_{41} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots a_{2n-1\,n} & a_{2n-1\,n} & \dots & a_{2n-1\,r+1} & a_{2n-1\,r} & a_{2n-1\,r-1} & \dots & a_{2n-1\,3} & a_{2n-1\,2} & a_{2n-1\,1} \\
\dots a_{2nn} & -a_{2nn} & \dots & -a_{2nr+1} & -a_{2nr} & -a_{2nr-1} & \dots & -a_{2n3} & -a_{2n2} & -a_{2n1}
\end{vmatrix}} = \frac{V}{U}$$

Zerlegt man die Determinante V nach den Elementen der $r$ten Colonne in erste Unterdeterminanten, so stellt sich x_r dar als eine algebraische Summe mit dem allgemeinen Gliede

$$(1)^{p+r} . k_p \frac{\frac{\partial U}{\partial a_{pr}}}{U}.$$

Da ersichtlich ein Unterschied obwaltet, je nachdem p eine ge-

$$U' = \left| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1r-1} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2r-1} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & -a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3r-1} & a_{3r+1} & \dots & a_{3n} & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots a_{4r-1} & a_{4r+1} & \dots & a_{4n} & -a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q-11} & a_{2q-12} & a_{2q-13} & \dots a_{2q-1r-1} & a_{2q-1r+1} & \dots & a_{2q-1n} & a_{2q-1n} \\ a_{2q+11} & a_{2q+12} & a_{2q+13} & \dots a_{2q+1r-1} & a_{2q+1r+1} & \dots & a_{2q+1n} & a_{2q+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-11} & a_{2n-12} & a_{2n-13} & \dots a_{2n-1r-1} & a_{2n-1r+1} & \dots & a_{2n-1n} & a_{2n-1n} \\ a_{2n1} & a_{2n2} & a_{2n3} & \dots a_{2nr-1} & a_{2nr+1} & \dots & a_{2nn} & -a_{2nn} \end{array} \right|$$

In dieser Determinante $(2n-1)$ten Grades subtrahiren wir nun von jeder $(n+t)$ten Colonne die $(n-t+1)$te, nachdem wir zuvor diejenige Colonne, deren zweiter Index r ist, zur ersten gemacht haben; durch diese Operation ist vor die Determinante der Factor

$$U' = (-1)^{2n-r-1} . \left| \begin{array}{ccccccc} a_{1r} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1r-1} & a_{1r+1} & \dots \\ a_{2r} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2r-1} & a_{2r+1} & \dots \\ a_{3r} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3r-1} & a_{3r+1} & \dots \\ a_{4r} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots a_{4r-1} & a_{4r+1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q-1r} & a_{2q-11} & a_{2q-12} & a_{2q-13} & \dots a_{2q-1r-1} & a_{2q-1r+1} & \dots \\ a_{2q+1r} & a_{2q+11} & a_{2q+12} & a_{2q+13} & \dots a_{2q+1r-1} & a_{2q+1r+1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1r} & a_{2n-11} & a_{2n-12} & a_{2n-13} & \dots a_{2n-1r-1} & a_{2n-1r+1} & \dots \\ a_{2nr} & a_{2n1} & a_{2n2} & a_{2n3} & \dots a_{2nr-1} & a_{2nr+1} & \dots \end{array} \right|$$

In der so umgeformten Determinante sind diejenigen Elemente, welche $(n-2)$ Verticalreihen mit $(2n-1-(n-2)) = (n+1)$ Horizontalreihen gemein haben, durch Nullen ersetzt; es kann also sofort das bekannte Corollar[1]) des Laplaceschen Determinantensatzes in Kraft

rade oder ungerade Zahl vorstellt, so schreiben wir die Reihe besser in folgender Form:

$$\sum_{q=1}^{q=n}(-1)^{2q+r}.k_{2q}\frac{U'}{U}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^{2s-1+r}.k_{2s-1}\frac{U''}{U}\left(U'=\frac{\partial U}{\partial a_{2qr}},\ U''=\frac{\partial U}{\partial a_{2s-1r}}\right).$$

§. 2. Die beiden hier auftretenden Determinanten sollen nunmehr untersucht werden. Es sei also zunächst

$$\begin{array}{ccccccc|}
\ldots & a_{1r+1} & a_{1r} & a_{1r-1} & \ldots\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \\
\ldots & -a_{2r+1} & -a_{2r} & -a_{2r-1} & \ldots\ -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\
\ldots & a_{3r+1} & a_{3n} & a_{3r-1} & \ldots\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \\
\ldots & -a_{4r+1} & -a_{4r} & -a_{4r-1} & \ldots\ -a_{43} & -a_{42} & -a_{41} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots & a_{2q-1r+1} & a_{2q-1r} & a_{2q-1r-1} & \ldots\ a_{2q-13} & a_{2q-12} & a_{2q-11} \\
\ldots & a_{2q+1r+1} & a_{2q+1r} & a_{2q+1r-1} & \ldots\ a_{2q+13} & a_{2q+12} & a_{2q+11} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots & a_{2n-1r+1} & a_{2n-1r} & a_{2n-1r--1} & \ldots\ a_{2n-13} & a_{2n-12} & a_{2n-11} \\
\ldots & -a_{2nr+1} & -a_{2nr} & -a_{2nr-1} & \ldots\ -a_{2n3} & -a_{2n2} & -a_{2n1}
\end{array}$$

$$(-1)^{2n-r-1}$$

herausgetreten. Man erhält so

$$\begin{array}{ccccccccc|}
\ldots\ a_{1n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ a_{2n} & -2a_{2n} & \ldots & -2a_{2r+1} & -2a_{2r-1} & \ldots & -2a_{23} & -2a_{22} & -2a_{21} \\
\ldots\ a_{3n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ a_{4n} & -2a_{4n} & \ldots & -2a_{4r+1} & -2a_{4r+1} & \ldots & -2a_{43} & -2a_{42} & -2a_{41} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots\ a_{2q-1n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ a_{2q+1n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots\ a_{2n-1n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ a_{2nn} & -2a_{2nn} & \ldots & -2a_{2nr+1} & -2a_{2nr-1} & \ldots & -2a_{2n3} & -2a_{2n2} & -2a_{2n1}
\end{array}$$

treten, und es ergiebt sich, wenn man noch den jeder $(n+1)$ten bis $(2n-1)$ten Colonne gemeinschaftlichen Factor

$$-2$$

berücksichtigt,

$$U' = (-1)^{2nr-1} . (-2)^{n-1} . \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1r-1} & a_{1r+1} & \dots a_{1n} \\ a_{3n} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3r-1} & a_{3r+1} & \dots a_{5n} \\ a_{5r} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & \dots a_{5r-1} & a_{5r+1} & \dots a_{5n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q-1r} & a_{2q-11} & a_{2q-12} & a_{2q-13} & \dots a_{2q-1r-1} & a_{2q-1r+1} & \dots a_{2q-1n} \\ a_{2q+1r} & a_{2q+11} & a_{2q+12} & a_{2q+13} & \dots a_{2q+1r-1} & a_{2q+1r+1} & \dots a_{2q+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-3r} & a_{2n-31} & a_{2n-32} & a_{2n-33} & \dots a_{2n-3r-1} & a_{2n-3r+1} & \dots a_{2n-3n} \\ a_{2n-1r} & a_{2n-11} & a_{2n-12} & a_{2n-12} & \dots a_{2n-1r-1} & a_{2n-1r+1} & \dots a_{2n-1n} \end{vmatrix}$$

Die erste dieser beiden Determinanten ist vom $n$ten, die zweite vom $(n-1)$ten Grade.

1) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. S. 34.

$$U'' = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & \dots 2a_{1r-1} & 2a_{1r+1} & \dots 2a_{1n} & a_{1n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & \dots 0 & -a_{2n} & \dots \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & \dots 2a_{3r-1} & 2a_{3r+1} & \dots 2a_{3n} & a_{3n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & \dots 0 & -a_{4n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & \dots 0 & -a_{2s-2n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & \dots 0 & -a_{2sn} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2a_{2n-11} & 2a_{2n-12} & 2a_{2n-13} \dots & 2a_{2n-1r-1} & 2a_{2n-1r+1} & \dots 2a_{2n-1n} & a_{2n-1n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & \dots 0 & -a_{2nn} & \dots \end{vmatrix}$$

Verfährt man hier ganz ebenso, wie in §. 2, so ergiebt sich

$$U'' = (-1)^{+r-1} . (2)^{n-1} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1r-1} & a_{1r+1} & \dots a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3r-1} & a_{3r+1} & \dots a_{3n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \dots a_{5r-1} & a_{5r+1} & \dots a_{5n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2s-31} & a_{2s-32} & a_{2s-33} & \dots a_{2s-3r-1} & a_{2s-3r+1} & \dots a_{2s-3n} \\ a_{2s+11} & a_{2s+12} & a_{2s+13} & \dots a_{2s+1r-1} & a_{2s+1r+1} & \dots a_{2s+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-11} & a_{2n-12} & a_{2n-13} & \dots a_{2n-1r-1} & a_{2n-1r+1} & \dots a_{2n-1n} \end{vmatrix}$$

Hier ist die erste Determinante vom $(n-1)$ten, die zweite vom $n$ten Grade.

$$\times \begin{vmatrix} a_{2n} & \dots & a_{2r+1} & a_{2r-1} & \dots & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{4n} & \dots & a_{4r+1} & a_{4r-1} & \dots & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{6n} & \dots & a_{6r+1} & a_{6r-1} & \dots & a_{63} & a_{62} & a_{61} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q-2n} & \dots & a_{2q-2r+1} & a_{2q-2r-1} & \dots & a_{2q-23} & a_{2q-22} & a_{2q-21} \\ a_{2q+2n} & \dots & a_{2q+2r+1} & a_{2q+2r-1} & \dots & a_{2q+23} & a_{2q+22} & a_{2q+21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-2n} & \dots & a_{2n-2r+1} & a_{2n-2r-1} & \dots & a_{2n-23} & a_{2n-22} & a_{2n-21} \\ a_{2nn} & \dots & a_{2nr+1} & a_{2nr-1} & \dots & a_{2n3} & a_{2n2} & a_{2n1} \end{vmatrix}$$

§. 3. Nunmehr möge auch der andere Fall in's Auge gefasst werden, wo $p = 2s - 1$ ist. Addiren wir hier zu jeder Colonne, deren zweiter Index kleiner als n, bezüglich diesem gleich ist, die ihr gleiche, resp. entgegengesetzt gleiche, so wird

$$\left. \begin{matrix} \dots & a_{1r+1} & a_{1r} & a_{1r-1} & \dots & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ \dots & -a_{2r+1} & a_{2r} & -a_{2r-1} & \dots & -a_{13} & -a_{12} & -a_{11} \\ \dots & a_{3r+1} & a_{3r} & a_{3r-1} & \dots & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ \dots & -a_{4r+1} & a_{4r} & -a_{4r-1} & \dots & -a_{43} & -a_{42} & -a_{41} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & -a_{2s-2r+1} & a_{2s-2r} & -a_{2s-2r-1} & \dots & -a_{2s-23} & -a_{3s-22} & -a_{2s-21} \\ \dots & -a_{2sr+1} & a_{2sr} & -a_{2sr-1} & \dots & -a_{2s3} & -a_{2s2} & -a_{2s1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & a_{2n-1r+1} & a_{2n-1r} & a_{2n-1r-1} & \dots & a_{2n-13} & a_{2n-12} & a_{2n-11} \\ \dots & -a_{2nr+1} & a_{2nr} & -a_{2nr-1} & \dots & -a_{2n3} & -a_{2n2} & -a_{2n1} \end{matrix} \right|$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{2n} & \dots & a_{2r+1} & a_{2r} & a_{2r-1} & \dots & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{4n} & \dots & a_{4r+1} & a_{4r} & a_{4r-1} & \dots & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{6n} & \dots & a_{6r+1} & a_{6r} & a_{6r-1} & \dots & a_{62} & a_{62} & a_{61} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2s-2n} & \dots & a_{2s-2r+1} & a_{2s-2r} & a_{2s-2r+1} & \dots & a_{2s-23} & a_{2s-22} & a_{2s-21} \\ a_{2sn} & \dots & a_{1sr+1} & a_{2sr} & a_{2sr-1} & \dots & a_{2sr} & a_{2s2} & a_{2s1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2nn} & \dots & a_{2nr+1} & a_{2nr} & a_{2nr-1} & \dots & a_{2n3} & a_{2n2} & a_{2n1} \end{vmatrix}.$$

§. 4. Wenden wir uns schliesslich zu der im Nenner des obigen Bruches befindlichen Determinante,

$$U=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & a_{1n} & a_{1n-1} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & -a_{2n} & -a_{2n-1} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} & a_{3n} & a_{3n-1} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n-1} & a_{4n} & -a_{4n} & -a_{4n-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-11} & a_{2n-12} & a_{2n-13} & \dots & a_{2n-1n}\;1 & a_{2n-1n} & a_{2n-1n} & a_{2n-1n-1} & \dots \\ a_{2n1} & a_{2n2} & a_{2n3} & \dots & a_{2nn-1} & a_{2nn} & -a_{2nn} & -a_{2nn-1} & \dots \end{vmatrix}$$

Addiren wir hier, unter t jede ganze Zahl $\leqq n$ verstanden, zu jeder

$$U=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2a_{2n-11} & 2a_{2n-12} & 2a_{2n-13} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$$

und durch Zerlegung,

$$U=(-1)^n.(2)^n.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n-1} & a_{3n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \dots & a_{5n-2} & a_{5n-1} & a_{5n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-31} & a_{2n-32} & a_{2n-33} & \dots & a_{2n-3n-2} & a_{2n-3n-1} & a_{2n-3n} \\ a_{2n-11} & a_{2n-12} & a_{2n-13} & \dots & a_{2n-1n-2} & a_{2n-1n-1} & a_{2n-1n} \end{vmatrix}$$

Hier sind beide Factoren vom $n$ten Grade.

Wird jetzt der Quotient

$$\frac{U'}{U}$$

gebildet, so mache man zuerst die erste Colonne von U' zur $r$ten; der oben für U' erhaltene Wert ist dann noch mit

$$(-1)^{r-1}$$

$$\begin{array}{cccc|}
\cdots & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\
\cdots & -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\
\cdots & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\
\cdots & -a_{43} & -a_{42} & -a_{41} \\
\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdots & a_{2n-13} & a_{2n-12} & a_{2n-11} \\
\cdots & -a_{2n3} & -a_{2n2} & -a_{2n1}
\end{array}\,.$$

$t$ten Colonne die $(2n-t+1)$te, so folgt

$$\begin{array}{cccccccc|}
\cdots 2a_{1n-1} & 2a_{1n} & a_{1n} & a_{1n-1} & \cdots & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\
\cdots\; 0 & 0 & -a_{2n} & -a_{2n-1} & \cdots & -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\
\cdots 2a_{3n-1} & 2a_{3n} & a_{3n} & a_{3n-1} & \cdots & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\
\cdots\; 0 & 0 & -a_{4n} & -a_{4n-1} & \cdots & -a_{43} & -a_{42} & -a_{41} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdots 2a_{2n-1n-1} & 2a_{2n-1n} & a_{2n-1n} & a_{2n-1n-1} & \cdots & a_{2n-13} & a_{2n-12} & a_{2n-11} \\
\cdots\; 0 & 0 & -a_{2nn} & -a_{2nn-1} & & -a_{2n3} & -a_{2n2} & -a_{2n1}
\end{array}\,.$$

$$\times\left|\begin{array}{ccccccc}
a_{2n} & a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\
a_{5n} & a_{4n-1} & a_{4n-2} & \cdots & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\
a_{6n} & a_{6n-1} & a_{6n-2} & \cdots & a_{63} & a_{62} & a_{61} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{2n-2n} & a_{2-n2n-1} & a_{2n-2n-2} & \cdots & a_{2n-23} & a_{2n-22} & a_{2n-21} \\
a_{2nn} & a_{2nn-1} & a_{2nn-2} & \cdots & a_{2n3} & a_{2n2} & a_{2n1}
\end{array}\right|.$$

zu multipliciren. Wie man sieht, hebt sich alsdann der erste Determinatenfactor von U' gegen den ersten Determinatenfactor von U. Zur Bildung von

$$\frac{U''}{U}$$

möge ebenso verfahren werden; es hebt sich ferner in analoger Weise der zweite Factor fort. So gewinnt man das Schlussresultat

$$x_1 = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(-1)^{-3n+2q+r+4}}{2} \cdot k_{2q} \frac{\begin{vmatrix} a_{2n} & a_{2n-1} & \dots a_{2r+1} & a_{2r-1} & \dots a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{4n} & a_{4n-1} & \dots a_{4r+1} & a_{4r-1} & \dots a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{6n} & a_{6n-1} & \dots a_{6r+1} & a_{6r-1} & \dots a_{63} & a_{62} & a_{61} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q-2n} & a_{2q-2n-1} & \dots a_{2q-2r+1} & a_{2q-2r-1} & \dots a_{2q-23} & a_{2q-22} & a_{2q-21} \\ a_{2q+2n} & a_{2q+2n-1} & \dots a_{2q+2r+1} & a_{2q+2r-1} & \dots a_{2q+23} & a_{2q+22} & a_{2q+21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-2n} & a_{2n-2n-1} & \dots a_{2n-2r+1} & a_{2n-2r-1} & \dots a_{2n-23} & a_{2n-22} & a_{2n-21} \\ a_{2nn} & a_{2nn-1} & \dots a_{2nr+1} & a_{2nr-1} & \dots a_{2n3} & a_{2n2} & a_{2n1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{2n} & a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{4n} & a_{4n-1} & a_{4n-2} & \dots & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{6n} & a_{6n-1} & a_{6n-2} & \dots & a_{63} & a_{62} & a_{61} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q-2n} & a_{2q-2n-1} & a_{2q-2n-2} & \dots & a_{2q-23} & a_{2q-22} & a_{2q-21} \\ a_{2qn} & a_{2qn-1} & a_{2qn-2} & \dots & a_{2q3} & a_{2q2} & a_{2q1} \\ a_{2q+2n} & a_{2q+2n-1} & a_{2q+2n-2} & \dots & a_{2q+23} & a_{2q+22} & a_{2q+21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-2n} & a_{2n-2n-1} & a_{2n-2n-2} & \dots & a_{2n-23} & a_{2n-22} & a_{2n-21} \\ a_{2nn} & a_{2nn-1} & a_{2nn-2} & \dots & a_{2n3} & a_{2n2} & a_{2n1} \end{vmatrix}}$$

Auf eine ganz entsprechende Formel würden wir gekommen sein, wenn wir von der Annahme einer ungeraden Anzahl von Gleichungen ausgegangen wären.

$$\begin{array}{l} x_1 \sin\frac{\pi}{2n+1} + x_2 \sin\frac{2\pi}{2n+1} + \dots + x_n \sin\frac{n\pi}{2n+1} + x_{n+1} \sin\frac{(n+1)\pi}{2n+1} + \\ x_1 \sin\frac{2\pi}{2n+1} + x_2 \sin\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + x_n \sin\frac{2n\pi}{2n+1} + x_{n+1} \sin\frac{2(n+1)\pi}{2n+1} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 \sin\frac{2q\pi}{2n+1} + x_2 \sin\frac{2q\pi}{2n+1} + \dots + x_n \sin\frac{2nq\pi}{2n+1} + x_{n+1} \sin\frac{2(n+1)q\pi}{2n+1} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 \sin\frac{(2s-1)\pi}{2n+1} + x_2 \sin\frac{2.(2s-1)\pi}{2n+1} + \dots + x_n \sin\frac{(2s-1)n\pi}{2n+1} + x_{n+1} \sin\frac{(2s-1)(n+1)\pi}{2n+1} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 \sin\frac{2n\pi}{2n+1} + x_2 \sin\frac{2.2n\pi}{2n+1} + \dots + x_n \sin\frac{n.2n\pi}{2n+1} + x_{n+1} \sin\frac{(n+1)2n\pi}{2n+1} + \end{array}$$

so wissen wir zunächst, dass

$$\sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{\frac{-5n+2s+3r+3}{2}}}{2} \cdot k_{2s-1} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1r-1} & a_{1r+1} & \ldots a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots a_{3r-1} & a_{3r+1} & \ldots a_{3n-2} & a_{3n-1} & a_{3n} \\ a_{51} & a_{52} & \ldots a_{5r-1} & a_{5r+1} & \ldots a_{5n-2} & a_{5n-1} & a_{5n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2s-31} & a_{2s-32} & \ldots a_{2s-3r-1} & a_{2s-3r+1} & \ldots a_{2s-3n-2} & a_{2s-3n-1} & a_{2s-3n} \\ a_{2s+11} & a_{2s+12} & \ldots a_{2s+1r-1} & a_{2s+1r+1} & \ldots a_{2s+1n-2} & a_{2s+1n-1} & a_{2s+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-31} & a_{2n-32} & \ldots a_{2n-3r-1} & a_{2n-3r+1} & \ldots a_{2n-3n-2} & a_{2n-3n-1} & a_{2n-3n} \\ a_{2n-11} & a_{2n-12} & \ldots a_{2n-1r-1} & a_{2n-1r+1} & \ldots a_{2n-1n-2} & a_{2n-1n-1} & a_{2n-1n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n-2} & a_{3n-1} & a_{3n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \ldots & a_{5n-2} & a_{5n-1} & a_{5n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2s-31} & a_{2s-32} & a_{2s-33} & \ldots & a_{2s-1n-2} & a_{2s-3n-1} & a_{2s-3n} \\ a_{2s-11} & a_{2s-12} & a_{2s-13} & \ldots & a_{2s-1n-2} & a_{2s-1n-1} & a_{2s-1n} \\ a_{2s+11} & a_{2s+12} & a_{2s+13} & \ldots & a_{2s+1n-2} & a_{2s+1n-1} & a_{2s+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-31} & a_{2n-32} & a_{2n-33} & \ldots & a_{2n-3n-2} & a_{2n-3n-1} & a_{2n-3n} \\ a_{2n-11} & a_{2n-12} & a_{2n-13} & \ldots & a_{2n-1n-2} & a_{2n-1n-1} & a_{2n-1n} \end{vmatrix}}$$

§. 5. **Die zuletzt entwickelte Relation kann zur Herleitung eini- nicht uninteressanter Sätze über solche Determinanten verwendet den, deren Elemente gewisse goniometrische Functionen sind. rachten wir nämlich folgendes Gleichungs-System**

$$\cdot x_{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + x_{2n}\sin\frac{2n\pi}{2n+1} = k_1,$$

$$\cdot x_{2n-1}\sin\frac{2(2n-1)\pi}{2n+1} + x_{2n}\sin\frac{2.2n\pi}{2n+1} = k_2,$$

. . . .

$$\cdot x_{2n-1}\sin\frac{2(2n-1)q\pi}{2n+1} + x_{2n}\sin\frac{2.2nq\pi}{2n+1} = k_{2q},$$

. . . .

$$\cdot x_{2n-1}\sin\frac{(2s-1)(2n-1)\pi}{2n+1} + x_{2n}\sin\frac{(2s-1)2n\pi}{2n+1} = k_{2s-1},$$

. . . .

$$\cdot x_{2n-1}\sin\frac{(2n-1)2n\pi}{2n+1} + x_{2n}\sin\frac{2n.2n\pi}{2n+1} = k_{2n},$$

$$\frac{2qt\pi}{2n+1}+\frac{2(2n-q+1)t\pi}{2n+1}=2t\pi;$$

$$\frac{(2s-1)t\pi}{2n+1}+\frac{(2n-t+1)(2s-1)\pi}{2n+1}=(2s-1)\pi$$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen gehen aber aus trigonometrischen Gründen sofort wieder die beiden folgenden hervor:

$$\sin\frac{2qt\pi}{2n+1}=-\sin\frac{2(2n-q+1)t\pi}{2n+1},$$

$$\sin\frac{(2s-1)t\pi}{2n+1}=\sin\frac{(2n-t+1)(2s-1)\pi}{2n+1}.$$

I.

$$\sin\frac{2qr\pi}{2n+1}=\frac{2n+1}{4}.(-1)^{-3n+2q+r+4}.\frac{\begin{vmatrix} \sin\frac{2\pi}{2n+1} & \sin\frac{4\pi}{2n+1} & \sin\frac{6\pi}{2n+1} & \cdots \\ \sin\frac{4\pi}{2n+1} & \sin\frac{8\pi}{2n+1} & \sin\frac{12\pi}{2n+1} & \cdots \\ \sin\frac{6\pi}{2n+1} & \sin\frac{12\pi}{2n+1} & \sin\frac{18\pi}{2n+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\frac{(2q-2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2q-2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3(2q-2)\pi}{2n+1} & \cdots \\ \sin\frac{(2q+2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2q+2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3(2q+2)\pi}{2n+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\frac{2n\pi}{2n+1} & \sin\frac{4n\pi}{2n+1} & \sin\frac{6n\pi}{2n+1} & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin\frac{2\pi}{2n+1} & \sin\frac{4\pi}{2n+1} & \cdots \\ \sin\frac{4\pi}{2n+1} & \sin\frac{8\pi}{2n+1} & \cdots \\ \sin\frac{6\pi}{2n+1} & \sin\frac{12\pi}{2n+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\frac{(2q-2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2q-2)\pi}{2n+1} & \cdots \\ \sin\frac{2q\pi}{2n+1} & \sin\frac{2.2q\pi}{2n+1} & \cdots \\ \sin\frac{(2q+2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2q+2)\pi}{2n+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\frac{2n\pi}{2n+1} & \sin\frac{4n\pi}{2n+1} & \cdots \end{vmatrix}}.$$

Es erfüllt also das zuletzt aufgestellte System alle die Bedingungen, welche wir dem eingangs betrachteten allgemeineren auferlegt hatten.

Es hat nun Unferdinger[2]) durch Anwendung einiger sinnreicher Kunstgriffe gezeigt, dass dies letztre System eine sehr einfache Auflösung zulasse; nach ihm ist

$$x_r = \frac{2}{2n+1}\left[k_1 \sin\frac{r\pi}{2n+1} + k_2 \sin\frac{2r\pi}{2n+1} + k_3 \sin\frac{3r\pi}{2n+1} + \ldots + k_{2n} \sin\frac{2nr\pi}{2n+1}\right].$$

Benützt man andrerseits die Entwicklungen von §. 4., so liefert die Gleichsetzung zweier Coefficienten von k_{2q} und k_{2s-1} nachstehende Beziehungen:

$$\dfrac{\left.\begin{array}{llll}
\ldots \sin\frac{2(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{2(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2n\pi}{2n+1} \\
\ldots \sin\frac{4(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{4(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{4(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{4n\pi}{2n+1} \\
\ldots \sin\frac{6(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{6(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{6(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{6n\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots \sin\frac{(r-1)(2q-2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(r+1)(2q-2)\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{(n-1)(2q-2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{n(2q-2)\pi}{2n+1} \\
\ldots \sin\frac{(r-1)(2q+2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(r+1)(2q+2)\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{(n-1)(2q+2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{n(2q+2)\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots \sin\frac{2(r-1)n\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(r+1)n\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{2(n-1)n\pi}{2n+1} & \sin\frac{n.2n\pi}{2n+1}
\end{array}\right|}{\left.\begin{array}{llll}
\ldots \sin\frac{2(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2r\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{2(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2n\pi}{2n+1} \\
\ldots \sin\frac{4(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{4r\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{4(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{4n\pi}{2n+1} \\
\ldots \sin\frac{6(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{6r\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{6(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{6n\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots \sin\frac{(r-1)(2q-2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{r(2q-2)\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{(n-1)(2q-2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{n(2q-2)\pi}{2n+1} \\
\ldots \sin\frac{(r-1)2q\pi}{2n+1} & \sin\frac{r2q\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{(n-1)2q\pi}{2n+1} & \sin\frac{n.2q\pi}{2n+1} \\
\ldots \sin\frac{(r-1)(2q+2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{r(2q+2)\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{(n-1)(2q+2)\pi}{2n+1} & \sin\frac{n(2q+2)\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots \sin\frac{2(r-1)n\pi}{2n+1} & \sin\frac{2rn\pi}{2n+1} & \ldots \sin\frac{2(n-1)n\pi}{2n+1} & \sin\frac{n.2n\pi}{2n+1}
\end{array}\right|}$$

II.

$$\sin\frac{(2s-1)r\pi}{2n+1}=\frac{2n+1}{4}.(-1)^{-5n+2s-3r+3}\frac{\begin{vmatrix}\sin\frac{\pi}{2n+1} & \sin\frac{2\pi}{2n+1} & \sin\frac{3\pi}{2n+1} & \dots\\ \sin\frac{3\pi}{2n+1} & \sin\frac{6\pi}{2n+1} & \sin\frac{9\pi}{2n+1} & \dots\\ \sin\frac{5\pi}{2n+1} & \sin\frac{10\pi}{2n+1} & \sin\frac{15\pi}{2n+1} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sin\frac{(2s-3)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2s-3)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3(2s-3)\pi}{2n+1} & \dots\\ \sin\frac{(2s+1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2s+1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3(2s+1)\pi}{2n+1} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3(2n-1)\pi}{2n+1} & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin\frac{\pi}{2n+1} & \sin\frac{2\pi}{2n+1} & \dots\\ \sin\frac{3\pi}{2n+1} & \sin\frac{6\pi}{2n+1} & \dots\\ \sin\frac{5\pi}{2n+1} & \sin\frac{10\pi}{2n+1} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \sin\frac{(2s-3)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2s-3)\pi}{2n+1} & \dots\\ \sin\frac{(2s-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2s-1)\pi}{2n+1} & \dots\\ \sin\frac{(2s+1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2s+1)\pi}{2n+1} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{2(2n-1)\pi}{2n+1} & \dots\end{vmatrix}}$$

Diese beiden Relationen durch blosse Determinantentransformationen herzustellen, dürfte mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden sein.

In Worten lässt sich das Ergebniss der letzten Betrachtungen folgendermassen als Lehrsatz resumiren:

Die beiden Ausdrücke

$$\frac{\begin{array}{cccc}
\ldots\sin\frac{(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{n\pi}{2n+1} \\
\ldots\sin\frac{3(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{3(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3n\pi}{2n+1} \\
\ldots\sin\frac{5(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{5(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{5(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{5n\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots\sin\frac{(2s-3)(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s-3)(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(2s-3)(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s-3)n\pi}{2n+1} \\
\ldots\sin\frac{(2s+1)(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s+1)(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(2s+1)(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s+1)n\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots\sin\frac{(2n-1)(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2n-1)(r+1)\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(2n-1)(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2n-1)n\pi}{2n+1}
\end{array}\Bigg|}{\begin{array}{cccc}
\ldots\sin\frac{(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{r\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{n\pi}{2n+1} \\
\ldots\sin\frac{3(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3r\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{3(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{3n\pi}{2n+1} \\
\ldots\sin\frac{5(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{5r\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{5(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{5n\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots\sin\frac{(2s-3)(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s-3)r\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(2s-3)(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s-3)n\pi}{2n+1} \\
\ldots\sin\frac{(2s-1)(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s-1)r\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(2s-1)(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s-1)n\pi}{2n+1} \\
\ldots\sin\frac{(2s+1)(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s+1)s\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(2s+1)(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2s+1)n\pi}{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots\sin\frac{(2n-1)(r-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2n-1)r\pi}{2n+1} & \ldots\sin\frac{(2n-1)(n-1)\pi}{2n+1} & \sin\frac{(2n-1)n\pi}{2n+1}
\end{array}\Bigg|}$$

$$\sin\frac{2qr\pi}{2n+1},\qquad \sin\frac{(2s-1)r\pi}{2n+1}$$

können als Quotienten zweier aus ähnlich gebildeten trigonometrischen Functionen zusammengesetzten Determinanten vom bezüglich $(n-1)$ten und $n$ten Grade dargestellt werden, und zwar besitzt dieser Quotient die Eigenschaft der unmittelbaren Transformirbarkeit

in einen $n$gliedrigen Kettenbruch[3]). q, s, r sind beliebige ganze positive Zahlen $< n$.

2) Unferdinger, Ueber die Auflösung des linearen Systems von Gleichungen:

$$\sum_{r=1}^{r=m} x_r \sin\frac{rn\pi}{m+1} = k_n (n = 1, 2, \ldots n),$$

Archiv d. Math. u. Phys. 56. Band S. 105.

3) Günther, Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche, ibid. 55. Band. S. 390.

Anmerkung. Die 2 Indices, welche die $2n.2n$ Elemente a unterscheiden, liessen sich aus Mangel an Raum nicht sichtlich trennen. Nichtsdestoweniger wird das Lesen keine Schwierigkeit haben, wenn man bloss beachtet, dass der erste Index durch die ganze Horizontalreihe, der zweite durch die ganze Verticalreihe gleichlautend hindurchgeht. (D. Red.).

XIV.

Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems.

Fünfter Artikel. Fortsetzung von N. III.

Von

R. Hoppe.

---

12. Fall, wo π linear in μ und μ_1, aber μ_1 nicht linear in μ ist.

Im vorigen Artikel hatten wir angenommen, dass π nicht linear in μ und μ_1 sei. Setzen wir jetzt zur Behandlung des restirenden Falles

$$\pi = \gamma + \gamma_1 \mu + \gamma_2 \mu_1 \tag{182}$$

wo γ, γ_1, γ_2 Functionen von w sind; dann nehmen die Gl. (124) folgende einfachere Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} A &= A + A_1 \mu + A_2 \mu_1 \\ A_1 &= B + B_1 \mu + B_2 \mu_1 \\ A_2 &= C + C_1 \mu + C_2 \mu_1 \\ A_3 &= D + D_1 \mu + D_2 \mu_1 \end{aligned}\right\} \tag{183}$$

Ferner lassen sich nun die Integrationen (123) (s. d. folgenden Abkürzungen) in Ausführung bringen, und man findet:

$$\left.\begin{aligned} S &= (\gamma_1 + \gamma_2 \mu) \cos \lambda - \gamma_2 \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \sin \lambda + S_0 \\ T &= (\gamma_1 + \gamma_2 \mu) \sin \lambda + \gamma_2 \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \cos \lambda + T_0 \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

Führt man diese Werte in die Gl. (123) ein und setzt zur Abkürzung

$$L_0 = \alpha' \sin\lambda + \beta' \sin\alpha\cos\lambda$$
$$L = (\gamma_2 + \varkappa) L_0 - (S_0' + T_0\beta'\cos\alpha)\cos\lambda - (T_0' - S_0\beta'\cos\alpha)\sin\lambda$$
$$\gamma_3 = \gamma' + \gamma_2' + T_0\alpha' + S_0\beta'\sin\alpha$$

so kommt: (185)

$$A = \gamma\frac{\partial\mu}{\partial w} - \gamma_3\mu - \gamma_1'\mu_1 + \gamma\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha + \gamma L_0 + (\mu_1 - \mu^2)L - \mu\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial L}{\partial\lambda}$$

$$A_1 = -\gamma_1\frac{\partial\mu}{\partial w} - \gamma_3 + \gamma_2'\mu_1 - \gamma_1\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha - \gamma L_0 - \mu L - \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial L}{\partial\lambda}$$

$$A_2 = \gamma_2\frac{\partial\mu}{\partial w} + \gamma_1' + \gamma_2'\mu + \gamma_2\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha + \gamma L_0 - L$$

$$A_3 = \frac{\partial\mu}{\partial w} + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha + L_0$$

Dies verglichen mit (183) giebt 4 Gleichungen, zwischen denen wir erst $\frac{\partial\mu}{\partial w}$ eliminiren wollen. Man erhält so: (186)

$$(\mu_1 - \mu^2)L - \mu\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial L}{\partial\lambda} = A - \gamma D + (A_1 - \gamma D_1 + \gamma_3)\mu + (A_2 - \gamma D_2 + \gamma_1')\mu_1$$
$$-\mu L - \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial L}{\partial\lambda} = B + \gamma_1 D + \gamma_3 + (B_1 + \gamma_1 D_1)\mu + (B_2 + \gamma_1 D_2 - \gamma_1')\mu_1$$
$$-L = C - \gamma_2 D - \gamma_1' + (C_1 - \gamma_2 D_1 - \gamma_2')\mu + (C_2 - \gamma_2 D_2)\mu_1$$

und nach Differentiation:

$$\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}L + \left(1 - \mu_1 - \mu\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\frac{\partial L}{\partial\lambda} = (A_1 - \gamma D_1 + \gamma_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$
$$+ (A_2 - \gamma D_2 + \gamma_1')\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

$$\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\frac{\partial L}{\partial\lambda} = -(B_1 + \gamma_1 D_1)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} - (B_2 + \gamma_1 D_2 - \gamma_2')\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda} = (-C_1 + \gamma_2 D_1 + \gamma_2')\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + (-C_2 + \gamma_2 D_2)\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

und nach Elimination von L und $\frac{\partial L}{\partial\lambda}$:

$$A - \gamma D + (A_1 - \gamma D_1 + \gamma_3)\mu + (A_2 - \gamma D_2 + \gamma_1')\mu_1$$
$$+ (C - \gamma_2 D - \gamma_1')(\mu_1 - \mu^2) + (C_1 - \gamma_2 D_1 - \gamma_2')\mu(1 - \mu_1)$$
$$+ (C_2 - \gamma_2 D_2)\left\{(\mu_1 - \mu^2)\mu_1 - \mu\left(\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)^2\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\right\} = 0$$

$$B+\gamma_1 D+\gamma_0+(B_1+\gamma_1 D_1)\mu+(B_2+\gamma_1 D_2-\gamma_2')\mu_1$$
$$-(C-\gamma_2 D-\gamma_1')\mu+(C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2')(1-2\mu_1)$$
$$-(C_2-\gamma_2 D_2)\left\{\mu\mu_1+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)^2\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\right\}$$

$$A_1-\gamma D_1+\gamma_3+(A_2-\gamma D_2+\gamma_1')\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)$$
$$+(C-\gamma_2 D-\gamma_1')\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}+(C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2')(1-\mu_1)$$
$$+(C_2-\gamma_2 D_2)\left\{\mu_1\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}+\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\left(1-\mu_1-\mu\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)\right\}=0$$

$$B_1+\gamma_1 D_1+(B_2+\gamma_1 D_2-\gamma_2')\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)-(C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2')\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)$$
$$-(C_2-\gamma_2 D_2)\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)^2=0$$

Nach der letzten Gleichung ist entweder

$$\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}=W \quad \text{(Function von } w \text{ allein)} \tag{187}$$

oder

$$B_1+\gamma_1 D_1=0;\quad B_2+\gamma_1 D_2-\gamma_2'=C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2';\quad C_2-\gamma_2 D_2=0$$

Multiplicirt man Gl. (187) mit $\partial\mu$ und integrirt bei constantem w, so kommt:

$$\mu_1=W\mu+W_1$$

gegen die Bedingung von §. 12. Es bleibt also nur der letztere Fall zu betrachten, in welchem die 3 übrigen Gleichungen sich reduciren auf

$$A-\gamma D+(A_1-\gamma D_1+\gamma_0-\gamma_2'+C_1-\gamma_2 D_1)\mu-(C-\gamma_2 D-\gamma_1')\mu^2$$
$$+\{A_2-\gamma D_2+C-\gamma_2 D-(C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2')\mu\}\mu_1=0$$

$$B+\gamma_1 D+\gamma_0-\gamma_2'+C_1-\gamma_2 D_1-(C-\gamma_2 D-\gamma_1')\mu-(C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2')\mu_1=0$$

$$A_1-\gamma D_1+\gamma_0-\gamma_2'+C_1-\gamma_2 D_1+(A_2-\gamma D_2+\gamma_1')\mu-(C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2')\mu_1$$
$$+(A_2-\gamma D_2+C-\gamma_2 D)\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}=0$$

Die zweite lässt sich nur erfüllen durch

$$B+\gamma_1 D+\gamma_3=0;\quad C-\gamma_2 D-\gamma_1'=0;\quad C_1-\gamma_2 D_1-\gamma_2'=0$$

Infolge dessen reduciren sich die übrigen auf

$$A-\gamma D+(A_1-\gamma D_1+\gamma'+\gamma_2')\mu+(A_2-\gamma D_2+\gamma_1')\mu_1=0$$

$$A_1 - \gamma D_1 + \gamma' + \gamma_2' + (A_2 - \gamma D_2 + \gamma_1')\left(\mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) = 0$$

und geben:

$$A - \gamma D = 0; \quad A_1 - \gamma D_1 + \gamma' + \gamma_2' = 0; \quad A_2 - \gamma D_2 + \gamma_1' = 0$$

Jetzt ist

$$\left.\begin{array}{l|l|l} A = \gamma D & A_1 = \gamma D_1 - \gamma_3 & A_2 = \gamma D_2 - \gamma_1' \\ B = -\gamma_1 D - \gamma_3 & B_1 = -\gamma_1 D_1 & B_2 = -\gamma_1 D_2 + \gamma_2' \\ C = \gamma_2 D + \gamma_1' & C_1 = \gamma_2 D + \gamma_2' & C_2 = \gamma_2 D_2 \end{array}\right\} \quad (188)$$

Die dritte der Gl. (186) lautet jetzt:

$$L = 0 \quad (189)$$

und hiermit sind die übrigen sämmtlich erfüllt, und dadurch die 4 Gl. (185) identisch geworden, so dass sie sämmtlich vertreten werden durch

$$\frac{\partial\mu}{\partial w} + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha + L_0 = D + D_1\mu + D_2\mu_1 \quad (190)$$

Aus der zweiten Urgleichung (121)

$$\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial k}{\partial w} = A_4 + A_5 h + A_6\frac{h^2}{2} + A_7\left(k - h\frac{\partial k}{\partial h}\right) + A_8\left(k - \frac{h}{2}\frac{\partial k}{\partial h}\right)h + A_9\frac{\partial k}{\partial h}$$

geht durch Einsetzung eines Specialwerts für v hervor: (191)

$$\frac{\partial k}{\partial w} = E + E_1 h + E_2\frac{h^2}{2} + E_3\left(k - h\frac{\partial k}{\partial h}\right) + E_4\left(k - \frac{h}{2}\frac{\partial k}{\partial h}\right)h + E_5\frac{\partial k}{\partial h}$$

Dies eingeführt giebt:

$$\begin{aligned} & A_4 - E\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \left(A_5 - E_1\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)h + \left(A_6 - E_2\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\frac{h^2}{2} \\ & + \left(A_7 - E_3\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\left(k - h\frac{\partial k}{\partial h}\right) + \left(A_8 - E_4\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\left(k - \frac{h}{2}\frac{\partial k}{\partial h}\right)h \\ & + \left(A_9 - E_5\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial k}{\partial h} = 0 \end{aligned} \quad (192)$$

Ist nun $A_8 - E_4\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$ nicht constant null, so erhält man durch Einsetzung eines neuen Specialwerts für v:

$$\left(k - \frac{h}{2}\frac{\partial k}{\partial h}\right)h = F + F_1 h + F_2\frac{h^2}{2} + F_3\left(k - h\frac{\partial k}{\partial h}\right) + F_4\frac{\partial k}{\partial h} \quad (193)$$

und die Gleichung wird:

$$A_4+FA_8-(E+FE_4)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}+\left\{A_5+F_1A_8-(E_1+F_1E_4)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right\}h$$
$$+\left\{A_6+F_2A_8-(E_2+F_2E_4)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right\}\frac{h^2}{2}$$
$$+\left\{A_7+F_3A_8-(E_4+F_3E_4)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right\}\left(k-h\frac{\partial k}{\partial h}\right)$$
$$+\left\{A_9+F_4A_8-(E_5+F_4E_4)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right\}\frac{\partial k}{\partial h}=0 \qquad (194)$$

Ist hier der Coefficient des vorletzten Terms nicht constant null, so ergiebt ein neuer Specialwert:

$$k-h\frac{\partial k}{\partial h}=G+G_1h+G_2\frac{h^2}{2}+G_3\frac{\partial k}{\partial h} \qquad (195)$$

Differentiirt man die Gl. (193) (195), so kommt:

$$k-\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}=F_1+F_2h-F_3h\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}+F_4\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}$$
$$-h\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}=G_1+G_2h+G_3\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}$$

und nach Elimination von $\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}$:

$$(G_3+h)(k-F_1-F_2h)+(G_1+G_2h)\left(F_4-F_3h+\frac{h^2}{2}\right)=0$$

Dies wieder differentiirt giebt:

$$k-F_1-F_2h+(G_3+h)\frac{\partial k}{\partial h}+G_2F_4-G_1F_3+(G_1-2G_2F_3)h+\frac{3}{2}G_2h^2$$

und nach Addition von (195):

$$2k=G+F_1+(G_1+F_2)h+G_1F_3-G_2F_4+(2G_2F_3-G_1)h-G_2h^2$$

Demnach führt die Annahme auf den bereits behandelten Fall eines in h quadratischen k zurück; der vorletzte Coefficient in (194) muss null sein. Wäre nun der letzte nicht null, so hätte man:

$$\frac{\partial k}{\partial h}=J+J_1h+J_2\frac{h^2}{2} \qquad (196)$$

und nach Integration:

$$k=J_0+Jh+J_1\frac{h^2}{2}+J_2\frac{h^3}{6} \qquad (197)$$

Führt man dies in (193) ein, so ergiebt sich $J_2=0$, und k ist

wiederum quadratisch. Es bleibt daher nur übrig, dass alle 5 Coefficienten in (194) null sind. So erhält man 5 Gleichungen:

$$A_4+FA_8=G\frac{\partial\mu}{\partial\lambda};\quad A_5+F_1A_8=G_1\frac{\partial\mu}{\partial\lambda};\quad A_6+F_2A_8=G_2\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

$$A_7+F_3A_8=G_3\frac{\partial\mu}{\partial\lambda};\quad A_9+F_4A_8=G_4\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} \tag{198}$$

(wo die Werte der G aus (194) zu entnehmen sind). Die Werte (123) der A gestalten sich nach Einführung der Werte (182) und (183), wenn man

$$A_8=(A_0-D_2)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

$$\mu_2=\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2};\quad \mu_3=\mu_1-\mu\mu_2$$

setzt, folgendermassen:

$$\left.\begin{aligned}
A_4 &= \quad\{B+\gamma D_1-\varkappa'+(\gamma\mu_2-\gamma_1\mu_3)A_0\}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\\
A_5 &= \quad\{C-\gamma D_2+(\gamma+\gamma_2\mu_3)A_0\}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\\
A_6 &= -\{C_1-\gamma_1 D_2+(\gamma_1+\gamma_2\mu_2)A_0\}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\\
A_7 &= \quad(D_1+\mu_2A_0)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\\
A_9 &= \quad(D+\mu_3A_0)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}
\end{aligned}\right\} \tag{199}$$

Dies in die vorigen 5 Gleichungen (198) eingeführt giebt:

$$\left.\begin{aligned}
&(\gamma\mu_2-\gamma_1\mu_3+F)A_0=J=G-B-\gamma D_1+FD_2+\varkappa'\\
&(\gamma_2\mu_3+\gamma+F_1)A_0=J_1=G_1-C+(\gamma+F_1)D_2\\
&(\gamma_2\mu_2+\gamma_1-F_2)A_0=J_2=-G_2-C_1+(\gamma_1-F_2)D_2\\
&(\mu_2+F_3)A_0=J_3=G_3-D_1+F_3D_2\\
&(\mu_3+F_4)A_0=J_4=G_4-D+F_4D_2
\end{aligned}\right\} \tag{200}$$

Ist nun A_0 nicht constant null, so geben die 2 letzten Gleichungen:

$$J_3(\mu_3+F_4)=J_4(\mu_2+F_3)$$

und nach Integration:

$$\frac{J_3(\mu_1+F_4)-J_4F_3}{J_3\mu+J_4}=\text{Function von } w$$

also μ_1 linear in μ, gegen die Voraussetzung des Paragraphen. Folglich ist

$$A_0 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w} = \alpha' \cos\beta - D_2 \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \tag{201}$$

Jetzt werden die Gl. (200) erfüllt durch $J = J_1 = \ldots = 0$, d. i. nach Einsetzung der Werte für die G durch

$$\left.\begin{aligned} E &= B + \gamma D_1 - F(E_4 + D_2) - \varkappa' \\ E_1 &= C - \gamma D_2 - F_1(E_4 + D_2) \\ E_2 &= -C_1 + \gamma_1 D_2 - F_2(E_4 + D_2) \\ E_3 &= D_1 - F_3(E_4 + D_2) \\ E_5 &= D - F_4(E_4 + D_2) \end{aligned}\right\} \tag{202}$$

Die zweite Urgleichung ist jetzt erfüllt; es hat sich keine neue Bestimmung für μ ergeben; die einzige Bestimmung bleibt Gl. (190).

Führt man die Werte (183) (182) in die erste Urgleichung (120) ein, so müssen die Coefficienten von μ und μ_1, so wie der freie Term einzeln verschwinden, und man erhält die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} H + \gamma H_3 + A + B h + C \frac{h^2}{2} + D k &= 0 \\ H_1 + \gamma_1 H_3 + A_1 + B_1 h + C_1 \frac{h^2}{2} + D_1 k &= 0 \\ H_2 + \gamma_2 H_3 + A_2 + B_2 h + C_2 \frac{h^2}{2} + D_2 k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{203}$$

Setzt man für H, H_1, H_2, H_3 die Werte (122), darin für $\frac{\partial k}{\partial w}$ den Wert (191), in diesem wieder für E, E_1, ... die Werte (202), führt endlich die Werte (188) ein, so gehen bei Anwendung von (189) die 3 Gleichungen (203) über in

$$\left.\begin{aligned} \left(k - h\frac{\partial k}{\partial h} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial h^2} + \gamma\right)\left(\frac{\partial h}{\partial w} + D - D_1 h + D_2 \frac{h^2}{2}\right) &= 0 \\ \left(-\frac{\partial k}{\partial h} + h\frac{\partial^2 k}{\partial h^2} + \gamma_1\right)\left(\frac{\partial h}{\partial w} + D - D_1 h + D_2 \frac{h^2}{2}\right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 k}{\partial h^2} + \gamma_2\right)\left(\frac{\partial h}{\partial w} + D - D_1 h + D_2 \frac{h^2}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{204}$$

Der Factor $\frac{\partial^2 k}{\partial h^2} + \gamma_2$ darf nicht constant null sein, weil sonst k quadratisch in h wäre; folglich ist

$$\frac{\partial h}{\partial w}+D-D_1h+D_2\frac{h^2}{2}=0 \tag{205}$$

Jetzt bleiben zur Bestimmung von k die 2 Gl. (191) (193). Letztere giebt integrirt:

$$k=H_0k_1;\qquad k_1=-\int\frac{H_4\partial h}{H_0^2} \tag{206}$$

$$H_0=F_4-F_3h+\frac{h^2}{2};\qquad H_4=F+F_1h+F_2\frac{h^2}{2}$$

Erstere geht nach Einführung dieses Wertes und der Werte (202) (188) über in

$$\frac{\partial k_1}{\partial w}+\frac{H_5}{H_0}k_1+\frac{H_6}{H_0}+\frac{H_7H_4}{H_0^2}=0$$

wo

$$H_5=DF_3-D_1F_4+F_4'+(D_2F_4-D-F_3')h+(D_1-D_2F_3)\frac{h^2}{2}$$

$$H_6=\gamma_1D-\gamma D_1+\gamma_3+(\gamma D_2-\gamma_2D-\gamma_1')h+(\gamma_2D_1-\gamma_1D_2+\gamma_2')\frac{h^2}{2}$$

$$H_7=D-D_1h+D_2\frac{h^2}{2}$$

gesetzt ist. Dies differentiirt nach h giebt vermöge (206):

$$k_1\frac{\partial}{\partial h}\frac{H_5}{H_0}=\frac{\partial}{\partial w}\frac{H_4}{H_0^2}+\frac{H_5H_4}{H_0^3}-\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{H_6}{H_0}+\frac{H_7H_4}{H_0^2}\right) \tag{207}$$

Ist nun der Coefficient von k_1 nicht constant null, so ist k_1 rational in h. Das Integral (206) kann 2 rationale Formen haben: ist H_0 kein Quadrat, so ist k der Zähler von k_1, und dieser ist zweiten Grades, mithin der Fall zu verwerfen; ist hingegen

$$H_0=\tfrac{1}{2}(h-M)^2 \tag{208}$$

so findet man:

$$k_1=\frac{2}{3}\frac{F_0}{(h-M)^3}+\frac{2F_5}{(h-M)^2}+\frac{2F_2}{h-M}+F_6$$

wo

$$F_0=2F+2F_1M+F_2M^2;\qquad F_5=F_1+F_2M$$

gesetzt ist, und F_0 nicht constant null sein darf, damit k nicht quadratisch in h wird. In gleicher Form lässt sich entwickeln:

$$\frac{H_4}{H_0}=\frac{F_0}{(h-M)^2}+\frac{2F_5}{h-M}+F_2$$

$$\frac{H_5}{H_0}=\frac{G_0}{(h-M)^2}+\frac{2G_5}{h-M}+G_2$$

$$\frac{H_6}{H_0} = \frac{J_0}{(h-M)^2} + \frac{2J_5}{h-M} + J_2$$

$$\frac{H_7}{H_0} = \frac{D_0}{(h-M)^2} + \frac{2D_5}{h-M} + D_2$$

und Gl. (207) geht über in

$$\frac{2F_0M'}{(h-M)^4} + \frac{2}{3}\frac{F_0'}{(h-M)^3} + \frac{4F_5M'}{(h-M)^3} + \frac{2F_5'}{(h-M)^2} + \frac{2F_2M'}{(h-M)^2} + \frac{2F_2'}{h-M} + F_6'$$

$$+ \left\{\frac{G_0}{(h-M)^2} + \frac{2G_5}{h-M} + G_2\right\}\left\{\frac{2}{3}\frac{F_0}{(h-M)^3} + \frac{2F_5}{(h-M)^2} + \frac{2F_2}{h-M} + F_6\right\}$$

$$+ \frac{J_0}{(h-M)^2} + \frac{2J_5}{h-M} + J_2$$

$$+ \left\{\frac{D_0}{(h-M)^2} + \frac{2D_5}{h-M} + D_2\right\}\left\{\frac{F_0}{(h-M)^2} + \frac{2F_5}{h-M} + F_2\right\} = 0$$

welche Gleichung unabhängig von h zu erfüllen ist, so dass sich 6 Relationen ergeben. Hierzu kommt vermöge (208):

$$F_3 = M; \qquad F_4 = \tfrac{1}{2}M^2$$

und man findet:

$$G_0 = 0; \quad G_5 = 0; \quad G_2 = -D_5 = \frac{F_0'}{2F_0}; \quad D_0 = -2M'$$

$$F_2' = 2\frac{F_5+\gamma_0}{F_0}(F_5+\gamma_4+\gamma_2)' - \left(\frac{F_5+\gamma_0}{F_0}\right)^2 F_0' - (\gamma_2 M - \gamma_1)'$$

$$F_0 D_2 + 2(F_5+\gamma_4+\gamma_2)' - \frac{F_5+\gamma_0}{F_0}F_0' = 0 \tag{209}$$

$$(F_6+\gamma_2)' + (F_6+\gamma_2)\frac{F_0'}{2F_0} + (\gamma_2 M - \gamma_1)D_2 = 0$$

wo

$$\gamma_0 = \gamma - \gamma_1 M + \gamma_2\frac{M^2}{2}; \qquad \gamma_4' = \gamma_0' - \gamma' + \gamma_3$$

$$D_0 = 2D - 2D_1 M + D_2 M^2$$

$$D_5 = -D_1 + D_2 M$$

gesetzt ist, die Gleichungen für die G keine neue Bestimmung enthalten. Man kann nun

$$\gamma_0, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad M, \quad F_0, \quad F_5$$

als willkürliche Functionen von w ansehen; dann werden

$$D_0, D_5, D_2, D_1, D, \gamma, F_2, F_1, F, F_6, F_3, F_4$$

durch die gefundenen Gleichungen bestimmt, und man hat:

$$k = \frac{1}{3}\frac{F_0}{h-M} + F_5 + F_2(h-M) + \frac{1}{2}F_6(h-M)^2 \tag{210}$$

Die Gleichung $D_0 = 2M'$ zeigt, dass $h = M$ eine Lösung der Gl. (205) ist. Das vollständige Integral ist daher von der Form

$$h = M + \frac{w_0}{u_1 + w_1} \tag{211}$$

unter u_1 eine Function von u verstanden. Dies eingeführt giebt:

$$\frac{w_0'}{u_1+w_1} - \frac{w_0 w_1'}{(u_1+w_1)^2} - \frac{D_1 w_0}{u_1+w_1} + \frac{D_2 M w_0}{u_1+w_1} + \frac{D_2 w_0^2}{2(u_1+w_1)^2} = 0$$

woraus:

$$\frac{w_0'}{w_0} = -D_5 = \frac{F_0'}{2F_0}; \quad w_1' = \frac{1}{2}D_2 w_0$$

und nach Integration:

$$w_0 = c\sqrt{F_0}; \quad w_1 = \frac{c}{2}\int D_2\sqrt{F_0}\,\partial w$$

wo $c = 1$ gesetzt werden kann. Führt man den Wert (209) für D_2 ein, so kommt:

$$w_1 = -\frac{F_5+\gamma_0}{\sqrt{F_0}} - \int\frac{\partial(\gamma_2+\gamma_4-\gamma_0)}{\sqrt{F_0}}$$

Die Bestimmungen von λ und μ, enthalten in (201) und (190), sind ganz ebenso wie in §. 6. Gl. (85) und (88) *), welche nach Substitution von $-D$, D_1, $-D_2$ bzhw. für δ_2, δ_1, δ in die gegenwärtigen Gleichungen übergehen.

Die vorstehende Lösung ergab sich, wenn $A_8 - E_4\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$ nicht constant null sein sollte. Dieser Bedingung widerspricht auch $A_0 = 0$ nicht, weil E_4 ganz unbestimmt bleibt. Sei jetzt

$$A_8 = E_4\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial w} = \beta'\cos\alpha + E_4\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} \tag{212}$$

Ist alsdann $A_7 - E_3\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$ nicht constant null, so erhält man durch Einsetzung eines Specialwerts für v in (192) die Gl. (195), und Gl. (192) geht über in

---

*) Gl. (88) ist in den beiden letzten Termen auf Seite 257. nach Seite 256. zu berichtigen.

$$A_4 + GA_7 - (E + GE_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \left\{A_5 + G_1A_7 - (E_1 + G_1E_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right\}h$$
$$+ \left\{A_6 + G_2A_7 - (E_2 + G_2E_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right\}\frac{h^2}{2}$$
$$+ \left\{A_9 + G_3A_7 - (E_5 + G_3E_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right\}\frac{\partial k}{\partial h} = 0$$

Wäre der Coefficient des letzten Terms nicht constant null, so wäre $\frac{\partial k}{\partial h}$ quadratische, also k kubische ganze Function von h, nach deren Einsetzung in (193) sich jedoch zeigt, dass der Coefficient von h^3 null sein muss. Es bleibt daher nur übrig, dass alle 4 Coefficienten verschwinden, und man hat:

$$A_4 + G\,A_7 = (E + G\,E_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$
$$A_5 + G_1A_7 = (E_1 + G_1E_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$
$$A_6 + G_2A_7 = (E_2 + G_2E_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$
$$A_9 + G_3A_7 = (E_5 + G_3E_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

Jetzt ist

$$A_0 = D_2 + E_4$$

Führt man also die Werte (199) für A_4, A_5, ... ein, so ergiebt sich:

$$E + G\,(E_3 - D_1) - B + \varkappa' - \gamma D_1 = (D_2 + E_4)\{(\gamma + G)\mu_2 - \gamma_1\mu_3\}$$
$$E_1 + G_1(E_3 - D_1) - C + \gamma D_2 = (D_2 + E_4)\{\gamma + G_1\mu_2 + \gamma_2\mu_3\}$$
$$E_2 + G_2(E_3 - D_1) + C_1 - \gamma_1 D_2 = (D_2 + E_4)\{-\gamma_1 + (G_2 - \gamma_2)\mu_2\}$$
$$E_5 + G_3(E_3 - D_1) - D = (D_2 + E_4)(G_3\mu_2 + \mu_3)$$

Wäre nun nicht $D_2 + E_4$ constant null, so wäre nach der letzten Gleichung μ_3 linear in μ_2, also, wie im vorigen Falle gezeigt, μ_1 linear in μ. Andernfalls sind die 4 linken Seiten null, und man hat:

$$\left.\begin{aligned}
&E + G\,(E_3 - D_1) + \gamma_1 D - \gamma\,D_1 + \gamma' + \gamma_2' + \varkappa' = 0\\
&E_1 + G_1(E_3 - D_1) + \gamma\,D_2 - \gamma_2 D - \gamma_1' = 0\\
&E_2 + G_2(E_3 - D_1) + \gamma_2 D_1 - \gamma_1 D_2 + \gamma_2' = 0\\
&E_5 + G_3(E_3 - D_1) - D = 0\\
&E_4 + D_2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (213)$$

Differentiirt man Gl. (191) nach h, Gl. (195) nach w, und eliminirt $\frac{\partial k}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 k}{\partial h\,\partial w}$, so erhält man:

$$E+E_1h+E_2\frac{h^2}{2}+(E_3+E_4h)k+\left(E_5-E_3h-E_4\frac{h^2}{2}\right)\frac{\partial k}{\partial h}$$
$$-(G_3+h)\left\{E_1+E_2h+E_4k+\left(E_5-E_3h-E_4\frac{h^2}{2}\right)\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right\}=$$
$$G'+G_1'h+G_2'\frac{h^2}{2}+G_3'\frac{\partial k}{\partial h} \tag{214}$$

Gl. (195) einzeln differentiirt und integrirt giebt bzhw.:

$$-(G_3+h)\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}=G_1+G_2h$$

$$k=-(G_3+h)\int\frac{G+G_1h+G_2\frac{h^2}{2}}{(G_3+h)^2}\partial h \tag{215}$$

Wäre letzterer Ausdruck rational, so wäre k quadratisch in h, folglich muss er einen Logarithmus enthalten, und Gl. (214) kann nur erfüllt werden, wenn der Coefficient von k, nach Reduction des Differentialquotienten, verschwindet. Dies giebt:

$$E_3+E_4h+\frac{E_5-E_3h-E_4\frac{h^2}{2}-G_3'}{G_3+h}-(G_3+h)E_4=0 \quad \text{oder}$$
$$(E_3-G_3E_4)G_3+E_5-G_3'-E_4h\left(G_3+\frac{h}{2}\right)=0$$

woraus:

$$E_4=0; \quad E_5=G_3'-E_3G_3 \tag{216}$$

Hiernach reducirt sich Gl. (214) auf

$$E-E_1G_3+E_3G+G_1(G_3'-E_3G_3)-G'$$
$$+\{G_2G_3'-(E_1+E_3G_2)G_3-G_1'\}h-(E_2+E_3G_2+G_2')\frac{h^2}{2}=0$$

woraus zunächst:

$$E_2+E_3G_2+G_2'=0 \tag{217}$$

infolge dessen zweitens:

$$G_2G_3'+G_2'G_3=G_1'$$

integrirt:

$$G_1=G_2G_3+c \tag{218}$$

und infolge dessen drittens:

$$E-E_1G_3+E_3G+(G_2G_3+c)(G_3'-E_3G_3)-G'=0 \tag{219}$$

Führt man die aus (216) (217) (219) (218) fliessenden Werte von E_4, E_5, E_2, E, G_1 in die Gl. (213) in der Reihenfolge 5, 3, 4, 2, 1

ein, berücksichtigt jedesmal die neugefundenen Werte, nämlich von D_2, D_1, D, E_1, und setzt

$$G = G_0 - \gamma; \quad G_2 = G_4 + \gamma_2$$

so erhält man:

$$D_2 = 0; \quad D_1 = -\frac{G_4'}{G_4}; \quad D = \frac{(G_3 G_4)'}{G_4}$$

$$E_1 + (G_2 G_3 + c) E_3 = \gamma_2 G_3' + \gamma_1' - (G_3 G_4 + c)\frac{G_4'}{G_4}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\{[G_0 + (\gamma_1 - c) G_3 - \tfrac{1}{2} G_3^2 G_4] G_4\} + G_4 \gamma_2' = 0$$

Es bleiben demnach willkürlich

$$G_0,\ G_3,\ G_4,\ \gamma,\ \gamma_1,\ E_3$$

wenn wir die letzte Gleichung durch γ_2 erfüllen lassen. Jetzt gehen die Gl. (212) (190) über in

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w} = \beta' \cos\alpha; \quad \frac{\partial \mu}{\partial w} + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial w} + L_0 = D + D_1 \mu$$

Erstere giebt integrirt:

$$\lambda = v_1 + w_1; \quad \partial w_1 = \cos\alpha\, \partial\beta; \quad v_1 \text{ Function von } v \tag{220}$$

Infolge dessen wird letztere:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial w}\right)(v \text{ const.}) + \frac{G_4'\mu - (G_3 G_4)'}{G_4} + \alpha' \sin(v_1 + w_1) + \beta' \sin\alpha \cos(v_1 + w_1) = 0$$

und nach Integration:

$$G_4(\mu - G_3) = v_2 - W\cos v_1 - W_1 \sin v_1 \tag{221}$$

$$\partial W = G_4(\sin w_1\, \partial\alpha + \operatorname{tg}\alpha\, \partial \sin w_1) = G_4 \frac{\partial . \sin\alpha \sin w_1}{\cos\alpha}$$

$$\partial W_1 = G_4(\cos w_1\, \partial\alpha + \operatorname{tg}\alpha\, \partial \cos w_1) = G_4 \frac{\partial . \sin\alpha \cos w_1}{\cos\alpha}$$

Die erste Urgleichung zerfällt, wie vorher in die Gl. (203), welche auch bei Einsetzung der neuen Werte für die D und E in die Gl. (204) übergehen. Daher ist

$$\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{(G_3 G_4)' + G_4' h}{G_4} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial (G_4 h + G_3 G_4)}{\partial w} = 0$$

integrirt:

$$h = \frac{u_1}{G_4} - G_3 \tag{222}$$

Führt man die Integration (215) aus, so kommt:

$$k = G - \tfrac{1}{2}(G_4 + \gamma_2)\{G_3^2 + (G_3 + h)^2\} - cG_3 - c(G_3 + h)\log\frac{G_3 + h}{\text{const.}}$$

also nach Einführung des Wertes (222) von h:

$$k = G - \frac{G_4 + \gamma_2}{2}\left(G_3^2 + \frac{u_1^2}{G_4^2}\right) - cG_3 - \frac{cu_1}{G_4}\log\frac{u_1}{G_6}$$

Durch Differentiation findet man:

$$\frac{\partial k}{\partial h} = -\frac{G_4 + \gamma_2}{G_4}u_1 - c - c\log\frac{u_1}{G_6}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \frac{1}{G_4}\left(\frac{\partial v_2}{\partial v_1} + W\sin v_1 - W_1\cos v_1\right)$$

Alle übrigen Grössen sind in den gefundenen bereits entwickelt dargestellt.

Wir haben drittens den Fall zu untersuchen, wo

$$A_7 - E_3\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = 0; \quad A_8 - E_4\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = 0 \tag{223}$$

dagegen der Coefficient des letzten Terms in (194) nicht constant null ist. Hier erhält man sogleich die Gl. (196) (197) und nach Einführung des Wertes von k in (191):

$$J_0' + J'h + J_1'\frac{h^2}{2} + J_2'\frac{h^3}{6} = E + E_1h + E_2\frac{h^2}{2} + E_3\left(J_0 - J_1\frac{h^2}{2} - J_2\frac{h^3}{3}\right)$$
$$+ E_4\left(J_0h + J\frac{h^2}{2} - J_2\frac{h^4}{12}\right) + E_5\left(J + J_1h + J_2\frac{h^2}{2}\right)$$

Da J_2 nicht null sein darf, so ist zunächst

$$F_4 = 0 \tag{224}$$

demnach weiter

$$J_0' = E + E_3J_0 + E_5J$$
$$J' = E_1 + E_5J_1$$
$$J_1' = E_2 - E_3J_1 + E_5J_2$$
$$J_2' = -2E_3J_2$$

Ferner wird jetzt mit Anwendung von (223) (224) nach (123)

$$A_8 = 0$$
$$A_7 = \frac{\partial A_3}{\partial \lambda} = \left\{D_1 + D_2\left(\mu + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2}\right)\right\}\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = E_3\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}$$

folglich

$$D_1 = E_3; \quad D_2 = 0$$

Vermöge dieser Werte gestalten sich die Ausdrücke (199) folgendermassen:

$$\varDelta_4 = (D_1\gamma - D\gamma_1 - \gamma_3)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

$$\varDelta_5 = (D\gamma_2 + \gamma_1')\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}; \quad \varDelta_6 = -(D_1\gamma_2 + \gamma_2')\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

$$\varDelta_7 = D_1\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}; \quad \varDelta_8 = 0; \quad \varDelta_9 = D\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}$$

und die zweite Urgleichung (121) wird

$$J_0' + J'h + J_1'\frac{h^2}{2} + J_2'\frac{h^3}{6} = D_1\gamma - D\gamma_1 - \gamma_3 + (D\gamma_2 + \gamma_1')h$$
$$-(D_1\gamma_2 + \gamma_2')\frac{h^2}{2} + D_1\left(J_0 - J_1\frac{h^2}{2} - J_2\frac{h^3}{2}\right) + D\left(J + J_1 h + J_2\frac{h^2}{2}\right)$$

woraus:

$$\begin{aligned} J_0' - D_1 J_0 &= D_1\gamma - D\gamma_1 - \gamma_3 + DJ = E + E_5 J \\ J' \quad &= D\gamma_2 + \gamma_1' + DJ_1 \quad = E_1 + E_5 J_1 \\ J_1' + D_1 J_1 &= -D_1\gamma_2 - \gamma_2' + DJ_2 \quad = E_2 + E_5 J_2 \\ J_2' + 2D_1 J_2 &= 0 \end{aligned}$$

Hier können D, D_1, γ_1, γ_2, γ_3, E_5 willkürlich sein, dann kann man die Gleichungen von der letzten anfangend successive erfüllen durch J_2, J_1, J, J_0, E, E_1, E_2.

Nach Einsetzung der gefundenen Werte gehen die Gl. (203) wieder in die Gl. (204) über, nur dass zur Rechten der ersten der Term

$$-\tfrac{3}{8}D_1 J_2 h^4$$

hinzukommt, welcher infolge der beiden andern null sein muss. Dies ist nur möglich für

$$D_1 = 0$$

Man hat also:

$$\frac{\partial h}{\partial w} + D = 0; \quad J_2 = c = \text{const.}$$

Setzt man

$$D = -w_0'$$

so wird

$$h = u_0 + w_0 \tag{225}$$

Ferner ist jetzt

$$J_1 = c_1 - \gamma_2 - c w_0$$

$$J = c_2 + \gamma_1 - c_1 w_0 + \frac{c}{2} w_0^2$$

$$J_0 = -\int \gamma_3 \partial w - c_2 w_0 + \frac{c_1}{2} w_0^2 - \frac{c}{6} w_0^3$$

daher nach Einführung in (197)

(226)

$$k = -\int \gamma_3 \partial w + \gamma_1 (u_0 + w_0) - \tfrac{1}{2}\gamma_2 (u_0 + w_0)^2 + c_2 u_0 + \tfrac{1}{2} c_1 u_0^2 + \tfrac{1}{6} c u_0^3$$

ferner wegen $\Delta = 0$; $\Delta_3 = D$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w} = \beta' \cos\alpha$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial w} + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \beta' \cos\alpha + \alpha' \sin\lambda + \beta' \sin\alpha \cos\lambda = D = -w_0'$$

Erstere Gleichung giebt integrirt:

$$\lambda = v_1 + w_1; \quad \partial w_1 = \cos\alpha \partial\beta \tag{227}$$

infolge dessen letztere:

$$\mu = v_2 - w_0 - W \cos v_1 - W_1 \sin v_1 \tag{228}$$

wo

$$W = \int (\sin w_1 \partial\alpha + \cos w_1 \sin\alpha \partial\beta) = \int \frac{\partial(\sin w_1 \sin\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$W_1 = \int (\cos w_1 \partial\alpha - \sin w_1 \sin\alpha \partial\beta) = \int \frac{\partial(\cos w_1 \sin\alpha)}{\cos\alpha}$$

gesetzt ist.

13. Fall, wo π und μ_1 linear in μ sind.

Ist μ_1 linear in μ, so ist μ von der Form

$$\mu = \delta \cos\lambda + \delta_1 \sin\lambda + \delta_2 \tag{229}$$

und π hat dieselbe Form

$$\pi = \varepsilon(\delta\cos\lambda + \delta_1 \sin\lambda) + \varepsilon_2 \tag{230}$$

wo δ, δ_1, δ_2, ε, ε_2 Functionen von w sind. Hier wird

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} : \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \varepsilon.$$

daher

$$S = S_0 + \varepsilon \cos\lambda; \quad T = T_0 + \varepsilon \sin\lambda \tag{231}$$

Nach Einführung dieser Werte in (123) erhalten sämmtliche $\varDelta$ dieselbe Form; zunächst ist

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= S_4 \cos\lambda + T_4 \sin\lambda + R_2 \\ \varDelta_1 &= S_3 \cos\lambda + T_3 \sin\lambda + R \\ \varDelta_2 &= S_2 \cos\lambda + T_2 \sin\lambda + \varepsilon' \\ \varDelta_3 &= \varDelta \cos\lambda + \varDelta_1 \sin\lambda + \delta_2' \end{aligned}\right\} \tag{232}$$

wo die Coefficienten sich successive bestimmen durch

$$\begin{aligned} 2\delta_0 &= 1 + \delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 \\ \varDelta &= \delta' + \delta_1 \beta' \cos\alpha + \beta' \sin\alpha \\ \varDelta_1 &= \delta_1' - \delta\beta' \cos\alpha + \alpha' \\ S_2 &= S_0' - \varkappa\beta' \sin\alpha + T_0 \beta' \cos\alpha \\ T_2 &= T_0' - \varkappa\alpha' - S_0 \beta' \cos\alpha \\ S_3 &= S_2 \delta_2 - \varepsilon\varDelta; \quad T_3 = T_2 \delta_2 - \varepsilon\varDelta_1 \\ R &= S_2 \delta + T_2 \delta_1 - T_0 \alpha' - S_0 \beta' \sin\alpha + \varepsilon' \delta_2 - \varepsilon_2' \\ R_1 &= R - \varepsilon' \delta_2 + \varepsilon \delta_2' \\ S_4 &= S_3 \delta_2 + R_1 \delta - S_2 \delta_0 + \varepsilon_2 \varDelta \\ T_4 &= T_3 \delta_2 + R_1 \delta_1 - T_2 \delta_0 + \varepsilon_2 \varDelta_1 \\ R_2 &= R\delta_2 - \varepsilon' \delta_0 + \varepsilon_2 \delta_2' \end{aligned}$$

Demgemäss nimmt auch die erste Urgleichung (120) die Form an:

$$\Omega \cos\lambda + \Omega_1 \sin\lambda + \Omega_2 = 0$$

woraus:

$$\Omega = 0; \quad \Omega_1 = 0; \quad \Omega_2 = 0$$

das ist:

$$(H_1 + H_2 \delta_2 + H_3 \varepsilon)\delta + k\varDelta + \frac{h^2}{2} S_2 + hS_3 + S_4 = 0$$

$$(H_1 + H_2 \delta_2 + H_3 \varepsilon)\delta_1 + k\varDelta_1 + \frac{h^2}{2} T_2 + hT_3 + T_4 = 0$$

$$H + H_1 \delta_2 + H_2 \delta_0 + H_3 \varepsilon_2 + k\delta_2' + \frac{h^2}{2}\varepsilon' + hR + R_2 = 0 \tag{233}$$

Vermöge der beiden ersten Gleichungen würde k quadratisch in h sein, wenn nicht die Coefficienten der homologen 4 letzten Terme proportional $\delta : \delta_1$ wären. Sei also

$$\varDelta = w_2\delta; \quad S_2 = w_3\delta; \quad S_3 = w_4\delta; \quad S_4 = w_5\delta$$
$$\varDelta_1 = w_2\delta_1; \quad T_2 = w_3\delta_1; \quad T_3 = w_4\delta_1; \quad T_4 = w_5\delta_1$$

dann fallen beide Gleichungen in die neue zusammen:

$$H_1 + H_2\delta_2 + H_3\varepsilon + kw_2 + \frac{h^2}{2}w_3 + hw_4 + w_5 = 0 \tag{234}$$

und die Gl. (232) reduciren sich auf

$$A = w_5(\mu - \delta_2) + R_2; \quad A_1 = w_4(\mu - \delta_2) + R$$
$$A_2 = w_3(\mu - \delta_2) + \varepsilon'; \quad A_3 = w_2(\mu - \delta_2) + \delta_2'$$

woraus dann weiter:

$$A_4 = (R - \varkappa' - w_3\delta_0 + w_2\varepsilon_2)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + (\varepsilon_2\delta_2 - \varepsilon\delta_0)A_8$$

$$A_5 = (\varepsilon' - w_3\delta_2)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + (\varepsilon_2 - \varepsilon\delta_2)A_8$$

$$A_6 = -w_3\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} - \varepsilon A_8$$

$$A_7 = w_2\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \delta_2 A_8$$

$$A_9 = (\delta_2' - w_2\delta_2)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + (\delta_0 - \delta_2^2)A_8$$

Die zweite Urgleichung (121) hat jetzt die Form:

$$\left(\Psi - \frac{\partial k}{\partial w}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \Psi_1 A_8 = 0 \tag{235}$$

woraus:

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \Psi + \vartheta\Psi_1 \tag{236}$$

und zwar unabhängig von ϑ, oder es ist zugleich

$$A_8 = \vartheta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} \tag{237}$$

Die entwickelten Werte sind:

$$\Psi = R - \varkappa' - w_1 w_3 + w_2\varepsilon_2 - \varepsilon'\delta_2 + \varepsilon' h_1 - \frac{w_3 h_1^2}{2} + w_2 k + (\delta_2' - w_2 h_1)\frac{\partial k}{\partial h}$$

$$\Psi_1 = -\varepsilon w_1 + \varepsilon_2 h_1 - \frac{\varepsilon h_1^2}{2} + h_1 k + (w_1 - \tfrac{1}{2}h_1^2)\frac{\partial k}{\partial h}$$

wo zur Abkürzung

$$h_1 = \delta_2 + h; \quad w_1 = \delta_0 - \tfrac{1}{2}\delta_2^2$$

gesetzt ist. Setzt man nach deren Einführung in (236) den daraus erhaltenen Wert von $\frac{\partial k}{\partial w}$ nebst seiner Ableitung in die Gl. (233) (234), so lassen sich diese in folgender Anordnung schreiben:

$$\{k - h_1 \frac{\partial k}{\partial h} + (w_1 + \tfrac{1}{2}h_1^2)\frac{\partial^2 k}{\partial h^2} + \varepsilon_2\}\{\frac{\partial h_1}{\partial w} - w_2 h_1 + \vartheta(w_1 - \tfrac{1}{2}h^2)\} = 0$$

$$\{-\frac{\partial k}{\partial h} + h_1 \frac{\partial^2 k}{\partial h^2} + \varepsilon\}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial w} - w_2 h_1 + \vartheta(w_1 - \tfrac{1}{2}h_1^2)\right\} = 0$$

Beide werden allein befriedigt durch

$$\frac{\partial h_1}{\partial w} - w_2 h_1 + \vartheta(w_1 - \tfrac{1}{2}h_1^2) = 0 \tag{238}$$

denn jeder der 2 Coefficienten dieses Factors null gesetzt würde ein in h quadratisches k ergeben. Setzt man zur Integration

$$\sigma' - w_2\sigma + \vartheta(w_1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2) = 0$$

indem man σ als willkürliche Function von w ansieht, und die Gleichung durch ϑ, w_1 oder w_2 erfüllt, so ist das vollständige Integral von (238):

$$h = \sigma + \frac{\sigma_0}{u_0 + w_0} - \delta_2 \tag{239}$$

wo u_0 willkürliche Function von u, und

$$\log\sigma_0 = \int(w_2 + \vartheta\sigma)\partial w; \quad w_0 = -\tfrac{1}{2}\int\vartheta\sigma_0\,\partial w \tag{240}$$

ist. Die Function k wird allein durch die Gl. (236) bestimmt, welche die Form hat:

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \vartheta_0 + \vartheta_1 h_1 + \vartheta_2\frac{h_1^2}{2} + (w_2 + \vartheta h_1)k - \left(\vartheta_3 + w_2 h_1 + \frac{\vartheta h_1^2}{2}\right)\frac{\partial k}{\partial h}$$

und zwar ist

$$\vartheta_0 = R - w_1 w_3 + w_2\varepsilon_2 - \varepsilon'\delta_2 - \vartheta\varepsilon w_1 - \varkappa'$$
$$\vartheta_1 = \varepsilon' + \vartheta\varepsilon_2; \quad \vartheta_2 = -w_3 - \vartheta\varepsilon; \quad \vartheta_3 = -\delta_2' - \vartheta w_1$$

Nach (238) aber hat man:

$$\vartheta_3 + w_2 h_1 + \frac{\vartheta h_1^2}{2} = \frac{\partial h}{\partial w}$$

daher kann man die Gleichung auch schreiben:

$$\left(\frac{\partial k}{\partial w}\right)(u\,\text{const.}) = (w_2 + \vartheta h_1)k + \vartheta_0 + \vartheta_1 h_1 + \vartheta_2\frac{h_1^2}{2} \tag{241}$$

Ferner ist nach (240)

$$w_2 + \vartheta\sigma = \frac{\sigma_0'}{\sigma_0}; \quad \vartheta\sigma_0 = -2w_0'$$

folglich nach (239)

$$w_2 + \vartheta h_1 = w_2 + \vartheta\sigma + \frac{\vartheta\sigma_0}{u_0 + w_0} = \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} - \frac{2w_0'}{u_0 + w_0}$$

und, bei constantem u integrirt,

$$\int(w_2 + \vartheta h_1)\partial w = \log\frac{\sigma_0}{(u_0 + w_0)^2}$$

Demnach giebt die Integration von (241):

$$k = \frac{\sigma_0}{(u_0 + w_0)^2}\left\{u_1 + \int(u_0 + w_0)^2 \frac{\vartheta_0 + \vartheta_1 h_1 + \vartheta_2\frac{h_1^2}{2}}{\sigma_0}\partial w\right\}$$

oder entwickelt:

$$k = \sigma_0\frac{u_1 + \vartheta_4 u_0^2 + \vartheta_5 u_0 + \vartheta_6}{(u_0 + w_0)^2} \tag{242}$$

wo

$$\vartheta_4 = \int\frac{\vartheta_0 + \vartheta_1\sigma + \vartheta_2\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma_0}\partial w$$

$$\vartheta_5 = \int\frac{2\vartheta_0 w_0 + \vartheta_1(2\sigma w_0 + \sigma_0) + \vartheta_2(\sigma w_0 + \sigma_0)\sigma}{\sigma_0}\partial w$$

$$\vartheta_6 = \int\frac{\vartheta_0 w_0^2 + \vartheta_1 w_0(\sigma w_0 + \sigma_0) + \frac{1}{2}\vartheta_2(\sigma w_0 + \sigma_0)^2}{\sigma_0}\partial w$$

Zur Bestimmung von λ hat man nach (237):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w} = \beta'\cos\alpha + \vartheta(-\delta\sin\lambda + \delta_1\cos\lambda)$$

oder in rationaler Form geschrieben:

$$2\frac{\partial\,\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2}}{\partial w} = \beta'\cos\alpha + \vartheta\delta_1 - 2\vartheta\delta\,\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2} + (\beta'\cos\alpha - \vartheta\delta_1)\,\mathrm{tg}^2\frac{\lambda}{2}$$

Zur Integration setze man:

$$\frac{\partial\tau}{\partial w} = \beta'\cos\alpha + \vartheta(-\delta\sin\tau + \delta_1\cos\tau)$$

betrachte τ als willkürliche Function von w, und erfülle die Gleichung durch δ, δ_1, ϑ, β oder α; dann ist das vollständige Integral:

$$\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2} = \mathrm{tg}\frac{\tau}{2} + \frac{\tau_0}{v_0 + w_0} \tag{243}$$

wo v_0 willkürliche Function von v, und

$$\log \tau_0 = \int \{ \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}(\cos\alpha\partial\beta - \vartheta\delta_1\partial w) - \vartheta\delta\partial w\}$$

$$w_0 = -\tfrac{1}{2}\int \tau_0(\cos\alpha\partial\beta - \vartheta\delta_1\partial w)$$

ist. Hiermit sind die gesuchten Functionen sämmtlich in entwickelter Form bestimmt.

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo Gl. (235) durch

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \Psi; \qquad \Psi_1 = 0$$

erfüllt wird, also λ unbestimmt bleibt. Zur Abkürzung sei

$$\psi = R - \varkappa' - w_1 w_3 + w_2 \varepsilon - \varepsilon' \delta_2$$

dann wird k durch die 2 Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \psi + \varepsilon' h_1 - \tfrac{1}{2} w_3 h_1^2 + w_2 k + (\delta_2' - w_2 h_1)\frac{\partial k}{\partial h}$$

$$(\tfrac{1}{2}h_1^2 - w_1)\frac{\partial k}{\partial h} - h_1 k = -\varepsilon w_1 + \varepsilon_2 h_1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon h_1^2$$

Letztere lässt sich schreiben:

$$(\tfrac{1}{2}h_1^2 - w_1)\frac{\partial(k - \varepsilon h_1 + \varepsilon_2)}{\partial h} = h_1(k - \varepsilon h_1 + \varepsilon_2)$$

und giebt integrirt:

$$\frac{k - \varepsilon h_1 + \varepsilon_2}{\tfrac{1}{2}h_1^2 - w_1} = \text{Function von } w$$

Der betrachtete Fall entspricht also nur einem in h quadratischen k.

Um die Ergebnisse zusammenzustellen, so hat sich die Aufgabe, sämmtliche dreifach orthogonale Flächensysteme zu finden, deren eine Schar zu einem ebenen System von Geraden und parallelen Trajectorien gehört, in folgende Fälle geteilt.

I. Ist k quadratische Function von h, so werden nach einander μ, λ, π durch je eine Differentialgleichung bestimmt, während h sich entwickelt darstellt (s. §. 6.). Für unveränderte Lage des Systems der $x_1 y_1 z_1$ im Raume ist in §. 7. die vollständige Lösung gegeben.

II. Ist π nicht linear in μ, μ_1, und ist k kubische Function von h, so ergiebt sich in §. 10. die entwickelte allgemeine Lösung.

III. Ist π nicht linear in μ, μ_1, und ist k nicht quadratisch oder kubisch in h, so lassen sich k und h entwickelt in u darstellen;

dagegen sind λ, μ, π durch je eine partielle Differentialgleichung bestimmt, deren Lösung nicht gefunden ist; für den besondern Fall $D_2 = 0$ ist dieselbe in §. 11. entwickelt. Die Gleichungen für λ, μ, π stimmen mit denen im Fall I. bis auf einen Punkt, in welchem sie specieller sind, überein.

IV. Ist π linear in μ, μ_1, aber μ_1 nicht linear in μ, so teilt sich die Untersuchung wieder, je nachdem von 2 Relationen zwischen den von v abhängigen Coefficienten der zweiten Urgleichung keine, eine oder beide bestehen: im ersten Falle bestimmen sich μ und λ wie in I., in den übrigen werden diese, und in allen 3 Fällen h und k vollständig entwickelt (s. §. 12.).

V. Sind μ_1 und π linear in μ, so ergiebt sich in §. 13. eine entwickelte Lösung.

XV.

Die Küstenentwickelung, ein mathematischer Beitrag zur vergleichenden Erdkunde.

Von

Siegmund Günther.

§. 1. Der Begriff der Küstenentwickelung wurde mit Bewusstsein zuerst von Carl Ritter in die geographische Wissenschaft eingeführt. Derselbe hat, wie Peschel[1]) anmerkt, „viel Gewicht darauf gelegt, die grössere oder geringere Gliederung der Festlande dadurch zu bestimmen, dass er ihre Küstenausdehnung mit ihrem Länderraum verglich, ... um die Verschiedenheit der Gestaltungen fühlbar zu machen und um zu zeigen, wie eine höhere Gliederung der Festlande günstig, eine geringere ungünstig auf die Entwickelung ihrer Bewohner gewirkt hat.“ Sein hierauf gebautes System bezeichnete Ritter als „vergleichende Geographie“, und wenn auch die neuere Wissenschaft mit letztrem Titel ein etwas abweichendes Wissensgebiet, nämlich die Lehre von den durch die Naturkräfte bedingten Gestaltänderungen der Erdoberfläche, bezeichnet, so glaubten wir doch hier an der ursprünglichen Bedeutung des Wortes festhalten zu sollen.

Ritter's Anschauung lässt sich am besten durch die Worte charakterisiren, mit welchen er in seinem geographischen Hauptwerke[2]) die Topographie von Afrika beginnt. „Da nun in Afrika, als feste Form, dem Continente (*κατ' ἐξοχὴν*), auch gleichermassen in der Küstenbegrenzung die einfachste Form liegt, wie in der gleichmässigen Verteilung des Hoch- und Platt-Landes und in der geringern Ungleichartigkeit ihrer Oberflächen, und darum auch, nach allen übrigen Richtungen hin, dieselbe Einförmigkeit in der Natur bedingt ist:

so eröffnet dieser Erdteil mit Recht die Reihe der Betrachtungen, welche der Individualität der Erdteile gewidmet ist." In diesem Satze ist bereits implicite die Wahrheit enthalten, dass zur genauen Kenntniss der Continentalgliederung die blosse Zahl

$$\frac{L}{F},$$

unter L die Küstenlänge, unter F den Flächeninhalt verstanden, nicht hinreiche, insofern dieselbe bei den verschiedensten Formen gleichwohl den nämlichen Wert annehmen kann. Indes ist Ritter über diese primitive Bestimmungsweise nicht hinausgegangen.

1) Peschel, Neue Probleme der vergleichenden Erdkunde, Leipzig 1870. S. 2.

2) C. Ritter, Die Erdkunde im Verhältniss zur Natur und zur Geschichte des Menschen, oder allgemeine, vergleichende Geographie, 1. Theil, 1. Buch, Berlin 1822. S. 12.

§. 2. Erst lange Zeit nachher begann man das völlig Unzureichende der Ritter'schen Verhältnisszahl zu erkennen. Der erste Angriff auf dieselbe rührt von Keber her, welcher zwei wichtige Gegengründe geltend machte[3]), einen rein mathematisch-logischen und einen mehr sachlichen. Er wies darauf hin, dass es unmöglich sei, lineare mit Flächen-Grössen zu vergleichen, ging jedoch noch weiter und wies nach, dass auch der allenfallsige aus dem früheren Berechnungsmodus resultirende Nutzen dadurch völlig illusorisch werde, dass eben eine geometrische Figur durch Inhalt und Umfang noch nicht völlig bestimmt sei. Ohne vorerst eine Verbesserung vorzuschlagen, begnügte er sich damit, die Unhaltbarkeit des Bestehenden dargetan zu haben, forderte jedoch zu Verbesserungsvorschlägen auf.

Diesem Vorschlage kamen bald verschiedene Gelehrte nach. Besonders acceptabel erscheint die Idee von Bothe[4]), dem Ritter-schen Quotienten den folgenden

$$\frac{L}{\sqrt{F}}$$

zu substituiren. Zur besseren Vergleichung beider Methoden hat H. J. Klein[5]) eine Tafel gegeben, deren erste Columne nach Ritter, die zweite nach Bothe berechnet ist. Man hat so eine Meile Küstenentwickelung bei

Europa	auf	37;	10,750,	Meilen.
Asien	„	105;	8,555,	
Afrika	„	163;	4,816,	
Nord-Amerika	„	50;	10,423,	
Süd-Amerika	„	94;	6,001,	
Australien	„	78;	5,114	

Der Anblick dieser Zusammenstellung lehrt, dass die zweite Columne bei weitem befriedigendere Resultate ergiebt, als die erste. Wenn aber auch durch Bothe's Festsetzung der erste von den Einwürfen Keber's beseitigt ist, so besteht doch der andre in ungeschwächter Kraft fort, und wenn der Erfinder (a. a. O.) sagt: „Mit der Einführung dieses Quotienten in die Geographie wären alle die Schwierigkeiten besiegt, auf welche Dr. Keber hindeutet; jeder so erhaltene Wert stellt die Grenz-, resp. Küsten-Entwickelung als eine wahrhaft wissenschaftliche, für alle Masssysteme gültige Zahl dar", so stehen dem noch grosse Bedenken entgegen, wie weiter unten ausführlich gezeigt werden soll.

Mit Bothe's Vorschlägen kommen diejenigen zweier andrer Mathematiker nahe überein. Nach Schumann [6]) soll man die Küstenentwickelung als das Verhältniss der Küstenlänge eines Landes zu dem Umfang eines Kreises von gleichem Flächeninhalt auffassen, so dass hiernach die Küstenentwickelung

$$k = \frac{L}{\sqrt{F}} \cdot \frac{11}{39}$$

sein würde. Diese Anschauung von der Sache ist bereits früher von Klöden [7]) mit den Worten ausgesprochen worden: „Ein Kreis, welcher denselben Flächeninhalt wie eins der Continente hat, würde den kleinsten möglichen Umfang für dasselbe Areal abgeben." Beiläufig sei bemerkt, dass der nämliche Gelehrte [8]) noch eine andre Auffassung von der Lösung unsres Problemes hatte; er meint nämlich, das Arealverhältniss der Glieder (Halbinseln und Landzungen) eines Continents zum letztren selbst könne ebenfalls als Mass der Küstenentwickelung betrachtet werden. Dies ist an und für sich nicht unrichtig, würde aber zu einer genauen mathematischen Fixirung der Grösse k nicht ausreichen.

Schliesslich wäre auch der Meinung von Steinhauser [9]) Erwähnung zu tun. „Herr Steinhauser schlägt vor, die Küstenumfänge in Quadrate zu verwandeln, um hiedurch homogene Verhältnisszahlen zu gewinnen, welche unter sich anstandslos verglichen werden können." Im zufolge müsste

$$k = \frac{L}{\sqrt{F}} \cdot \frac{1}{4}$$

sein. Wie man sieht, stimmen Bothe, Schumann und Steinhauser principiell überein.

3) Kleber, Flächeninhalt und Küstenlänge: ein stehender Missbrauch beim Vergleich derselben durch Zahlen-Angaben, Petermann's geographische Mittheilungen, Jahrgang 1863. S. 309.

4) **Bothe**, Ueber die Beziehungen zwischen Flächeninhalt und Grenzlänge der Grenzländer, ibid. Jahrg. 1863. S. 406.

5) H. J. **Klein**, Populäre astronom. Encyclopädie, Berlin 1871. S. 127.

6) **Bothe**, S. 406.

7) **Klöden**, Handbuch der physischen Geographie, Berlin 1859. S. 73.

8) Ibid. S. 74.

9) **Bothe**, S. 406.

§. 3. Dass die verschiedenen zur Verbesserung der Ritter'schen Methode in Vorschlag gebrachten Bestimmungsweisen sämmtlich nur den Einen der von Keber angemerkten Punkte berücksichtigen, hat letztrer [10]) in einer Erwiederung energisch betont. Durch Zerlegung einer einfachen geometrischen Figur weist derselbe nach, dass, wenn man nur dem Worte Küstenentwickelung den richtigen geographisch-historischen Sinn unterlegt, auch bei Anwendung des Bothe'schen Quotienten sich Ungereimtheiten ergeben können. Dem von Keber gegebenen Beispiele möchten wir noch das nachstehende anscheinend besonders prägnante zur Seite stellen.

Construiren wir die durch die beiden Gleichungen

$$x = 2\cos\varphi + 2\cos\tfrac{2}{3}\varphi,$$
$$y = 2\sin\varphi - 2\sin\tfrac{2}{3}\varphi$$

charakterisirte Hypocykloïde, so stellt sich dieselbe dar als eine aus fünf congruenten und in Einem Punkte zusammenlaufenden Blättern bestehende Curve, so dass sich also offenbar für das von der Curve umschlossne Flächenstück eine äusserst günstige Küstenentwickelung ergiebt. Nun hat Durège [11]) die interessante Bemerkung gemacht, dass eine Ellipse, welche die beiden Strecken

$$4, \frac{4}{5}$$

bezüglich zur grossen und kleinen Axe hat, sowohl an Flächeninhalt, wie auch an Umfang mit jener sternförmigen Hypocykloïde übereinstimmt, und wir müssten sonach beiden Figuren die nämliche Küstenentwickelung zuteilen. Ein Blick auf Fig. 3. überzeugt uns von der gänzlichen Unbrauchbarkeit des Ausdruckes

$$\frac{L}{\sqrt{F}}$$

in diesem Specialfalle.

Einen berichtigenden, jedoch die uns hier hauptsächlich interessirende Frage ebenfalls nicht beachtenden Zusatz zur Schumann-Bothe'schen Methode hat Schultze [12]) geliefert. Insofern nämlich

beim Vorschlage des Ersteren von einem Kreise die Rede war, lag stillschweigend die Voraussetzung einer ebenen Figur zu Grunde; Schultze führt die analoge Bestimmung für die Kugelfläche durch und findet so, unter E den Oberflächeninhalt der ganzen Erde verstanden,

$$k = \frac{L}{2\sqrt{\pi F\left(1 - \frac{F}{E}\right)}}.$$

Mit Recht wird bemerkt, dass bei Untersuchung von Ländercomplexen, oder gar von Erdteilen, der Bruch $\frac{F}{E}$ nicht als verschwindend klein betrachtet werden dürfe. Indess betrifft dies nur eine untergeordnete Correction.

Dagegen hat die Kritik von v. Prondzynski[13]) den Nerv der Sache richtig getroffen, insofern als derselbe betont, dass aus der blossen Kenntniss von Umfang und Inhalt sich noch gar kein richtiges Urteil über die Gesammt-Küstenentwickelung gewinnen lasse. Freilich urteilt derselbe zu pessimistisch, da aus seiner Abhandlung deutlich hervorgeht, wie er eine mathematisch-richtige Berücksichtigung der so sehr verschiedenen gestaltlichen Verhältnisse eines Landes für unmöglich halte. Er verlässt also die Bothe'sche Verhältnisszahl als solche ganz und gar und schlägt vor „bei Zusammenstellungen über Küstenentwickelung gar nicht derartige Angaben zu machen, sondern den Quotienten für irgend ein bestimmtes Land, etwa Europa, auf Eins zu reduciren und die Küstenentwickelunz aller andren Länder dann als Teile oder vielfache dieser Einheit anzugeben.“ Dieser Vorschlag ist an sich gewiss beachtenswert; wir werden aber im Folgenden zu zeigen suchen, dass sich eine Grösse μ derart finden lässt, um

$$k = \frac{L}{\sqrt{F}} \cdot \mu$$

mit allem Rechte setzen zu können.

Erwähnt möge noch werden, dass Bothe[14]) gegen Keber's zweite Arbeit Verwahrung eingelegt und dabei besonders hervorgehoben hat, dass er seinen Satz: „Aehnliche Figuren ergeben dieselbe Entwickelungs-Constante“ durchaus nicht als einen umkehrbaren habe betrachtet wissen wollen. In der Tat ergiebt sich, wenn man an diesen Ausspruch die bekannten[15]) Kriterien der Umkehrbarkeit anlegt, sofort die Unmöglichkeit einer solchen. Hier ist also Bothe im Rechte, wenn er jedoch sich dahin vernehmen lässt, die Auffindung eines ähnlichen aber umkehrbaren Theoremes sei absolut unmöglich,

so werden die nachstehenden Zeilen zur Widerlegung dieser Ansicht dienen.

10) Dr. Keber's Einwand gegen Dr. Bothe's Vorschlag, Petermann's geogr. Mittheil. Jahrg. 1864. S. 91.

11) Durège, Ueber eine besondere Art cyclischer Curven, Zeitschr. für Math. u. Phys. Jahrg. 1864. S. 216.

12) Dr. Keber's Einwand etc., S. 92.

13) Lieut. v. Prondzynski's Erörterung und Vorschlag, Ibid. Jahrg. 1864. S. 92.

14) Bothe, Flächeninhalt und Grenzlänge. Eine Erwiederung auf erhobene Bedenken, Ibid. Jahrg. 1864. S. 232.

15) Günther, Ueber einige Anwendungen und Erweiterungen des Hauber'schen Theorems, Archiv d. Math. u. Phys., 56. Band. S. 26.

§. 4. Wir haben bereits im Vorigen gesehen, dass es durchaus nicht angeht, den Begriff der Küstenentwickelung einzig mit Hülfe von Inhalt und Umfang zu formuliren, dass es vielmehr sich als unabweisbare Notwendigkeit herausstellt, auch die Verschiedenheit der gestaltlichen Verhältnisse mit in Rechnung zu ziehen. Wie aber kann diese Verschiedenheit mathematisch formulirt werden. Um hierüber zur Klarheit zu gelangen, ist es erforderlich, die eigentliche Bedeutung jenes Wortes einer eingehenden Analyse zu unterziehen.

Die Küstenentwickelung ist um so bedeutender, je energischere Eingriffe das Wasser in das Land gemacht hat. Offenbar kommt also nicht allein der Flächeninhalt des betrachteten Landes in Betracht, sondern auch der Flächeninhalt, welchen die durch Wasser erfüllten Küsteneinschnitte zusammen ergeben. Da aber diese Wasserzungen nicht abgeschlossen sind, sondern mit dem Weltmeer zusammenhängen, so muss irgend ein Abschluss herbeigeführt werden, und um diesen zu erhalten, genügt die Bemerkung, dass bei kleiner werdendem Umfang die Küstenentwickelung zunimmt. Mit Rücksicht auf diese Betrachtungen stellen wir dann folgendes fest:

Um die Küstenentwickelung einer beliebig gestalteteten Figur zu erhalten, beschreibe man um dieselbe eine andere, deren Perimeter aus geraden Linien (bezüglich grössten Kreisen) zusammengesetzt ist. Dies geschieht, indem man etwaige Rückkehrpunkte einfach verbindet, ausserdem aber alle diejenigen Doppeltangenten construirt, welche zwischen den Berührungspunkten den Umfang der ursprünglichen Figur nicht schneiden; durch diese Operation wird von diesem Umfang ein Teil ($= S$) abgeschnitten. Linien, die ins Innere der Figur fallen, werden nicht berücksichtigt. Behalten

wir ferner die bisherige Bezeichnungsweise bei und setzen noch Umfang und Inhalt der umschriebenen Figur bezüglich gleich L' und F', so ist jetzt die Küstenentwickelung

$$k = \frac{L}{\sqrt{F}} \cdot \frac{L' + S}{\sqrt{F' - F}}.$$

Setzt man noch $L' = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, unter λ die Uferlängen der einzelnen Buchten verstanden, so kann man jetzt auch sagen: Stimmen für zwei Figuren L, F, F', sowie auch sämmtliche λ überein, so besitzen dieselben die gleiche Küstenentwickelung. Hiermit ist die von Bothe (s. o. §. 3) als ewig offene betrachtete Frage einfach erledigt.

So hat die Figur $ABCDEFG$ (Fig. 2.) in A einen Rückkehrpunkt zweiter, in B einen solchen erster Klasse. Man zieht AB, legt von B eine Tangente nach C', von C'' eine solche nach E', von E'' ebenso nach G'' und schliesslich von G'' nach A. Alsdann ist

$$\lambda_1 = AJ + JB, \quad \lambda_2 = BK + KC', \quad \lambda_3 = C''D + DE',$$
$$\lambda_4 = E''F + FG', \quad \lambda_5 = G''H + HA,$$

und es folgt

$$k = \frac{\begin{matrix} AJ + JB + BK + KC' + C''D + DE' + E''F + FG' + G''H + HA \\ + C'C'' + E'E'' + G'G'' \end{matrix}}{\sqrt{F}}$$
$$\times \frac{\begin{matrix} AJ + JB + BK + KC' + C''D + DE' + E''F + FG' + G''H + HA \\ + AB + BC' + C''E' + E''G' + G''A \end{matrix}}{\sqrt{F' - F}}$$

Hat die Figur gar keine einspringenden Teile, ist sie vielmehr nach allen Seiten convex, so ist $L' = S = 0$, $F' = F$, und man findet

$$k = \frac{L}{\sqrt{F}} \cdot \frac{0}{0}.$$

Man erkennt jedoch sofort die Wahrheit der Tatsache

$$\lim \frac{L' + S}{\sqrt{F' - F}} = 1,$$

und es zeigt sich also auch der geometrisch zu erwartende Umstand:

Für alle durchaus convexen Figuren ist der Bothesche Quotient das genaue Mass der Küstenentwickelung.

§. 5. Als einfacher Beleg möge noch folgendes dienen: Es sei ABC (Fig. 3.) ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete 1; man halbire AB in D, ziehe AD und mache $DE = AD$; wird dann noch E mit B verbunden, so ist das überschlagene Viereck $ACEB$ entstanden. Um die Küstentwickelung zu finden, muss noch CE gezogen werden; alsdann ist

$$k = \frac{AC + CD + DE + EB + BD + DA}{\sqrt{\frac{1}{2} AD.CD}} \cdot \frac{AD + DB + BA + CD + DE + EC}{\sqrt{\overline{AB}^2 - \frac{1}{2} AD.CD}}$$

$$k = \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2 = 2(2 + 2\sqrt{2})^2$$

Für gewöhnlich wird man sich zur Bestimmung der für die Berechnung von k nötigen Daten mit Vorteil des Planimeters bedienen. Dass man mit Hülfe eines solchen auch die erforderlichen Längen bestimmen kann, geht aus dem Crofton'schen Theorem hervor. Legt man nämlich von einem willkürlichen Punkte an eine geschlossne Curve zwei den Winkel ϑ bildende Tangenten, so ist bekanntlich

$$L = 2\sqrt{\int\int(\vartheta - \sin\vartheta)\, dx dy + \pi F},$$

und auch das hier auftretende Doppelintegral kann auf planimetrischem Wege rein mechanisch bestimmt werden. Hat man dagegen es mit sphärischen Figuren zu tun, so wird man alles auf sphärische Dreiecke reduciren und das Legendre'sche Theorem anwenden, welches, wie Nell[16]) gezeigt hat, einer grössren Ausdehnung fähig ist, als man bisher gewöhnlich glaubte.

16) Nell, Zur höheren Geodäsie, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 19. Jahrg. S. 450.

XVI.

Beweis eines Fundamentalsatzes von den magischen Quadraten.

Von

Siegmund Günther.

---

§. 1. Die vorliegende Mitteilung hat den Zweck, zu der in letzter Zeit wenigstens bei deutschen Mathematikern ziemlich in Vergessenheit geratenen Lehre von den magischen Quadraten einen kleinen Beitrag zu liefern. Um über diejenigen Punkte, deren Erledigung hier angestrebt wird, Klarheit zu erhalten, wird es sich empfehlen, das in diesem Wissenszweige bisher Geleistete mit kurzen Worten zu registriren.

Unverbürgte Gerüchte lassen die Lehre von den magischen Quadraten bei den Indern entstehen; historische Documente für diesen Ursprung lassen sich jedoch nicht beibringen. Einem in Deutschland wohl wenig bekannten Werke französischer Zunge [1]) entnehmen wir folgende Notiz: „M. de la Loubère en a trouvé la connaissance répandue dans l'Inde, et surtout à Surate, ce qui rend assez probable qu'elle nous vient de ce pays aussi bien que notre système de numération [1]). Ohne die Richtigkeit dieser Angabe irgend in Zweifel ziehen zu wollen, dürfen doch aus derselben weittragende Schlüsse nicht gezogen werden; die Schriften der indischen mathematischen Classiker enthalten nichts hierauf Bezügliches.

Der erste historisch constatirte Schriftsteller über diesen Gegenstand ist der Byzantiner **Moschopulos**, wahrscheinlich im 14. Jahr-

hundert lebend [2]). Derselbe fast das magische Quadrat bereits ganz in unsrem Sinne auf; es sollen die ersten m^2 natürlichen Zahlen so zu einem quadratförmigen Schema zusammengestellt werden, dass die Summen aller horizontalen und vertikalen Reihen (Zeilen und Colonnen) stets die nämliche Zahl liefern, wie die Summen der beiden Diagonalreihen — eine Definition, die jede andre scheinbar complicirtere in sich aufnimmt und deshalb auch hier stets festgehalten werden soll. Moschopul's von Mollweide [3]) reproducirte Regel bezeichnet einen bereits ziemlich hohen Grad von Sagacität und ist ein für die Geschichte der mittelalterlichen Mathematik kostbares Denkmal; sie beschränkt sich übrigens auf Quadrate mit ungerader Wurzel.

Der allgemeine Charakter der Wissenschaft im scholastischen Mittelalter lässt es nicht wunderbar erscheinen, dass die Mystik sich der neuen Erfindung bemächtigte, und dass so die magischen Quadrate als Amulete und dergleichen eine ähnliche Rolle spielen mussten, wie das pythagorische Sternfünfeck [4]). Mollweide [5]) führt nach Kästner einige solche die Numismatik mehr als die Mathematik interessirende Reliquien an. Als ein Nachklang dieser Periode sind auch die Phantasien der deutschen Gelehrten Agrippa von Nettesheim [6]) und Theophrastus Paracelsus [7]) zu bezeichnen. Von letztrem wird gewöhnlich nur die Schrift „De planetarum sigillis" in der uns hier interessirenden Angelegenheit genannt; indessen wandte er dem Gegenstande auch sonst seine Teilnahme zu, freilich in einer uns unverständlichen Weise. Es möge hier an eine von seinem Biographen Siber [8]) citirte Stelle [9]) erinnert werden, welche von dem medicinischen Gebrauch der Amulete handelt; es heisst dort: „Als Beispiel stehe hier das Sigillum Saturni. Es wird von feinem, puren Villacher Blei gemacht, auf einer Seite quadiirt, und sein Quadrat mit 3 multiplicirt und in einer

2	9	4
7	5	3
6	1	8

jeden Linie soll stehen 15".

Von einem mehr wissenschaftlichen Standtpunkte aus scheint zuerst der deutsche Arithmetiker Stiefel [10]) die Lehre von den magischen Quadraten behandelt zu haben, und M. Cantor [11]) sagt mit Recht, dass mehrere seiner Betrachtungen auch für einen Mathematiker unsrer Tage noch Stoff genug zum Nachdenken darbieten, jedoch gelang ihm ebensowenig wie seinem Landsmann Adam Riese [12]) die Auffindung einer einfachen Methode zur mechanischen Construction

dieser Gebilde. Wohl aber scheinen sich im Besitze eines solchen Verfahrens verschiedene deutsche Arithmetiker aus der zweiten Hälfte des sechszehnten Jahrhunderts befunden zu haben. So berichtet uns Doppelmayr[13]) von einem gewissen Zacharias Lochner aus Ingolstadt, „dass er gar leicht und behend allerley magische Quadrate, ja gar die grösste, zu deren jeder öfters ein gantzer Regalbogen erfordert wurde, beschreiben und darstellen kundte", ähnliches wird uns auch von dem Nürnberger Rechenmeister Peter Roth gemeldet[14]). Diese Angaben scheinen darauf hinzudeuten, dass jene Männer sich bereits im Besitze derjenigen Methode befanden, welche den eigentlichen Vorwurf dieser Notiz bildet und durch deren Anwendung die vielbewunderte Geschicklichkeit jener Rechenkünstler, wie wir sehen werden, sich sehr einfach erklärt. Schwenter[15]) führt als weitre Autoren über diesen Gegenstand noch Franciscus Spinola und Georgius Henischius an; er selbst erweitert die Aufgabe insofern, als er Zahlenquadrate construiren lehrt, bei welchen die derselben Zeile, Colonne oder Diagonale angehörigen Glieder ein constantes Product geben. Zu diesem Zwecke construirt er zunächst ein gewöhnliches magisches Quadrat und ersetzt jede beliebige Zahl m derselben durch

$$a^m,$$

unter a eine willkürliche ganze positive Zahl verstanden.

Um jene Zeit begann der grosse Neubegründer der unbestimmten Analytik, Bachet de Méziriac[16]) sich mit diesem Gegenstande zu beschäftigen; er fasste das Problem als ein zahlentheoretisches auf und lehrte die Quadrate mit ungerader Wurzel construiren. In diesem Sinne erregte die Aufgabe auch die Aufmerksamkeit des um gewisse Partien der Zahlentheorie hochverdienten Faulhaber[17]), dem auch bei seiner unverkennbar ausgesprochnen mystischen Richtung die kabbalistische Verwendung der magischen Quadrate imponiren mochte. Auch wirkte er wohl in diesem Punkte auf seinen Freund und Schüler Remmelin[18]) ein, von dem Ofterdinger [19]) bezeugt, „dass seine Theorie der magischen Quadrate heute noch von Wert ist". Bei dem Polyhistor Athanasius Kircher[20]) tritt die wissenschaftliche Seite der Sache natürlich zurück.

Die erste grössere selbständige Abhandlung über die magischen Quadrate verdanken wir dem französischen Combinatoriker Frénicle de Bessy[21]). Derselbe vertritt, seiner wissenschaftlichen Richtung entsprechend, einen mehr combinatorischen Standpunkt, giebt Regeln zur Bildung der Quadrate von gerader Wurzel und bestimmt die Anzahl derjenigen Quadrate, welche sich über einer Strecke von vier Längeneinheiten errichten lassen — eine für die Theorie, wie wir

nachher zeigen werden, wichtige Leistung. Auch discutirte er solche Quadrate, welche durch Wegnahme äussrer Reihen ihren Charakter nicht verlieren, von Montucla[22]) „carrés mago-magiques" genannt.

Auf Frénicle's Arbeiten baute zunächst Poignard[23]) weiter, dessen Leistungen jedoch, obschon sie in mancher Hinsicht eine Erweiterung des Fundamentalproblems darbieten, für die eigentliche Theorie von geringerem Belange sind. Die beste Abhandlung lieferte bald darauf der in vielen Beziehungen bedeutende Mathematiker de la Hire[24]) und an ihn schliessen sich eng an seine Landsleute Sauveur[25]), Ons-en Bray[26]) und Rallier des Ourmes[27]). Der erste dieser drei verdient in der Geschichte unsrer Specialdisciplin auch deshalb eine Stelle, weil er den Versuch machte, die Aufgabe auf die Dimensionen zu erweitern und magische Würfel zu construiren. In Deutschland sind aus jener Periode die Namen v. Clausberg[28]), Rohlfs[29]) und Capito[30]) zu nennen, welche die wissenschaftliche Seite des Gegenstandes jedoch nicht wesentlich förderten.

Im Allgemeinen lässt sich der für das achtzehnte Jahrhundert überhaupt charakteristische Zeitgeist auch darin nicht verkennen, dass man mit der Stellung des Problems, wie sie aus dem Altertum überkommen war, nicht mehr sich zufrieden zeigte und allenthalben Künsteleien daran anzubringen versuchte, obschon man sich die Unzulänglichkeit des bisher selbst für den einfachsten Fall Geleisteten nicht wohl verhehlen konnte. So wenigstens glauben wir die Zusätze von Kochanski[31]), Franclin[32]) u. a. auffassen zu müssen.

1) Un million de faits, etc., par J. Accard etc., Paris 1850. S. 91.

2) Hutton, mathematical and physical dictionary, London 1795—96. Vol. II. S. 6.

3) Mollweide, De quadratis magicis commentatio, Lipsiae 1816. S. 41 ff.

4) Günther, Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nel antichità e nel medio evo, trad. de A. Sparagna, Estr. dell Bullett. di bibliogr. e di stor. delle scienze mathem. e fis., Tomo VI. S. 19 ff.

5) Mollweide, Praefatio.

6) Agrippa v. Nettesheim, de occulta Philosophia libri III, Coloniae 1533. II. S. 22.

7) Theophrastus Paracelsus, Archidoxis magicae libri VII im zweiten Band der Opera, Strassburg 1616—18.

8) Rixner und Siber, Leben und Lehrmeinungen berühmter Physiker am Ende des XVI. und am Anfange des XVII. Jahrhunderts, 1. Heft, Sulzbach 1819. S. 88.

9) Paracelsus, Archid. mag. S. 570 ff.

10) Sticfel, Arithmetica integra, Noninb. 1544. S. 24 ff.

11) M. Cantor, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2. Band.

12) Adam Riese, Rechnung nach der lenge, auf den Linihen und Feder u. s. w. Leipzig 1550. S. 108.

13) Doppelmayr, historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730. S. 164.

14) Ibid. S. 165.

15) Schwenter, Deliciae physico-mathematicae, Nürnberg 1636. S. 100 ff.

16) Bachet de Méziriac, Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres, Lyon 1613.

17) Faulhaber, Arithmetischer cubicossischer Lustgarten, mit neuen Inventionibus gepflanzt, Tübingen 1604. A. v. St.

18) Remmelin, Τετραγωνιασμος ἀριθμοισοπλευρος haec structura tabularum quadratarum, Aug. Vindelic. 1627.

19) Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts, Ulm 1867. S. 5.

20) Ath. Kircher, Arithmologia, sive de abditis numerorum mysteriis, Romae 1665.

21) Frénicle de Bessy, Traité des quarrés magiques, Divers ouvrages de Math. et de Phys., par Mssrs. de l'Acad. Roy. des Scienc. Paris 1693. S. 423 ff.

22) Montucla, Histoire des Mathématiques, Paris 1758. Tome I. S. 348.

23) Poignard, Traité des quarrés magiques, Bruxelles 1704.

24) De la Hire, Nouvelle construction des quarrés magiques, Mém. de l'acad. royale, Année 1705. S. 166 und 480 ff.

25) Sauveur, Construction générale des quarrés magiques, Ibid. Année 1710. S. 124.

26) Ons-en-Bray, Méthode facile pour faire tels quarrées magiques que l'on voudra, Ibid. Année 1750.

27) Rallier des Ourmes, Mémoire sur les carrées magiques, Mém. des Savans étrang., 1763. IV.

28) v. Clausberg, Demonstrative Rechenkunst, Leipzig 1732. 4. Teil. §. 1505.

29) Rohlfs, Künstliches Zahlenspiel oder gründliche Anweisung, wie die sogenannten magischen Quadrate leicht zu verfertigen, Buxtehude, 1742.

30) Capito, Alle magischen Quadrattafeln zu verfertigen, d. i. die Zahlen aller geraden und ungeraden Quadraten gründlich auszurechnen, leicht zu ordnen, und viele Millionenmal eben so leicht zu verändern, dass sie in die Länge, Breite und über's Creutz einerlei, und die verlangte Summe bringen. Glückstadt 1767.

31) Kochanski, Considerationes circa quadrata et cubos magicos, Acta erudit. Lipsiae 1686, 1690, 1692. S. 391, S. 329, S. 490.

32) Franclin, Experiments and observations on Electricity made at Philadelphia and communicated in several letters to Mr. Collinson in London, New edition of the Whole with additions, London 1769. S. 350.

§. 2. Von neueren Mathematikern hat sich fast allein Mollweide mit den magischen Quadraten beschäftigt und diesem Gegenstande (s. o.) eine eigene Schrift gewidmet, welche das Verdienst hat,

die früher zerstreut und unvermittelt hingestellten Regeln unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt zu bringen. Vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus genügt demnach Mollweide's Arbeit allen Ansprüchen; andrerseits müssen wir jedoch auch Müller's [33]) Ausspruch als gerechtfertigt anerkennen, dass dieselbe „in Beziehung auf leichte und einfache Darstellung der Zauberquadrate mancher Zusätze bedarf". Von sonstigen Bemühungen deutscher Mathematiker haben wir anscheinend nur noch die voluminöse Schrift von Hugel [34]) zu verzeichnen, welche allerdings einige neue Darstellungsweisen lehrt, für unsren Zweck jedoch nicht weiter in Betracht kommt. Dagegen ist als ein wesentlicher Fortschritt die Abhandlung von v. Pessl zu bezeichnen [35]), welche das magische Quadrat allgemeiner als magischen Cylinder auffasst und die Lehre von diesen Gebilden in eine Verbindung mit jener Disciplin zu setzen sucht, welche wir gegenwärtig als Analysis situs zu bezeichnen pflegen.

Den rein arithmetischen Teil der Frage hat in neuester Zeit W. Thompson [36]) wesentlich gefördert, indem er eine Methode angab aus einem gegebenen magischen Quadrat von n^2 Zellen ein anderes von $(pn)^2$ Zellen herzuleiten, unter p eine willkürliche ganze Zahl verstanden. Besitzen wir eine Methode, jedes Quadrat mit ungerader Wurzel ohne weiteres zu bilden, so sind wir durch Thompson's Regel in den Stand gesetzt, auch jedes beliebige andre Quadrat zu bilden, indem jede Zahl in Primfactoren zerlegbar und jede Primzahl, ausgenommen 2, zugleich eine ungerade Zahl ist. Nur das Quadrat von 16 Zellen macht eine Ausnahme, indem es, wie leicht zu sehen, ein Quadrat von 4 Zellen nicht giebt; indessen ist die wissenschaftliche Discussion gerade dieses Quadrates bereits von Frénicle (s. o. §. 1.) zum Abschlusse gebracht worden.

Die jetzt näher zu characterisirende Regel zur Construction magischer Quadrate von ungerader Zellenzahl ist nun im wesentlichen identisch mit jener des Moschopulos, ändert dieselbe jedoch insofern bedeutend um, als nun die Darstellung der Quadrate selbst eine rein mechanische wird und die Nachahmung der oben von den Rechenkünstlern Lochner und Roth angeführten Kunststücke einem jeden sofort sich darbietet. Diese Verbesserung des alten Verfahrens stammt bereits aus dem vorigen Jahrhundert, indem sie nach Müller's Angabe in einem mancherlei Seltenheiten enthaltenden [37]) holländischen Werke sich findet.

Auf jeder Quadratseite errichte man, wenn $(2n+1)^2$ die Anzahl der Zellen ist, eine Reihe von n Rechtecken symmetrisch, (s. d. Fig.) die bezüglich

$$n-2,\quad n-4,\quad n-6\ \ldots\ 5,\quad 3,\quad 1$$

Zellen enthalten; die so entstandenen Figuren, von oben nach links herumgezählt, mögen als erste, zweite, dritte, vierte Terrasse bezeichnet werden.

In das erste Feld der Terrasse I trage man die Zahl 1 ein und fülle nun in diagonaler Richtung sämmtliche zu erreichende Zellen durch die Glieder der natürlichen Zahlenreihe aus, so dass in die unterste Zelle von Terrasse III die Zahl

$$(2n+1)^2$$

tritt. Hierauf verschiebe man eine jede Terrasse parallel mit sich selbst so lange, bis jede Quadratseite mit der gegenüberliegenden zusammen gefallen ist; auf diese Weise rückt jede Zahl der Terrassen in das richtige Feld des magischen Quadrates ein.

Ersichtlich können wir aber diese Operation der Verschiebens auch umgehen und so sagen:

Um die $p$te Zeile oder Colonne des magischen Quadrates zu bilden ($p < n$), zähle man die Anzahl der bereits in der nämlichen Horizontal- oder Verticalreihe stehenden Elemente ab, dieselbe sei l; zu diesen l Elementen nehme man noch die Elemente jener Zeile oder Colonne von Terrasse III oder IV hinzu, welche

$$2n+1-l$$

Elemente aufweist. Zur Bildung der $(n+1+p)$ten Zeile oder Colonne ($p < n$) bedient man sich des nämlichen Verfahrens, nur dass an Stelle von Terrasse III und IV bezüglich Terrasse I und II zu treten haben.

Mit Hülfe dieser Regel ist in dem angeführten Beispiel zunächst das Schema für 169 Elemente construirt. Die weitre Anwendung ergiebt die noch nicht durch Zahlen ausgefüllten Plätze in folgender Weise. Es ist

$a = 104$, $b = 116$, $c = 128$, $d = 140$, $e = 152$, $f = 164$, $g = 92$, $h = 117$, $i = 129$, $k = 141$, $l = 153$, $m = 165$, $n = 8$, $p = 105$, $q = 130$, $r = 142$, $s = 154$, $t = 166$, $u = 9$, $v = 106$, $w = 118$, $x = 143$, $y = 155$, $z = 167$, $A = 10$, $B = 22$, $C = 119$, $D = 131$, $E = 156$, $F = 168$, $G = 11$, $H = 23$, $J = 120$, $K = 132$, $L = 144$, $M = 169$, $N = 12$, $P = 24$, $Q = 36$, $R = 133$, $S = 145$, $T = 157$,

$U=13$, $V=25$, $W=37$, $X=134$, $Y=146$, $Z=158$, $\alpha=1$, $\beta=26$, $\gamma=38$, $\delta=50$, $\varepsilon=147$, $\zeta=159$, $\eta=2$, $\vartheta=14$, $\iota=39$, $\varkappa=51$, $\lambda=148$, $\mu=160$, $\nu=3$, $\xi=15$, $\pi=27$, $\varrho=52$, $\sigma=64$, $\tau=161$, $\upsilon=4$, $\varphi=16$, $\chi=28$, $\psi=40$, $\omega=65$, $\mathfrak{a}=162$, $\mathfrak{b}=5$, $\mathfrak{c}=17$, $\mathfrak{d}=29$, $\mathfrak{e}=41$, $\mathfrak{f}=53$, $\mathfrak{g}=78$, $\mathfrak{h}=6$, $\mathfrak{i}=18$, $\mathfrak{k}=30$, $\mathfrak{l}=42$, $\mathfrak{m}=54$, $\mathfrak{n}=66$.

Hiermit ist in wenigen Minuten die Construction des magischen Quadrates gegeben.

Anmerkung. Zur Vervollständigung der Literaturübersicht möge noch auf die sorgfältige Zusammenstellung in Gehler's Wörterbuch [38]) und auf Horner's kürzlich erschienene Abhandlung aufmerksam gemacht werden [39]).

33) Müller, Auserlesene mathem. Bibliothek, Nürnberg 1820. S. 229.

34) Hugel, Die magischen Quadrate, mathematisch behandelt und bewiesen, Ansbach 1859.

35) v. Pessl, Ueber eine besondere Art magisch. Quadrate, Amberg 1872.

36) W. Thompson, On magic squares, Quarterly journal of pure and applied mathematics, X. S. 186 ff.

37) Veritas quadrata mathematica, physica, philologica, theologica, Amstelodami 1765.

38) Gehler's physikalisches Wörterbuch, 2. Auflage, 6. Band, Leipzig 1836. Artikel: Magie.

39) Horner, On the algebra of magic squares, Quart. journ. XI. S. 57.

§. 3. Einen Beweis hat der unbekannte Erfinder der im Vorstehenden mitgeteilten Regel nicht für dieselbe geliefert; derselbe soll nun im Folgenden erbracht werden, und zwar werden wir uns hierbei an die zweite Formulirung halten. Der Beweis zerfällt in acht Unterabteilungen; es muss nämlich gezeigt werden, dass für die beiden Diagonalreihen, für jede $p$te Colonne und Zeile $(p<n)$, für jede $(n+1+p)$te Colonne und Zeile $(p<n)$ und schliesslich für die mittlere $(n+1)$te Colonne und Zeile der nämliche Wert sich ergebe, wenn wir alle darin vorkommenden Zahlen zusammenaddiren. Da die Gesammtnennzahl dieser Zahlen

$$(2n+1)^2$$

ist, so ist ihre Gesammtsumme

$$1+2+3+\ldots+(2n+1)^2=\tfrac{1}{2}(2n+1)^2[(2n+1)^2+1],$$

und deren $(2n+1)$ter Teil gleich

$$4n^3+6n^2+4n+1.$$

Diesen Wert muss jede der genannten acht Summen erreichen, wenn die Construction richtig ist.

§. 4. Es möge nun für jede einzelne dies untersucht werden.

I) Im rechten oberen Eckfelde des Quadrats steht die Zahl

$$1+n(2n+1),$$

und es wird sonach die von oben rechts nach unten links gehende Diagonale durch die einzelnen Glieder der arithmetischen Reihe

$$1+n(2n+1),\quad 2+n(2n+1),\quad 3+n(2n+1)\ldots 2n+n(2n+1),$$
$$2n+1+n(2n+1)$$

zu besetzen sein (in dieser Besetzung liegt die Analogie unsres Verfahrens mit jenem des **Moschopulos**; während aber dieselbe hier nur ein Ausfluss eines allgemeineren Verfahrens ist, ist sie bei jenem das Primäre). Die Summe dieser Diagonalreihe ist also

$$\frac{2n+1}{2}(1+2n+1)+n(2n+1)^2 = 4n^3+6n^2+4n+1.$$

II) Die andre Diagonalreihe beginnt mit der Zahl

$$n+1;$$

ihre einzelnen Glieder werden also successive die folgenden sein:

$$n+1,\ n+1+1.(2n+1),\ n+1+2.(2n+1)\ldots n+1+(2n-1)(2n+1),$$
$$n+1+2n(2n+1).$$

Die Summe dieser Glieder ist

$$(n+1)(2n+1)+\frac{2n}{2}(2n+1)^2 = 4n^3+6n^2+4n+1.$$

III) Die $(n+1)$te Zeile enthält blos diejenigen Zahlen, welche mit ihr in der gleichen Horizontallinie liegen. Das erste Glied ist

$$2n+1;$$

demnach treten in dieselbe successive folgende Zahlen

$$2n+1,\quad 2n+1+1.2n,\quad 2n+1+2.2n\ldots 2n+1+(2n-1)2n,$$
$$2n+1+2n.2n.$$

Die Summe dieser Progression ist

$$(2n+1)^2+2n.n(2n+1) = 4n^3+6n^2+4n+1.$$

IV) In der $(n+1)$ten Colonne beginnt die Reihe mit 1, so dass man die Summe

$$1+1.(2n+2)+2.(2n+2)+\ldots 2n.(2n+2)$$

zu nehmen hat. Dieselbe ist gleich

$$2n+1+n(2n+1)(2n+2)=4n^3+6n^2+4n+1.$$

§. 5. V) Nunmehr möge für die $p$te Zeile ($p<n$) die Bestimmung vorgenommen werden.

Wir bezeichnen, analog dem Gebrauche der Determinantentheorie, die in der Zeichnung oben stehende Zeile und die am weitesten links befindliche Colonne bezüglich als erste Zeile und Colonne.

Die $p$te Zeile enthält zunächst alle mit ihr bereits in der nämlichen Horizontale stehenden Glieder; um die hieraus erwachsende Summe zu finden, hat man die Progression

$$\begin{array}{l} n+p \\ n+p+1.2n \\ n+p+2.2n \\ \vdots \\ n+p+(n+p-1)2n \end{array}$$

zu summiren. Man erhält als Summe

$$\Sigma=(n+p)^2+n(n+p)(n+p-1).$$

Hierzu kommen der Festsetzung zufolge noch die Glieder der $p$ten Zeile von Terrasse III, welche

$$2n+1-(n+p)=n+1-p$$

Glieder enthält. Die Reihe ist hier nachstehende:

$$\begin{array}{l} (2n+1)(n+p+1) \\ (2n+1)(n+p+1)+1.2n \\ (2n+1)(n+p+1)+2.2n \\ \vdots \\ (2n+1)(n+p+1)+(n-p)2n. \end{array}$$

Die Summation liefert

$$\Sigma'=(2n+1)(n+p+1)(n-p+1)+n(n-p)(n-p+1).$$

Hiernach ist die Gesammtsumme der Reihe

$$\Sigma+\Sigma'=4n^3+6n^2+4n+1.$$

VI) Betrachten wir nunmehr die $(n+1+p)$te Zeile. Die bereits von Anfang an derselben angehörigen Zahlen beginnen mit

$$(p+1)(2n+1)$$

und bilden die Reihe

$$(p+1)(2n+1)$$
$$(p+1)(2n+1)+1.2n$$
$$(p+1)(2n+1)+2.2n$$
$$\vdots$$
$$(p+1)(2n+1)+(2n-p)2n.$$

Die Summation liefert die Summe

$$\Sigma=(p+1)(2n+1)(2n-p+1)+n(2n-p)(2n-p+1).$$

Da bis jetzt $(2n-p+1)$ Glieder verwendet wurden, so muss noch aus Terrasse I jene Zeile hinzugenommen werden, welche $(2n+1-2n+p-1=p)$ Glieder aufweist; dies ist aber die $p$te, welche demnach durch die Reihe

$$p$$
$$p+1.2n$$
$$p+2.2n$$
$$\vdots$$
$$p+(p-1)2n$$

gebildet wird. Die Summe dieser Reihe ist

$$\Sigma'=p^2+np(p-1),$$

also

$$\Sigma+\Sigma'=4n^3+6n^2+4n+1.$$

VII) Die zur Ausfüllung der $p$ten Colonne bestimmte Reihe ist diese:

$$n-p+2$$
$$n-p+2+1.(2n+2)$$
$$n-p+2+2.(2n+2)$$
$$\vdots$$
$$n-p+2+(n+p-1)(2n+2)$$

und ihre Summe

$$\Sigma=(n-p+2)(n+p)+(n+1)(n+p-1)(n+p).$$

Hierzu tritt noch die $p$te Colonne von Terrasse IV hinzu, in der $(2n+1-n-p=n-p+1)$ Glieder sich befinden, nämlich die Reihe

$$(n+p)(2n+1)+1$$
$$(n+p)(2n+1)+1+1.(2n+2)$$
$$(n+p)(2n+1)+1+2.(2n+2)$$
$$\vdots$$
$$(n+p)(2n+1)+1+(n-p)(2n+2)$$

Die Addition ergiebt

$$\Sigma'=[(n+p)(2n+1)+1](n-p+1)+(n+1)(n-p)(n-p+1).$$

Auch hier ist

$$\Sigma+\Sigma'=4n^3+6n^2+4n+1.$$

VIII) Für die $(n+1+p)$te Colonne haben wir zunächst die Reihe

$$\begin{array}{l} p(2n+1)+1 \\ p(2n+1)+1+1.(2n+2) \\ p(2n+1)+1+2.(2n+2) \\ \vdots \\ p(2n+1)+1+(2n-p)(2n+2); \end{array}$$

deren Summe ist

$$\Sigma = [p(2n+1)+1](2n-p+1)+(n+1)(2n-p)(2n-p+1).$$

Aus der Terrasse II ist beizuziehen die Reihe

$$\begin{array}{l} 2n-p+2 \\ 2n-p+2+1.(2n+2) \\ 2n-p+2+2.(2n+2) \\ \vdots \\ 2n-p+2+(p-1)(2n+2) \end{array}$$

mit der Summe

$$\Sigma' = p(2n-p+2)+(n+1)p(p-1).$$

Es ist also schliesslich auch in diesem Falle

$$\Sigma+\Sigma' = 4n^3+6n^2+4n+1,$$

und damit ist der vollständige Beweis für die Richtigkeit unserer Construction erbracht.

§. 6. Resumiren wir kurz das Gesagte, so möchten wir den Vorteil der bisher discutirten Regel zur Formirung magischer Quadrate andren ähnlichen Verfahrungsweisen gegenüber als einen doppelten hinstellen. Die Untersuchung über die verschiedenen Arten von Zauberquadraten, welche bei gegebener Zellenzahl sich construiren lassen, knüpft am besten an eine Reihe bereits vorliegender Quadrate an, und eine solche Reihe liefert uns unsre Methode, indem die Einschreibung der Zahlen auf verschiedene Weisen abgeändert werden kann. In Verbindung mit der Thompson'schen Regel (s. o. §. 2.) wäre also eine Basis für irgend welche weitere Forschungen über diese Materie gegeben.

Der andre Vorteil, welchen wir oben nannten, ist ein methodischer. Man betrachtete bisher die Lehre von den Zauberquadraten fast ausschliesslich als ein specielles Capitel der Zahlentheorie oder, besser gesagt, der unbestimmten Analytik. Der im Vorstehenden gelieferte Beweis einer durch hohe Einfachheit sich auszeichnenden Construction bedient sich dagegen lediglich elementarer algebraischer Transformationen und ermöglicht so jedem nur mit der Lehre von den einfachen arithmetischen Progressionen Vertrauten das Verständniss eines Hauptsatzes.

XVII.

Beiträge zur Theorie unrein periodischer Decimalbrüche.

Von

Karl Broda,

Lehrer für Mathematik und Physik in Wien.

Ein unrein periodischer Decimalbruch, dessen Periode eine gerade Stellenzahl besitzt, kann wenn p die m ziffrige Zahl bedeutet, die vor der Periode steht, wenn x die erste und y die zweite Hälfte der Periode, und wenn r ihre Stellenzahl vorstellt, immer ausgedrückt werden durch die Reihe

$$\frac{p}{10^m}+\frac{x}{10^{m+r}}+\frac{y}{10^{m+2r}}+\frac{x}{10^{m+3r}}+\dots+$$

Soll die identische Gleichung

$$\frac{q[(p\,10^r+x)+p]+a}{9.10^m(10^r+1)}=\frac{p}{10^m}+\frac{x}{10^{m+r}}+\frac{y}{10^{m+2r}}+\frac{x}{10^{m+3r}}+\dots+ \qquad 1)$$

wobei a eine constante Grösse darstellt, bestehen, so ist, wenn für

$$\frac{x}{10^r}+\frac{y}{10^{2r}}+\frac{x}{10^{3r}}+\dots+$$

der früher [Seite 86, 1. Heft] gefundene Wert

$$\frac{10^r x+y}{10^{2r}-1}$$

gesetzt wird

$$\frac{q[(p10^r+x)+p]+a}{9.10^m(10^r+1)}=\frac{p}{10^m}+\frac{1}{10^m}\,\frac{y+10^r.x}{10^{2r}-1}$$

Sucht man aus dieser Gleichung $x+y$, so ist nach einfacher Reduction

$$x+y=a\frac{10^r-1}{9}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad 2)$$

Die letzte Gleichung ist mit der auf Seite 86 unter 2) gefundenen Relation übereinstimmend, woraus die Anwendbarkeit der dort aufgestellten Sätze für diesen Fall erwiesen scheint. Die Gleichungen 1) und 2) können in doppelter Beziehung Verwertung finden:

I. Soll ein unrein periodischer Decimalbruch, dessen Periode eine gerade Stellenzahl besitzt, und deren einzelne Ziffern sich zu a ergänzen, in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so findet man den Zähler, indem man die der Periode vorgehenden, und die die erste Hälfte der Periode bildenden Ziffern als eine Zahl betrachtet, um die vor der Periode stehende Zahl vermehrt, diese Summe verneunfacht, und dieses Product um a vermehrt; um den Nenner zu bilden, hängt man an die Ziffer neun $(r-1)$ Nullen wobei r die halbe Stellenzahl der Periode ist] an, schreibt rechts noch die Zahl neun, und so viele Nullen als der Periode Ziffern vorhergehen.

Z. B. 0·123 52412536. Da hier $a=7$, $x=5241$, $p=123$, $r=4$ und $m=3$ ist, so erhält man

für $Z=q[(p10^r+x)+p]+a=9[1235241+123]+7=11118283$
für $N=9.10^3[10^4+1]=90009000$

daher ist

$$0·123\,52412536=\frac{11118283}{90009000}$$

0·425 6543201234. Da $a=6$, $x=65432$, $p=425$, $r=5$ und $m=3$ ist, so muss

$$Z=9[42565432+425]+b=383092719 \quad \text{und}$$
$$N=9000090000$$

sein, deshalb ist

$$0·425\,6543201234=\frac{383092719}{900009000}$$

Ebenso findet man für

$$0\cdot 4531\,123454\,432101 = \frac{40780151870}{90000090000}$$

u. s. w.

Setzt man für

$$\frac{y}{10^{2r}} + \frac{x}{10^{3r}} + \frac{y}{10^{4r}} + \ldots + = \frac{R}{N_1 10^r}$$

so ist aus Gleichung 1)

$$\frac{Z}{N} = \frac{p}{10^m} + \frac{1}{10^m}\frac{Z_1}{N_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

wobei für

$$\frac{x}{10^r} + \frac{R}{N_1 10^r} \ldots\ldots \frac{Z_1}{N_1}$$

gesetzt wurde, und da nach Relation 5. [1. Heft, Seite 90]

$$R = \frac{a}{9}N - Z$$

ist, so muss

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{x}{10^r} + \frac{\frac{a}{9}N_1 - Z_1}{N_1 10^r}$$

sein, nach einfacher Reduction findet man für

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{9x+a}{9(10^r+1)}$$

Setzt man in Gleichung 3) den eben gefundenen Wert, so wird

$$\frac{Z}{N} = \frac{9[(p10^r+x)+p]+a}{9.10^m(10^r+1)} \quad \ldots\ldots\ldots 4)$$

Gleichung 4) führt, wenn $a = 9$ wird, zu einer sehr einfachen Verwandlungs-Methode, es ist dann

$$\frac{Z}{N} = \frac{9[(p10^r+x)+p]+9}{9.10^m(10^r+1)} = \frac{(p10^r+x+1)+p}{10^m(10^r+1)} \quad \ldots 5)$$

Aus Gleichung 5) folgt die Regel:

Ein unrein periodischer Decimalbruch, dessen Periodenziffern sich zu neun ergänzen, wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die der Periode vorgehenden und die die erste Hälfte der Periode bildenden Ziffern als eine Zahl betrachtet, und die um

die Einheit vermehrte vor der Periode stehende Zahl, zu dieser Zahl addirt; die erhaltene Summe teilt man durch $10^m(10^r+1)$, wo r die Stellenzahl der halben Periode, und m die Anzahl der der Periode vorgehenden Ziffern vorstellt.

Z. B. 0·4 23457654. Da hier $a=9$, $x=2345$, $m=1$ und $r=4$ ist, so erhält man für $Z=42345+1+4=42350$, für $N=10(10^r+1)=100010$, daher ist

$$0\cdot4\ 23457654=\frac{42350}{100010}$$

Eben so findet man

$$0\cdot0001\ 923456076543=\frac{1923458}{10000010000}$$

u. s. w.

II. Soll ein Bruch von der Form $\frac{Z}{9.10^m(10^r+1)}$, wo Z, r und m ganze Zahlen vorstellen, in einen Decimalbruch verwandelt werden, so werden nur $(m+r)$ Ziffern durch gewöhnliche Division bestimmt, die zweite Hälfte der Periode findet man, indem man die Ergänzung zu a bildet. Die Ergänzungszahl a ergibt sich als Rest bei der Division des Zählers durch neun.

Z. B. $\frac{456789437}{900000090}$, da $r=7$ und $m=1$ ist, so bestimmt man durch gewöhnliche Division die 8 ersten Ziffern 50754376. Durch Bestimmung der Ziffersumme des Zählers, und nach Weglassung der in dieser Summe enthaltenen Nenner, ergibt sich die Ergänzungszahl 8, daher ist

$$\frac{456789437}{900000090}=0\cdot507\ 54376\ 8134512$$

u. s. w.

Ist $r>m$, so lässt sich sofort eine zweckmässige Verwandlungs-Methode aufstellen:

Man zerlegt Z in $Z=9A+a$, von der Zahl A werden die m ersten Ziffern dieser Zahl abgezogen, und der erhaltenen Differenz die zweite Hälfte der Periode, die aus r Ziffern besteht, angehängt, die zweite Hälfte der Periode findet man, indem man die Ergänzung zu a bildet.

Z. B. $\frac{220830892}{900000900}$. Da hier $m=2$, $r=6$, also $r>m$ ist, da

ferner 220830892 = 9.24536765 + 7 ist, $a = 7$ und $A = 24536765$, daher 24536765 — 24 = 24536741, also

$$\frac{220830892}{900000900} = 0\cdot24\,536741241036$$

Soll z. B. $\frac{645783454}{900009000}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden, so ist unter Berücksichtigung der Entwicklung auf Seite 88 (1. Heft), da $m = 3$, $r = 5$ und 645783454 = 9.71753717 + 1 ist, $a = 1$ und $A = 71753717$, daher 71753717 — 717 = 7175300, also ist

$$\frac{645783454}{900009000} = 0\cdot717\,53000[-4][-2]111$$

Nimmt man aber als Ergänzungszahl für $a = 10$ an, so ist sofort

$$\frac{645783454}{900009000} = 0\cdot717\,5299958111$$

Wien, am 21. Aug. 1874.

XVIII.

Zur Theorie des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks in den Kegelschnitten.

Von

Herrn Ingenieur-Hauptmann *von Wasserschleben.*

Die Curve $y = f(x)$ ist gegeben, und ausserdem ein fester Punkt P mit den Coordinaten m, n. Die Verbindungslinie zwischen diesem festen Punkte und einem Punkte der Curve ist jedes Mal auf der betreffenden Ordinate abzuziehen oder hinzuzuaddiren; wir betrachten den geometrischen Ort aller Endpunkte.

Die allgemeine Formel des geometrischen Orts aller Endpunkte ist

$$y_1 = f(x) \pm \sqrt{(y-n)^2 + (x-m)^2}.$$

Gehen wir nach einander zur Betrachtung der bei den Kegelschnitten entstehenden Curven über, denen sich die gerade Linie als Anhang anschliessen soll, so haben wir

I. bei der Parabel

aus der Grundgleichung und der Scheitelpunktsgleichung derselben

$$y = \pm \sqrt{px}$$

die der gesuchten Curve:

$$y_1 = \pm \sqrt{px} \pm \sqrt{(\sqrt{px} - n)^2 + (x-m)^2}. \quad (1)$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades, und wollen wir deshalb specieller die drei Fälle ins Auge fassen, wenn der gegebene Punkt

auf den Brenn-, Scheitel- und Anfangspunkt der Parabel verlegt ist. Nach Substitution für y schreiben wir y statt y_1.

a) $m = +\frac{p}{4}, \quad n = 0.$

Die Gleichung (1) geht dann über in

$$y = \pm\sqrt{px} \pm \sqrt{(\sqrt{px})^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2} \quad \text{oder}$$

$$y = \pm\sqrt{px} \pm \left(x + \frac{p}{4}\right) \tag{2}$$

Für $x = 0$ ergiebt sich $y = \pm\frac{p}{4}$, für $x = +\frac{p}{4}$ $y = \frac{+}{\pm} p_0$.

Für jeden anderen Wert von x ergeben sich entsprechend den vier Vorzeichen vier Werte für y. Die gefundene Curve hat vier Aeste, zwei concave und zwei convexe, von denen die beiden inneren die Parabel schneiden.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} \pm 1 = 0$$

giebt für $x = +\frac{p}{4}$, $y = 0$ ein Maximum und ein Minimum auf der x Axe; alle vier Aeste laufen in die Unendlichkeit fort.

Um die Schnittpunkte mit der Parabel zu finden, setzen wir die Werte für die Ordinaten einander gleich.

$$+\sqrt{px} = -\sqrt{px} + \left(x + \frac{p}{4}\right) \tag{3}$$

Daraus ergiebt sich für x der positive Wert $= p(\frac{7}{4} \pm \sqrt{3})$, und für $y = p\sqrt{\frac{7}{4} \pm \sqrt{3}}$. Die Curven schneiden die Parabel nach den doppelten Vorzeichen also zwei Mal und zwar für $x = p(\frac{7}{4} - \sqrt{3})$ und $y = p\sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{3}}$ zum ersten, für $x = p(\frac{7}{4} + \sqrt{3})$ und $y = p\sqrt{\frac{7}{4} + \sqrt{3}}$ zum zweiten Male, vide Skizze I.

b) $m = 0, \quad n = 0.$

Die Grundgleichung geht über in

$$y_1 = \pm\sqrt{px} \pm \sqrt{x^2 + px} \tag{4}$$

Für $x = 0$ wird y auch $= 0$; für jeden anderen Wert von x ergeben sich entsprechend den vier Vorzeichen vier Werte für y. Die Curve hat also vier Aeste.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} \pm \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px}} = 0$$

Da sich daraus $x = 0$ und $-\frac{3}{4}p$ ergiebt, kann die Curve weder ein Maximum, noch ein Minimum haben, sofern in $x = 0$ beide zusammenfallen. Dies gilt nur für 2 Zweige entsprechend den Zeichen $(\pm, \mp)$. Für $x = 0$ wird der zweite Differentialquotient $= \infty$; hier findet ein Rückkehrpunkt und ein Krümmungsradius $= 0$ statt. Da x und p stets positiv sind, so ist aus dem zweiten Differentialquotienten leicht zu ersehen, dass die Curve zwei zur Abscissen-Axe concave, zwei desgleichen convexe Aeste hat, vide Skizze II.

Um den Schnittpunkt mit der Parabel zu finden, setzen wir die Ordinaten einander gleich

$$+\sqrt{px} = -\sqrt{px} + \sqrt{x^2+px} \tag{5}$$

Daraus ergiebt sich für x der positive Wert $= 3p$. Die zugehörige Ordinate $y = \pm p\sqrt{3}$.

c) $m = -\frac{p}{4}$, $n = 0$.

Hier wird

$$y = \pm\sqrt{px} \pm \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}px + \frac{p^2}{16}} \tag{6}$$

Für $x = 0$ ist $y = \pm\frac{p}{4}$, für $x = \frac{p}{4}$, $y = \pm p(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}})$, für $y = 0$ wird $x = -\frac{p}{4}$ Da jedoch x nicht negativ werden kann, so schneidet die Curve die Abscissen-Axe nicht. Dagegen schneidet sie die Parabel selbst, für welchen Punkt sich aus

$$+\sqrt{px} = -\sqrt{px} + \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}px + \frac{p^2}{16}} \tag{7}$$

der Wert $x = \frac{p}{4}(5 \pm \sqrt{24})$ und $y = \pm\frac{p}{2}\sqrt{5 \pm \sqrt{24}}$ ergiebt. Setzen wir zur Bestimmung der Maxima und Minima der Differentialquotienten $= 0$. Wir haben

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} \pm \frac{2x + \frac{1}{2}p}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{p^2}{16}}} = 0$$

woraus:

$$x^3+\frac{5}{4}px^2+\frac{3}{16}p^2x-\frac{p^3}{64}=0$$

oder

$$\left(x+\frac{p}{4}\right)\left(x^2+px-\frac{p^2}{16}\right)=0$$

Dieser Gleichung genügen 2 negative Werte und der positive

$$x=p\,\frac{\sqrt{5}-2}{4}$$

Erstere sind zu verwerfen; letzterem entspricht:

$$\pm y=\frac{p}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{p}{2}\left(\frac{4x}{p}\right)^{\frac{5}{6}}$$

also ein Maximum und ein Minimum.

Der zweite Differentialquotient hat 2 Paar entgegengesetzte Werte, denen zwei convexe und zwei concave Aeste, wie Fig. 3. zeigt, entsprechen.

II. Bei der Ellipse.

Wir gehen von der Gleichung der Ellipse

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

aus, und erhalten daraus nach der allgemeinen Formel:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-m\right)^2+(x-n)^2} \qquad (7)$$

Wir betrachten zwei Specialfälle näher, nämlich

1) wenn $m=n=0$, und

2) wenn $m=0$, $n=-a$

ist, also wenn der gegebene Punkt der Mittelpunkt oder ein Scheitelpunkt der Ellipse ist.

1) $m=n=0$.

Die Gleichung (7) geht dann über in

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\pm\sqrt{\frac{a^2x^2-b^2x^2+a^2b^2}{a^2}} \qquad (8)$$

Für $x=0$ ist $y=\pm 2b$ und 0, für $x=\pm a$ wird y ebenfalls $\pm a$. Für alle Werte von x zwischen 0 und $\pm a$ ergeben sich für y vier

Werte; über $\pm a$ hinaus existiren keine reellen Werte für y. Den Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \pm \frac{x(a^2 - b^2)}{a\sqrt{a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2}}$$

zur Ermittelung der Maxima und Minima $= 0$ gesetzt und mit den Nennern multiplicirt, giebt

$$\mp bx.\sqrt{a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2} \pm x(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - x^2} = 0,$$

$$\mp bx.\sqrt{a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2} = \mp x(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$b^2x^2(a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2) = x^2.(a^2 - b^2)^2.(a^2 - x^2).$$

Aufgelöst und gehoben, erhält man

$$x = \pm a\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{b^2 - a^2}}.$$

Diesen Wert in Gleichung (8) eingesetzt, ergiebt sich:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{b^2 - a^2}} \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Curve hat demnach zwei Maxima und zwei Minima.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{ax} \pm \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2}}{ax} = 0,$$

$$\mp b\sqrt{a^2 - x^2} = \mp (a^2 - b^2)\sqrt{a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2},$$

$$b^2(a^2 - x^2) = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4).(a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2).$$

Aufgelöst und gehoben, erhält man

$$x = \pm ab\sqrt{\frac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 1}{b^6 + 3a^4b^2 - b^2 - 3a^2b^4 - a^6}}$$

als Bestimmung der Wendepunkte.

Um die Schnittpunkte der Curve und der Ellipse zu finden, setzen wir:

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \pm \sqrt{\frac{a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2}{a^2}} \qquad (9)$$

woraus:

$$4a^2b^2 - 4b^2x^2 = a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2,$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3a^2b^2}{a^2 + 3b^2}} \quad \text{und} \quad y = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2 + 3b^2}}$$

Die Ellipse wird daher von der Curve vier Mal geschnitten. Wie Fig. 4., 5., 6., 7. und 8. zeigen, ändert sich die Configuration der Curve, Maxima und Minima, mit dem Verhältniss des Wertes von $a:b$. So ist z. B. für $b=\frac{a}{4}$ die Abscisse des Maximums $x=\pm a\sqrt{\frac{14}{15}}$, für $b=\frac{a}{2}$ $x=\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$, für $b=a$ $x=0$, und für $b=2a$ $x=\pm a\sqrt{\frac{7}{3}}$ (ein unmöglicher Wert).

2) $m=0,\ n=-a$.

Die Gleichung (7) geht dann über in

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\pm\sqrt{x^2.\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+2ax+a^2+b^2} \qquad (10)$$

Der leichteren Rechnung wegen gehen wir durch Substitution $x-a$ für x auf die Scheitel-Gleichung der Ellipse über, wonach

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)+x^2} \qquad (11)$$

wird.

Für $x=0$ ist y ebenfalls 0, für $x=+2a$ $y=\pm 2a$, für x negativ und $>2a$ wird y imaginär. Aus

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\pm\frac{ab^2-b^2x}{a\sqrt{2ab^2x-b^2x^2}}\pm\frac{ab^2-b^2x+a^2x}{a\sqrt{2ab^2x-b^2x^2+a^2x^2}}=0$$

erhält man:

$$x=-\frac{2ab^2+a^3\pm a\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2}}{a^2-b^2}.$$

Die Curve hat also ein Maximum und ein Minimum. Die Schnittpunkte mit der Ellipse ergeben sich aus der Gleichung:

$$+\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}=-\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)+x^2} \qquad (12)$$

nämlich:

$$x=\begin{cases}\dfrac{6ab^2}{a^2+3b^2}\\ 0\end{cases}$$

$$y=\pm\frac{2ab^2\sqrt{3}}{a^2+3b^2}.$$

Die Curve wird also von der Ellipse zwei Mal geschnitten, wie Fig. 9. zeigt.

III. Bei dem Kreise.

Um die betreffenden Formeln für den Kreis zu finden, haben wir nur $a = b = r$ zu setzen, doch müssen die Differentialquotienten noch ein Mal entwickelt werden.

Die Hauptgleichung ist

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \pm \sqrt{(\sqrt{r^2 - x^2} - m)^2 + (x - n)^2} \qquad (13)$$

1) Wird der Mittelpunkt als der gegebene Punkt angenommen, so geht die Gleichung über in

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \pm r \qquad (14)$$

Für $x = 0$ ist $y = \pm 2r$, für $x = \pm r$ y ebenfalls $= \pm r$.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

gesetzt, giebt:

$$x = 0; \quad y = \pm 2r.$$

Die Ordinaten für die Schnittpunkte sind $x = \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}$ und $y = \pm \frac{r}{2}$. Die gesuchte Curve ist also ebenfalls eine Kreislinie und zwar besteht sie aus zwei Kreisen, die sich im Mittelpunkt des ursprünglichen Kreises berühren, und ebenso gross sind wie dieser; siehe Fig. 7.

2) Wird ein Punkt der Peripherie gewählt, so ist die Gleichung

$$y = \pm \sqrt{2rx - x^2} \pm \sqrt{2rx} \qquad (15)$$

Für $x = 0$ ist y auch $= 0$, für $x = + 2r$ $y = \pm 2r$. Aus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{r - x}{\sqrt{2rx - x^2}} \pm \frac{r}{\sqrt{2rx}} = 0$$

findet man:

$$x = + \frac{3}{2}r; \quad y = \pm \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Die Ordinaten für die Schnittpunkte der Curve und des Kreises sind $x = + \frac{3}{2}r$, $y = \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Fig. 9. zeigt eine der eben bestimmten Curve ähnliche.

IV. Bei der Hyperbel.

Aus der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel erhalten wir:

$$y_1 = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \pm \sqrt{(y-m)^2+(x-n)^2} \tag{16}$$

Für $m = n = 0$ gesetzt, geht die Gleichung über in

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \pm \sqrt{\frac{a^2x^2+b^2x^2-a^2b^2}{a^2}} \tag{17}$$

Für $x = 0$ wird y imaginär, desgleichen für alle Werte zwischen 0 und $\pm a$. Für $x = \pm a$ wird y ebenfalls $\pm a$; ist $x > a$, so erhalten wir vier Werte von y für den positiven, und vier für denselben negativen Wert von x. Setzt man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}} \pm \frac{x(b^2+a^2)}{a\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^2b^2}} = 0$$

so kommt:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+b^2}}$$

und dafür

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} \pm \sqrt{a^2+b^2}.$$

Die Curve hat demnach zwei Maxima und zwei Minima. Zur Bestimmung der Schnittpunkte setzen wir:

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} + \sqrt{\frac{a^2x^2+b^2x^2-a^2b^2}{a^2}} \tag{18}$$

woraus:

$$x = \pm\sqrt{\frac{4a^2b^2}{a^2b^2+4b^2-(a^2+b^2)}}.$$

Für diesen Wert wird

$$y = \pm b\sqrt{\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2b^2+4b^2-(a^2+b^2)}}.$$

Es darf daher a^2+b^2 weder gleich, noch kleiner als a^2b^2 werden, wenn noch Schnittpunkte erhalten werden sollen, wie die Fig. 10. und 11. zeigen.

Aus den Gleichungen zur Bestimmung der Schnittpunkte der gesuchten Curven und der Kegelschnitte, also (3), (5), (7), (12) und (18), lassen sich mit Leichtigkeit die Seiten des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks in den Kegelschnitten berechnen. Die Entfernungen des gegebenen Punktes (mn) von den Schnittpunkten sind, sobald derselbe in der x Axe liegt, einander gleich und gleich der Entfernung der Schnittpunkte von einander. Es bilden also diese drei

Punkte die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks und ist die Seite gleich der doppelten Ordinate.

Die symmetrischen Schnitte der Curven (y) und (y_1), in der Figur bezeichnet durch A, B, bilden nun mit P jedesmal ein gleichseitiges Dreieck. Wir haben also

I. Für die Parabel

a) wenn der Brennpunkt ein Eckpunkt dieses Dreiecks PAB ist:

$$x = p\left(\frac{7}{4} \pm \sqrt{3}\right) \quad \text{und} \quad y = p\sqrt{\frac{7}{4} \pm \sqrt{3}}.$$

Die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks mit S bezeichnet, ist

$$S = 2p\sqrt{\frac{7}{4} \pm \sqrt{3}}$$

Wir erhalten also vom Brennpunkt aus zwei gleichseitige Dreiecke über den Seiten

$$S = 2p\sqrt{\frac{7}{4} + \sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad = p.3{,}705$$

$$\text{und} = 2p\sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad = p.0{,}027.$$ Siehe Fig. 12.

b) wenn der Scheitelpunkt ein Eckpunkt ist.

$$x = 3p, \quad y = p\sqrt{3}, \quad S = 2p\sqrt{3}$$
oder $= p.3{,}464$. Siehe Fig. 12.

c) wenn der Anfangspunkt ein Eckpunkt ist.

$$x = \frac{p}{4}(5 \pm \sqrt{24}), \quad y = \frac{p}{2}\sqrt{5 \pm \sqrt{24}},$$

$$S = p\sqrt{5 \pm \sqrt{24}}.$$

Wir haben also wiederum zwei Dreiecke:

$$S = p\sqrt{5 - \sqrt{24}} = p.0{,}031, \quad \text{und}$$

$$S = p\sqrt{5 + \sqrt{24}} = p.3{,}146.$$ Siehe Fig. 12.

II. Für die Ellipse,

wenn ein Eckpunkt des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks in einem der vier Scheitelpunkte liegt:

$$x = \sqrt{\frac{6ab^2}{a^2+3b^2}}, \quad y = \frac{2ab^2\sqrt{3}}{a^2+3b^2},$$
$$S = \frac{4ab^2\sqrt{3}}{a^2+3b^2}.$$

Für die Dreiecke aus den Scheitelpunkten der kleinen Achse brauchen die Werte von a und b nur vertauscht zu werden, also

$$S = \frac{4ba^2\sqrt{3}}{b^2+3a^2}.$$

Es lassen sich also von den vier Scheitelpunkten aus vier gleichseitige Dreiecke in die Ellipse einschreiben, von denen die entgegengesetzt in derselben Achse liegenden einander gleich sind.

Ist $a = b\sqrt{3}$, so wird $x = a$, $y = b$, also $S = 2b$. Die beiden Dreiecke an der grossen Achse haben also die kleine Achse gemeinschaftlich, Fig. 14. Die beiden Dreiecke an der kleinen Achse haben dann

$$S = b\sqrt{4{,}31}.$$

Ist $a > b\sqrt{3}$, so berühren sich die Dreiecke an der grossen Achse nicht, ist $a < b\sqrt{3}$, so greifen sie, wie die der kleinen Achse über einander; Fig. 13, 15.

III. Für den Kreis,

also $a = b = r$ ist für jeden Punkt der Peripherie

$$S = r\sqrt{3}.$$

IV. Für die Hyperbel,

a) wenn ein Eckpunkt des pp. Dreiecks im Mittelpunkt liegt, ist

$$S = 2b\sqrt{\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2b^2+4b^2-(a^2+b^2)}},$$

und für die gleichseitige Hyperbel, wo $a = b$,

$$S = 2a\sqrt{\frac{2-a^2}{2+a^2}}.$$

b) wenn ein Eckpunkt des pp. Dreiecks im Scheitelpunkt des Hyperbelastes liegt

$$S = \frac{2b^2}{3b^2-a^2}\sqrt{a^2(6-\sqrt{12})-6b^2}.$$

Im Falle ad a) muss $a < b\sqrt{3}$, ad b) muss $a > b\sqrt{3}$ sein, wenn ein pp. Dreieck möglich werden soll, Fig. 16, 17.

Ist $a = b\sqrt{3}$, so fallen, wenn der Eckpunkt im Mittelpunkt der Hyperbel liegt, zwei Seiten des pp. Dreiecks mit den Asymptoten zusammen und es ist

$$S = \infty.$$

V. Die gerade Linie.

Wir haben als Grundgleichung der geraden Linie

$$y = ax + b.$$

Daraus ergiebt sich als Gleichung für den geometrischen Ort

$$y_1 = (ax + b) \pm \sqrt{(x - m)^2 + ((ax + b) - n)^2} \qquad (1)$$

welche entwickelt lautet:

$$y^2 - x^2 - 2axy - 2by + x(2m + 2an) + 2bn - m^2 - n^2 = 0 \qquad (2)$$

das ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel.

Für $m = 0$, für $n = 0$ und $m = n = 0$ gehen die drei Grundgleichungen über in:

a) $y = (ax + b) \pm \sqrt{x^2(a^2 + 1) - x(2an - 2ab) + n^2 - 2nb + b^2}$.

b) $y = (ax + b) \pm \sqrt{x^2(a^2 + 1) - x(2m - 2ab) + m^2 + b^2}$.

c) $y = (ax + b) \pm \sqrt{x^2(a^2 + 1) + 2abx + b^2}$.

Von diesen 3 Gleichungen ist die Gl. c) für $b = 0$, d. i.

$$y = x(a \pm \sqrt{a^2 + 1})$$

keine Hyperbel mehr, sondern die Gleichung der geraden Linie. Geht also die gegebene Linie durch den Nullpunkt des Coordinatensystems und ist der feste Punkt eben dieser Nullpunkt, d. h. liegt der gegebene feste Punkt in der gegebenen geraden Linie, so besteht der in der Aufgabe gesuchte geometrische Ort in zwei geraden Linien, welche sich in dem gegebenen festen Punkte schneiden.

Es erübrigt noch die Coordinaten des Mittelpunkts, den Winkel, den die x Achse mit der Hyperbelachse bildet, und die Länge der letzteren für die gefundene gleichseitige Hyperbel zu berechnen.

Um nicht mit zu langen Formeln operiren zu müssen, und da man immer das Coordinatensystem auf den gegebenen festen Punkt verlegen kann, so dass $m = n = 0$ wird, nehmen wir die Gleichung c)

$$y = ax + b \pm \sqrt{x^2(a^2+1) + 2abx + b^2} \tag{3}$$

als Ausgangsgleichung für obige Operationen.

Zuvor sei bemerkt, dass unter „correspondirenden Punkten an der Hyperbel" solche verstanden werden, welche dieselben Werte der Ordinaten und Abscissen, aber mit umgekehrtem Vorzeichen besitzen. Daraus folgt, dass die Verbindungslinie zweier correspondirenden Punkte durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen und in letzterem halbirt werden muss.

Bestimmt man nun für eine beliebige Lage der Hyperbel die Maxima und Minima, so sind diese correspondirende Punkte. Aus

$$\frac{dy}{dx} = a \pm \frac{2x(a^2+1) + 2ab}{2\sqrt{x^2(a^2+1) + 2abx + b^2}} = 0$$

ergiebt sich:

$$x = -\frac{ab}{a^2+1} \pm \frac{ab}{a^2+1} = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{2ab}{a^2+1} \end{cases}.$$

Den Wert $x = -\dfrac{2ab}{a^2+1}$ in die Gleichung (7) eingesetzt, giebt:

$$y = -\frac{2a^2b}{a^2+1} + b \pm b$$

oder:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{2a^2b}{a^2+1} \\ +\dfrac{2b}{a^2+1} \end{cases}$$

Für $x = 0$ wird $y = \begin{cases} +2b \\ \pm 0. \end{cases}$

Wir haben demnach als Maximum und Minimum und correspondirende Punkte die durch die Abscissen und Ordinaten

$$x = 0,\ y = 0 \text{ und } x = -\frac{2ab}{a^2+1} \quad y = +\frac{2b}{a^2+1}$$

bestimmten; siehe Fig. 2.

Da der Mittelpunkt der Hyperbel die Verbindungslinie beider Punkte halbirt, so hat derselbe zur Abscisse und Ordinate die Hälfte der Werte, als der Minimalpunkt, nämlich

$$x = -\frac{ab}{a^2+1}, \quad y = +\frac{b}{a^2+1}.$$

Verlegen wir das Coordinatensystem nach dem Mittelpunk der Hyperbel, so müssen wir in Gleichung (3) statt x

$$x-\frac{ab}{a^2+1}$$

und statt y

$$y+\frac{b}{a^2+1}$$

setzen. Wir bringen zuerst Gleichung (3) auf den Ausdruck:

$$y^2-x^2-2axy-2by=0,$$

und erhalten dann:

$$\left(y+\frac{b}{a^2+1}\right)^2-\left(x-\frac{ab}{a^2+1}\right)^2-2a\left(x-\frac{ab}{a^2+1}\right)\cdot\left(y+\frac{b}{a^2+1}\right)$$
$$-2b\left(y+\frac{b}{a^2+1}\right)=0 \qquad (4)$$

Aufgelöst und gehoben, geht die Gleichung (4) über in

$$y^2-x^2-2axy-\frac{b^2}{a^2+1}=0 \qquad (5)$$

Wir haben nun zunächst den Winkel zu berechnen, um den das Coordinatensystem gedreht werden muss, damit die y Axe mit der grossen Axe der Hyperbel zusammenfällt. Wir haben zu dem Zweck in Gleichung (5) zu setzen:

$$y=t\sin\vartheta+u\cos\vartheta,$$
$$x=t\cos\vartheta-u\sin\vartheta.$$

Wir haben dann:

$$(t\sin\vartheta+u\cos\vartheta)^2-(t\cos\vartheta-u\sin\vartheta)^2-2a(t\sin\vartheta+u\cos\vartheta).(t\cos\vartheta-u\sin\vartheta)$$
$$-\frac{b^2}{a^2+1}=0.$$

Aufgelöst und die Gleichartigen zusammengezogen, giebt

$$t^2(\sin^2\vartheta-\cos^2\vartheta-a\sin2\vartheta)+u^2(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta+a\sin2\vartheta)$$
$$+ut.(2\sin2\vartheta-2a\cos^2\vartheta+2a\sin^2\vartheta)-\frac{b^2}{a^2+1}=0 \qquad (6)$$

In dieser Gleichung (6) muss

$$ut(2\sin2\vartheta-2a\cos^2\vartheta+2a\sin^2\vartheta)=0$$

werden, und da es $2ut$ nicht werden kann, so muss

$$\sin2\vartheta-a(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)=0$$

werden, woraus:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = a = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{2}.$$

Drehen wir also das Coordinatensystems um die Hälfte des Winkels, den die ursprünglich gegebene gerade Linie mit ihrer x Axe machte (siehe Fig. 2) so fällt die y Axe mit der grossen Axe der Hyperbel zusammen.

Setzen wir $\frac{\alpha}{2}$ statt ϑ in die Gleichung (6) ein, so erhalten wir:

$$u^2 - t^2 = \frac{b^2}{a^2+1} \cdot \cos \alpha \tag{7}$$

$$= b^2 \cos^3 \alpha = \frac{b^2}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir die Länge der Axen, wenn für $y = 0$ der Wert von x entwickelt wird, woraus

$$x = b(\cos \alpha)^{\frac{3}{2}}$$

$$x^2 = \pm \sqrt{\frac{b^2}{\sqrt{a^2+1} \cdot (a^2+1)}} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{\sqrt{(a^2+1)^3}}}$$

Die Länge der Axe von einem Scheitelpunkt der Hyperbel zum andern, ist also $= \frac{2b}{(a^2+1)^{\frac{3}{4}}}$.

Daraus folgt nachstehender Satz:

Wenn man von einem beliebigen festen Punkte in der x Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems nach allen Punkten der y Axe Verbindungslinien zieht, und aus den Punkten der y Axe Parallelen mit der x Axe gleich den entsprechenden Verbindungslinien, so bilden die Endpunkte dieser Parallelen eine gleichseitige Hyperbel, deren Axe ($2a$) gleich der doppelten Entfernung des gegebenen festen Punktes von dem Schnittpunkt des Coordinatensystems ist; siehe Fig. 3.

Ausgenommen von der Wahl der Punkte ist der Schnittpunkt der Coordinaten, welcher nach demselben Verfahren die Asymptoten zu der gleichseitigen Hyperbel liefert.

Magdeburg, im Sommer 1872.

XIX.

Ueber Harmonikalen im Dreieck.

Von

Emil Hain.

I.

Ist p_a die Normale eines Punktes P auf die Seite a des Dreieckes ABC, so ist die Gleichung von PA

$$\frac{x_b}{p_b} - \frac{x_c}{p_c} = 0$$

wo x_b, x_c den Normalen irgend eines Punktes der PA auf die Seiten b und c proportional sind. Die Gerade PA trifft BC in A'. Die Gleichung von $B'C'$ ist dann:

$$\frac{x_b}{p_b} + \frac{x_c}{p_c} - \frac{x_a}{p_a} = 0$$

denn sie geht durch den Punkt B', den Schnittpunkt der PB und AC, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{x_c}{p_c} - \frac{x_a}{p_a} = 0, \quad x_b = 0$$

und durch den Punkt C', den Schnittpunkt der Geraden

$$\frac{x_a}{p_a} - \frac{x_b}{p_b} = 0, \quad x_c = 0$$

Die $B'C'$ schneidet BC in einem Punkt A_1, dessen Gleichungen sind:

$$\frac{x_b}{p_b}+\frac{x_c}{p_c}-\frac{x_a}{p_a}=0, \quad x_a=0$$

woraus folgt, dass A_1 ein Punkt der Geraden

$$\frac{x_a}{p_a}+\frac{x_b}{p_b}+\frac{x_c}{p_c}=0$$

ist. Zugleich liegen in dieser Geraden auch die Punkte B_1, C_1. Weil nun die Punktreihe $A_1A'BC$ harmonisch ist, so nennt man diese Gerade die Harmonikale des Punktes P. Ist nun P ein Symmetriepunkt des Dreieckes, so ist seine Harmonikale eine Symmetriegerade des Dreieckes. Fällt z. B. P mit dem Schwerpunkt zusammen, so ist dessen Harmonikale die unendlich entfernte Gerade in der Ebene des Dreieckes.

II.

Die Entfernung des Höhenpunktes von seiner Harmonikalen ist zu bestimmen.

Hier ist $p_a = 2r\cos\beta\cos\gamma$, wenn α, β, γ die Winkel und r den Umkreisradius des Dreieckes bezeichnen. Demzufolge ist die Gleichung der Harmonikalen des Höhenpunktes:

$$\Sigma x_a \cos\alpha = 0$$

Nun ist nach den Formeln für trimetrische Coordinaten der Abstand des Punktes x_a' von der Geraden:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

gegeben durch:

$$\frac{\Sigma a_1 x_a'}{\sqrt{\Sigma a_1^2 - 2\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma}}$$

Hier ist:

$$\Sigma a_1 x_a' = \Sigma \cos\alpha . 2r\cos\beta\cos\gamma = 6r\Pi\cos\alpha$$
$$\Sigma a_1^2 = \Sigma \cos\alpha^2 = 1 - 2\Pi\cos\alpha$$
$$2\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma = 6\Pi\cos\alpha$$

Die zu bestimmende Entfernung hat demnach zum Ausdruck:

$$\frac{6\Pi\cos\alpha}{\sqrt{1-8\Pi\cos\alpha}}.r = \frac{3\Phi}{\sqrt{F(F-4\Phi)}}.r$$

wo F den Flächeninhalt des Urdreieckes und Φ den seines Höhenfusspunktdreieckes bezeichnet.

III.

Die Harmonikale des Inkreiscentrums steht senkrecht auf der Centrale des In- und Umkreises.

Für das Inkreiscentrum J hat man $p_a = \varrho$. Die Harmonikale von J hat also die Gleichung: $\Sigma x_a = 0$.

Die Normale des Umkreiscentrums U auf a ist $r \cos\alpha$.

Die Verbindungsgerade zweier Punkte $\xi_a \xi_a'$ hat die Gleichung:

$$\Sigma x_a (\xi_b \xi_c' - \xi_c \xi_b') = 0$$

Somit ist:

$$UJ \equiv \Sigma x_a (\cos\beta - \cos\gamma) = 0$$

Sollen nun zwei Gerade

$$\Sigma a_1 x_a = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma a_2 x_a = 0$$

einander senkrecht schneiden, so muss sein:

$$\Sigma a_1 a_2 = \Sigma (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos\gamma$$

Hier ist:

$$\Sigma a_1 a_2 = \Sigma (\cos\beta - \cos\gamma) = 0$$
$$\Sigma (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos\gamma = \Sigma (\cos\beta - \cos\alpha) \cos\gamma = 0$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

IV.

Das Rechteck aus dem Perpendikel vom Inkreiscentrum auf seine Harmonikale und dem Abstande der In- und Umkreiscentra ist dreimal so gross als das Rechteck aus In- und Umkreisradius.

Ist e das Perpendikel von J auf seine Harmonikale, so ist nach der in II. gebrauchten Formel:

$$e = \frac{\Sigma a_1 x_a'}{\sqrt{\Sigma a_1^2 - 2\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma}}$$

Hier ist:

$$a_1 = 1, \quad x_a' = \varrho, \quad \Sigma a_1 x_a' = 3\varrho$$

$$\Sigma a_1^2 - 2\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma = 3 - 2\Sigma \cos\alpha = 3 - 2\left(\frac{r+\varrho}{r}\right) = \frac{r - 2\varrho}{r}$$

Also:

$$e = 3\varrho\sqrt{\frac{r}{r-2\varrho}} = \frac{3r\varrho}{\sqrt{r^2-2r\varrho}}$$

und

$$e\sqrt{r^2-2r\varrho} = 3r\varrho$$

V.

Es ist der Flächeninhalt des Dreieckes zu bestimmen, das von den Harmonikalen des In- und Umkreiscentrums und des Höhenpunktes gebildet wird.

Die gesuchte Fläche sei Ψ. Die Gleichungen der drei Harmonikalen sind:

$$\Sigma x_a = \Sigma x_a \cos\alpha = \Sigma x_a \cos\beta\cos\gamma = 0$$

Das von den drei Geraden:

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = 0$$

gebildete Dreieck hat zum Flächeninhalte den Ausdruck:

$$\frac{8rF^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}}$$

Sind ferner $x_{aa}\, x_{ba}\, x_{ca}$ bzhw. die Normalen von A', B', C' auf a, so ist:

$$\triangle A'B'C' = \frac{r}{2F}\begin{vmatrix} x_{aa} & x_{ab} & x_{ac} \\ x_{ba} & x_{bb} & x_{bc} \\ x_{ca} & x_{cb} & x_{cc} \end{vmatrix}$$

Demzufolge ist:

$$\Psi = \frac{8rF^2 D^2}{D_1 D_2 D_3}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Nun ist:

$$\triangle\, JUH = \frac{r}{2F} \begin{vmatrix} \varrho & \varrho & \varrho \\ r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma \\ 2r\cos\beta\cos\gamma & 2r\cos\gamma\cos\alpha & 2r\cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix}$$

also

$$D = \frac{F}{r^3\varrho} \triangle\, JUH$$

Aehnlich lassen sich $D_1\, D_2\, D_3$ ausdrücken, wenn wir den Punkt, dessen Coordinaten abc sind, berücksichtigen. Es ist dies der von Grebe (Archiv IX.) untersuchte Punkt. Bezeichnen wir ihn mit G, so ist, weil für ihn

$$p_a = \frac{2aF}{\Sigma a^2},$$

$$\triangle\, JUG = \frac{r}{2F} \begin{vmatrix} \varrho & \varrho & \varrho \\ r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma \\ \frac{2aF}{\Sigma a^2} & \frac{2bF}{\Sigma a^2} & \frac{2cF}{\Sigma a^2} \end{vmatrix} = \frac{r^2\varrho}{\Sigma a^2} D_1$$

$$\triangle\, UHG = \frac{r}{2F} \begin{vmatrix} r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma \\ 2r\cos\beta\cos\gamma & 2r\cos\gamma\cos\alpha & 2r\cos\alpha\cos\beta \\ \frac{2aF}{\Sigma a^2} & \frac{2bF}{\Sigma a^2} & \frac{2cF}{\Sigma a^2} \end{vmatrix} = \frac{2r^3}{\Sigma a^2} D_2$$

$$\triangle\, HJG = \frac{r}{2F} \begin{vmatrix} 2r\cos\beta\cos\gamma & 2r\cos\gamma\cos\alpha & 2r\cos\alpha\cos\beta \\ \varrho & \varrho & \varrho \\ \frac{2aF}{\Sigma a^2} & \frac{2bF}{\Sigma a^2} & \frac{2cF}{\Sigma a^2} \end{vmatrix} = \frac{2r^2\varrho}{\Sigma a^2} D_3$$

Also ist:

$$D_1 = \frac{\Sigma a^2}{r^2 \varrho} \triangle JUG$$

$$D_2 = \frac{\Sigma a^2}{2r^3} \triangle UHG$$

$$D_3 = \frac{\Sigma a^2}{2r^2 \varrho} \triangle HJG$$

Nach Substituirung dieser Werte erhalten wir dann:

$$\Psi = \frac{2a^2b^2c^2}{(\Sigma a^2)^3} \frac{[\triangle ABC . \triangle JUH]^2}{\triangle JUG . \triangle UHG . \triangle HJG}.$$

Wien, den 2. November 1874.

XX.

Verschiedene Sätze über das Dreieck.

Von

Emil Hain.

I.

Das Dreieck aus den Mitten der Höhen eines Dreieckes hat zum Flächeninhalt den Ausdruck:

$$F.\frac{\Sigma a^2 - 8r^2}{16r^2},$$

wo a, b, c, r, F Seiten, Umkreisradius und Flächeninhalt des Urdreieckes bezeichnen.

Ist H_a die Mitte der Höhe auf a, α der Gegenwinkel dieser Seite und sind die Normalen von H_a auf a, b, c beziehungsweise x_{aa}, x_{ab}, x_{ac}, so findet man:

$$x_{aa} = \frac{F}{a}, \quad x_{ab} = \frac{F}{a}\cos\gamma, \quad x_{ac} = \frac{F}{a}\cos\beta.$$

Nach den Formeln für trimetrische Coordinaten ergiebt sich dann:

$$\Delta H_a H_b H_c = \frac{abc}{8F^2}\begin{vmatrix} x_{aa} & x_{ab} & x_{ac} \\ x_{ba} & x_{bb} & x_{bc} \\ x_{ca} & x_{cb} & x_{cc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{F}{8}\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{F}{8}(1 + 2\,\Pi\cos\alpha - \Sigma\cos\alpha^2)$$

Weil nun

$$\Sigma \cos\alpha^2 + 2\,\Pi\cos\alpha = 1 \quad \text{und}$$

$$\Sigma\cos\alpha^2 = 3 - \Sigma\sin\alpha^2 = \frac{\Sigma a^2 - 8r^2}{4r^2}$$

so ist also:

$$\Delta H_a H_b H_c = F.\frac{\Sigma a^2 - 8r^2}{4r^2} = \frac{F}{2}.\,\Pi\cos\alpha$$

woraus sich auch der Satz ergiebt:

Das Dreieck aus den Mitten der Höhen eines Dreieckes ist viermal kleiner als das Höhenfusspunktdreieck des Urdreieckes.

II.

Verbindet man die Mitte einer jeden Dreieckseite mit der Mitte der zugehörigen Höhe, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte.

Ist A' die Mitte der Seite a und sind p_{aa}, p_{ab}, p_{ac} die Normalen von A' auf a, b, c; so erhält man:

$$p_{aa} = 0, \quad p_{ab} = \frac{F}{b}, \quad p_{ac} = \frac{F}{c}.$$

Die Normalen von H_a, der Mitte der Höhe auf a, seien p_{aa}', p_{ab}' p_{ac}'. Die Gleichung der $A'H_a$ in trimetrischen Coordinaten ist dann:

$$\Sigma x_a(p_{ab}p_{ac}' - p_{ac}p_{ab}') =$$
$$(c\cos\beta - b\cos\gamma)x_a + bx_b - cx_c = 0$$

Wir haben also:

$$A'H_a \equiv \left(\frac{c^2-b^2}{a}\right)x_a + bx_b - cx_c$$

$$B'H_b \equiv -ax_a + \left(\frac{a^2-c^2}{b}\right)x_b + cx_c$$

$$C'H_c \equiv +ax_a - bx_b + \left(\frac{b^2-a^2}{c}\right)x_c$$

Man hat aber für den Flächeninhalt Φ des von drei Geraden

$$a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c = 0$$
$$a_2x_a + b_2x_b + c_2x_c = 0$$
$$a_3x_a + b_3x_b + c_3x_c = 0$$

gebildeten Dreieckes den Ausdruck:

$$\Phi = \frac{2abcF \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}}$$

In unserem Fall ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c^2-b^2}{a}, & +b, & -c \\ -a, & \frac{a^2-c^2}{b} & +c \\ +a, & -b, & \frac{b^2-a^2}{c} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c^2-b^2}{a}, & +b, & -c \\ -a, & \frac{a^2-c^2}{b}, & +c \\ +a, & +b & +c \end{vmatrix} = \frac{c}{ab}(a^4+b^4-c^4)$$

Verschwindet eine der Determinanten des Nenners im Ausdruck Φ; so zeigt dies, dass zwei der Geraden $A'H_a$ einander parallel sind. Für den möglichen Fall also, dass die Summe der Biquadraten zweier Dreieckseiten gleich ist dem Biquadrat der dritten Seite, wird Φ nicht Null und es erleidet die aufgestellte Behauptung in dieser Beziehung die angedeutete Modification.

III.

Wird jede der Seiten eines Dreieckes in drei gleiche Teile geteilt und jeder Teilungspunkt mit der Gegenecke verbunden, so bilden diese Transversalen ein Sechseck, dessen Seiten ihnen proportional sind, und in welchem sich die Verbindungsgeraden der Gegenecken in einem Punkte schneiden.

Auf den Seiten eines Dreieckes ABC liegen der Reihe nach die Punkte:

$$\begin{matrix} B & A_c & A_b & C \\ C & B_a & B_c & A \\ A & C_b & C_a & B \end{matrix}$$

und zwar so, dass:

$$BA_c = A_c A_b = A_b C = \frac{a}{3}$$

$$CB_a = B_a B_c = B_c A = \frac{b}{3}$$

$$AC_b = C_b C_a = C_a B = \frac{c}{3}.$$

Der Durchschnitt von BB_c und CC_b werde mit A_1 der von BB_a und CC_a mit A_2 bezeichnet. Wir haben dann das Sechseck $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$, für welches die obige Behauptung zu erweisen ist.

Zunächst wollen wir zeigen, dass sich die Geraden $A_1 A_2$ in einem Punkt treffen.

Es sei:

$$\text{Winkel } BAA_1 = \delta, \quad CAA_1 = \varepsilon, \quad AA_1 = x$$

so ist:

$$\Delta BAA_1 + \Delta B_c AA_1 = \Delta BAB_c$$
$$\Delta C_b AA_1 + \Delta CAA_1 = \Delta CAC_b$$

woraus folgt:

$$cx \sin\delta + \frac{b}{3} x \sin\varepsilon = \frac{c}{3} x \sin\delta + bx \sin\varepsilon$$

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = \frac{b}{c}$$

d. h. die Geraden AA_1 schneiden sich in einem Punkt.

Betrachten wir nun den Schnittpunkt A_2 der Transversalen BB_a CC_a und setzen wir:

$$\text{Winkel } BAA_2 = \delta', \quad CAA_2 = \varepsilon', \quad AA_2 = y$$

so erhalten wir:

$$\Delta BAA_2 + \Delta B_a AA_2 = \Delta BAB_a$$
$$\Delta C_a AA_2 + \Delta CAA_2 = \Delta CAC_a$$

$$cy \sin\delta' + \frac{2b}{3} y \sin\varepsilon' = \frac{2}{3} cy \sin\delta' + by \sin\varepsilon'$$

$$\frac{\sin\delta'}{\sin\varepsilon'} = \frac{b}{c}$$

weshalb sich auch die Geraden AA_2 in einem Punkt schneiden. Nun ist aber

$$\delta+\varepsilon=\delta'+\varepsilon',\quad \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}=\frac{\sin\delta'}{\sin\varepsilon'}$$

also auch:

$$\delta=\delta',\quad \varepsilon=\varepsilon'$$

Es treffen sich demnach auch die Geraden A_1A_2 in einem Punkt.

Um nun den andern Teil des aufgestellten Satzes zu beweisen, betrachten wir zuerst das Dreieck ABC mit den Transversalen BB_c und CC_b, die sich in A_1 treffen.

Weil $\Delta A_1BC \sim \Delta A_1B_cC_b$, so gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{A_1B_c}{A_1B}=\frac{1}{3}=\frac{A_1C_b}{A_1C}$$

$$\frac{A_1B_c}{BB_c}=\frac{1}{4}=\frac{A_1C_b}{CC_b}$$

$$\frac{A_1B}{BB_c}=\frac{3}{4}=\frac{A_1C}{CC_b}$$

oder:

$$A_1B_c=\tfrac{1}{4}BB_c,\quad A_1B=\tfrac{3}{4}BB_c$$

$$A_1C_b=\tfrac{1}{4}CC_b,\quad A_1C=\tfrac{3}{4}CC_b.$$

Ziehen wir nun im Dreieck ABC die Transversalen BB_a und CC_a mit ihrem Schnittpunkt A_2, so ergibt sich in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke A_2BC und $A_2B_aC_a$:

$$\frac{A_2B_a}{A_2B}=\frac{2}{3}=\frac{A_2C_a}{A_2C}$$

$$\frac{A_2B_a}{BB_a}=\frac{2}{5}=\frac{A_2C_a}{CC_a}$$

$$\frac{A_2B}{BB_a}=\frac{3}{5}=\frac{A_2C}{CC_a}$$

oder:

$$A_2B_a=\tfrac{2}{5}BB_a,\quad A_2B=\tfrac{3}{5}BB_a$$

$$A_2C_a=\tfrac{2}{5}CC_a,\quad A_2C=\tfrac{3}{5}CC_a$$

Die Transversalen CC_a und BB_a schneiden sich in A_2, CC_a und AA_c in B_1.

Somit ist:

$$A_2B_1=B_1C-A_2C$$

Weil aber

$$B_1C=\tfrac{3}{4}CC_a,\quad A_2C=\tfrac{3}{5}CC_a$$

so erhalten wir schliesslich:

$$A_2B_1=\tfrac{3}{4}CC_a-\tfrac{3}{5}CC_a=\tfrac{3}{20}CC_a.$$

Wien den 8. October 1874.

XXI.

Miscellen.

1.

Aufgabe über berührende Kreise.

Gegeben sei ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$. Aus den Ecken als Mittelpunkten beschreibe man Kreise, welche sich wechselseitig berühren.

Die Seite $\overline{A_1 A_2}$ des Dreieckes bezeichnen wir kurz a_3, ebenso $\overline{A_2 A_3} = a_1$, $\overline{A_3 A_1} = a_2$. Die Halbmesser der gesuchten Kreise r_1, r_2, r_3; nach der Bedingung ist

$$r_1 + c_2 r_2 = a_3$$
$$r_2 + c_3 r_3 = a_1$$
$$r_3 + c_1 r_1 = a_2$$

wo $c = \pm 1$, je nachdem sich die Kreise von aussen oder von innen berühren. Es ist klar, dass entweder alle c positiv sein müssen oder eins positiv und die übrigen negativ, woraus vier Lösungen sich ergeben.

Da stets unter unser Annahme

$$\begin{vmatrix} 1 & c_2 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ c_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

ist, so ist

$$r_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_3 & c_2 & 0 \\ a_1 & 1 & c_3 \\ a_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & c_3 \\ c_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad r_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & c_2 & a_3 \\ 0 & 1 & a_1 \\ c_1 & 0 & a_2 \end{vmatrix}$$

Sind alle c positiv, so ergiebt sich uns der bekannte Ausdruck

$$r_1 = \frac{a_3 + a_2 - a_1}{2}$$

aus welchem die Weite für r_2 und r_3 durch cyklische Vertauschung des Indices sich ergeben. Karl Zahradnik.

2.

Beispiel einer einseitigen Fläche.

Die ebene Curve, welche bei Variation von u ein Punkt mit den rechtwinkligen Coordinaten

$$\varrho = a + b\cos u$$
$$z = \sin u\,\{c\cos v - (d + e\cos u)\sin v\}$$

erzeugt, verändert sich mit v periodisch derart, dass, nachdem v ein Intervall $= \pi$ durchlaufen hat, die Endcurve wieder in die Anfangscurve fällt, während ihre Aussen- und Innenseite sich vertauscht haben. Lässt man also die Curve um eine beliebige Axe rotiren, so dass sie gleichzeitig mit jener Variation eine Umdrehung vollendet, so erzeugt sie eine Fläche, deren beide Seiten stetig in einander übergehen, also eine einzige Flächenseite bilden. Es würde leicht sein, diese Fläche noch auf mannichfache Weise zu verallgemeinern. Wir wollen statt dessen nur ihren einfachsten Fall betrachten, wo $a = d = 0$, $b = c = e = 1$, die z Axe Rotationsaxe, und die Rotationsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit von $2v$ ist. Dann sind die Gleichungen der Fläche:

$$x = \cos u\cos 2v\,; \quad y = \cos u\sin 2v\,; \quad z = \sin u\,(\cos v - \cos u\sin v)$$

Sind p, q, r die Richtungscosinus der Normale, $t\,\partial u\,\partial v$ das Flächenelement, so findet man:

$$pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{cases} 2(\sin^2 v - \cos^2 u\cos^2 v)\cos v \\ + 2(\cos^2 v - \cos^2 u\sin^2 v - \sin^2 u\cos 2v)\cos u\sin v \end{cases}$$

$$qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{cases} [\sin^2 u - 2(1 + \cos^2 u)\cos^2 v]\sin v \\ -[\sin^2 u + 2(1 - 3\cos^2 u)\sin^2 v]\cos u\cos v \end{cases}$$

$$rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -2\sin u\cos u$$

Diese Ausdrücke wechseln bei Substitution von $-u$, $v + \pi$ für u, v ihre Vorzeichen, während die von x, y, z unverändert bleiben, also geht in jedem Punkte der Fläche die Normalenrichtung in die ent-

gegengesetzte über. Es kann sich nur noch fragen, ob die Normale, um dahin zu gelangen, einen Punkt der Unstetigkeit überschreiten muss. Sie kann nur unstetig oder unbestimmt werden für $t = 0$. Hier wird $rt = 0$, also u eine ganze Anzahl Rechte. Dieser entsprechend findet man:

$u =$	$pt =$	$qt =$
$\left.\begin{matrix}0\\ \pi\end{matrix}\right\}$	$-2\sqrt{2}\cos 2v\cos\left(v \pm \frac{\pi}{4}\right)$	$-2\sqrt{2}\sin 2v\cos\left(v \pm \frac{\pi}{4}\right)$
$\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}\pi\\ \frac{3}{2}\pi\end{matrix}\right\}$	$\sin 2v \sin v$	$-\cos 2v \sin v$

Demnach verschwindet t für

$$\left.\begin{matrix} u = 0; & v = \frac{1}{4}\pi \\ u = \pi; & v = \frac{3}{4}\pi \end{matrix}\right\} \quad x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0$$

$$\left.\begin{matrix} u = \frac{1}{2}\pi; & v = 0 \\ u = \frac{3}{2}\pi; & v = 0 \end{matrix}\right\} \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm 1$$

also nur in einem Doppelpunkt und in 2 symmetrisch auf der z Axe liegenden Punkten. Auf jedem Wege, der diese 3 Punkte vermeidet, geht die Normale stetig in die entgegengesetzte über, wofern nur dabei v um π wächst oder abnimmt.

Was zunächst die Erzeugende

$$\varrho = \cos u; \quad z = \sin u(\cos v - \cos u \sin v)$$

betrifft, so ist sie immer symmetrisch zur ϱ Axe, und, wenn v von 0 an wächst, anfangs ein Kreis; dann krümmt sie sich stärker bei $u = 0$, erlangt für $v = \arcsin\sqrt{\frac{1}{5}}$ Punkte der Nullkrümmung bei $u = \pm\frac{1}{2}\pi$, aus denen weiterhin je 2 Wendepunkte hervorgehen, bestimmt durch die kubische Gleichung

$$2\cos^3 u - 3\cos u + \cot v = 0$$

deren eine Wurzel immer > 1 ist. Sobald v den Wert $\frac{1}{4}\pi$ erreicht, trifft der eine Wendepunkt mit seinem Gegenpunkt in $u = 0$ zusammen und wird hier ein Rückkehrpunkt. Wächst v weiter, so entwickelt sich daraus eine Schlinge, die beständig wächst und für $v = \frac{1}{2}\pi$ dem andern Teile der Curve congruent wird, so dass die ganze die Form 8 hat. Von da an vertauschen die beiden Teile der Curve ihre Phasen und durchlaufen sie umgekehrt. Der Abstand beider Scheitel vom Anfangspunkt bleibt beständig $= 1$.

Hieraus folgt für die Fläche, dass sie von den Ebenen der xy und yz symmetrisch geteilt wird. Die Schnitte beider sind Doppellinien, der der erstern ein Kreis vom Radius 1 um den Anfangspunkt

in welchem sich die Fläche selbst berührt, der der letztern die obengenannte Curve mit dem Rückkehrpunkt, in welcher sich die Fläche schneidet. Im voraus bekannt ist ferner die Doppellinie, welche der Knoten der Doppelschlinge in der xy Ebene beschreiben muss. Um überhaupt alle Doppellinien zu finden, suchen wir die Wertsysteme (uv), $(u_1 v_1)$, denen gleiche x, y, z entsprechen. Für diese muss sein

$$x^2 + y^2 = \cos^2 u = \cos^2 u_1; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2v = \operatorname{tg} 2v_1$$

wofern nicht x und y null sind. Dem genügen die Werte:

$$u_1 = u, \quad \pi - u, \quad \pi + u, \quad 2\pi - u$$

$$v_1 = v, \quad v - \frac{\pi}{2}, \quad v + \frac{\pi}{2}$$

Mit Rücksicht auf die Vorzeichen von x und y lassen sich diese nur folgendermassen combiniren:

$$u_1 = \pi \pm u; \quad v_1 = v \pm \frac{\pi}{2}$$

$$u_1 = 2\pi - u; \quad v_1 = v$$

ohne Beziehung der Doppelzeichen. Das Doppelzeichen vor u kann nur 2 entgegengesetzten z, also 2 identischen oder symmetrischen Curven entsprechen; nehmen wir daher nur das untere Zeichen. Dem entspricht

$$\begin{aligned} z &= \sin u(\cos v - \cos u \sin v) \text{ im ersten Falle} \\ &= \sin u(\mp \sin v \pm \cos u \cos v) \text{ im letzten Falle} \\ &= -\sin u(\cos v - \cos u \sin v) \end{aligned}$$

das ist entweder:

$$\sin u = 0$$

oder beziehungsweise:

$$(\cos v \pm \sin v)(1 \mp \cos u) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\cos v - \cos u \sin v = 0$$

Die Doppellinien werden demnach gebildet

1) von den 2 identischen Kreisen $u = 0$ und $u = \pi$ in der xy Ebene;

2) von den 2 identischen Curven $v = \frac{\pi}{4}$ und $v = \frac{3\pi}{4}$ in der yz Ebene;

3) vom geometrischen Orte des Knotens der Erzeugenden $\cos u = \cot v$ in der xy Ebene.

Hierzu kommt noch 4) die z Axe, weil für $x=0$, $y=0$, v unbestimmt bleibt.

Die zweite dieser Doppellinien, deren Gleichungen sind

$$x=0;\quad y=\cos u;\quad z=\sqrt{2}\sin u\sin^2\frac{u}{2}$$

oder

$$x=0;\quad (1+y)(1-y)^3=2z^2$$

dargestellt in Fig. 2., hat bei $u=0$ einen Rückkehrpunkt A, und bei $u=\pm\arcsin(2^{-\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}})$ zwei symmetrische Wendepunkte E, E'. Sie umschliesst einen Flächenraum gleich einer Kreisfläche vom Radius $2^{-\frac{1}{4}}$. Ihre Länge ist elliptisches Integral.

Die dritte Doppellinie, deren Gleichungen sind

$$x=\cot v\cos 2v;\quad y=2\cos^2 v;\quad z=0$$

oder

$$x^2=\frac{y}{2-y}(1-y)^2;\quad z=0$$

dargestellt in Fig. 1., besteht aus einer Schleife $AFOF'$, die bei $v=\frac{1}{2}\pi$, d. i. im Anfangspunkte O, die x Axe berührt, sich selbst bei $v=\frac{1}{4}\pi$, d. i. in A bei $y=1$, rechtwinklig schneidet, der Gleichung gemäss über diesen Punkt hinaus sich in 2 Armen ins unendliche erstrecken und die Gerade $y=2$ zur Asymptote haben würde, eine Fortsetzung jedoch, die nicht zur Fläche gehört. Der Flächeninhalt der Schleife ist $=\frac{1}{2}(\pi-1)$. Der Bogen ist elliptisches Integral 1. und 2. Gattung für den Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$, die Länge der ganzen Schleife

$$=2\sqrt{2}(K-E+1)+2\log(\sqrt{2}-1)$$

Fig. 1. stellt die Fläche projicirt auf die xy Ebene dar. Sie wird von dem Doppelkreise 1) umschlossen, innerhalb dessen 4 Blätter über einander liegen. Die mittelsten vertauschen sich in der Doppellinie $AFOF'$, die 2 Paar äussern in der Doppellinie 2) deren Spur AOB ist.

Die Fläche besteht aus Teilen von verschiedenem Vorzeichen des Krümmungsmasses. Bezeichnet K das Product der Hauptkrümmungen, so findet man:

$$\frac{Kt^4}{2\cos^2 v}=-1+2\cos^2 u+3\cos^4 u+(1-15\cos^2 u+6\cos^4 u)\cos^3 u\,\mathrm{tg}\,v$$
$$-(15-36\cos^2 u+17\cos^4 u)\cos^4 u\,\mathrm{tg}^2 v$$

Hiernach verschwindet K für 2 Werte von $\mathrm{tg}\,v$, wenn

$$\sin^2 u(60-205\cos^2 u+\cos^4 u+60\cos^6 u+36\cos^8 u)<0$$

ist. Die Klammer verschwindet nur für einen Wert von $\cos^2 u$ zwischen 0 und 1, nämlich

$$\cos^2 u = \cos^2 u_0 = 0{,}3027245$$
$$u_0 = 0{,}629100 \text{ Rechten}$$

und ist negativ für

$$-u_0 < u < u_0 \quad \text{und} \quad \pi - u_0 < u < \pi + u_0$$

Beide Intervalle entsprechen nur 2 symmetrischen Phasen. Innerhalb eines jeden stellt die Gleichung $K = 0$ eine Curve dar, welche das ungleichartig gekrümmte Areal der Fläche umschliesst. Solcher Areale giebt es 4, die in Bezug auf die Ebenen der yz und der xy symmetrisch sind. Die gemeinsame Projection zweier von ihnen ist in Fig. 1. umgrenzt von der Curve $AGHJ$ verzeichnet. Das Stück AGH gehört der äussern, das Stück AJH der innern Fläche an. Klappt man dies ebene Flächenstück um die y Axe um, so erhält man die Projection $AG'HJ'$ der beiden andern Areale, so dass die Areale $AJ'H$ zwischen den Arealen AGH, und die Areale AJH zwischen den Arealen $AG'H$ liegen. Die Durchschnitte der Curve $K = 0$ mit den Coordinatenebenen sind bestimmt:

G durch $\cos u = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad v = 0, \quad x = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$

A durch $u = 0, \quad v = \dfrac{\pi}{4}, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0$

J durch $\cos u = \sqrt{\dfrac{18 - \sqrt{69}}{17}}, \quad v = \dfrac{\pi}{2}, \quad x = -\sqrt{\dfrac{18 - \sqrt{69}}{17}},$

$$y = 0, \quad z = -\frac{\sqrt{19\sqrt{69} - 87}}{17}$$

H durch $u = 1{,}615$ Rechte, $v = \dfrac{3\pi}{4}, \quad x = 0, \quad y = -0{,}567, \quad z = 0{,}913$

Ist R der Radiusvector der Fläche, so hat man:

$$R^2 = \cos^2 u + \sin^2 u (\cos v - \cos u \sin v)^2$$

Das absolute Maximum von R findet statt für

$$\cos u = -\operatorname{tg} v = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

nämlich in den 4 Punkten:

$$x = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}, \qquad y = -\frac{2}{3}, \qquad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und ist

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Der Punkt A ist einer von denjenigen, wo t verschwindet, daher

ist er näher zu untersuchen. Hier werden die vollständigen Differentiale

$$\partial x = -2\partial v; \quad \partial y = 0; \quad \partial z \doteq 0$$

Solange also ∂v nicht null ist, giebt es nur eine einzige Tangentialrichtung, die der x. Sei dagegen v constant $= \frac{1}{4}\pi$; dann wird

$$\partial x = 0; \quad \partial y = -\sin u\,\partial u; \quad \partial z = \sqrt{2}\sin^2\frac{u}{2}(1+2\cos u)\partial u$$

demnach verschwindet $\frac{\partial z}{\partial y}$ in A, und man erhält als zweite Tangente die y Axe. Wenn also ein Punkt auf verschiedenen Wegen nach A rückt, so liegt die Endrichtung der Normale immer in der yz Ebene, kann aber für jeden Weg eine andre sein. Nur der Weg längs der Doppellinie $v = \frac{1}{4}\pi$ ist in anderm Falle: hier fällt die Normale schliesslich in die Ebene $y = 1$.

Um die Normale näher zu bestimmen, setzen wir $v = v_1 + \frac{1}{4}\pi$; dann geben die obigen Ausdrücke, auf die niedrigsten Potenzen von u und v_1 entwickelt:

$$pt = -4\sqrt{2}.v_1^2; \quad qt = \sqrt{2}(2v_1 - u^2); \quad rt = -2u$$

Solange u und v_1 unendlich kein gleicher Ordnung sind, fällt demnach die Normale in die yz Ebene und variirt darin mit dem Verhältniss $u:v_1$. Verschwindet v_1 gegen u, oder u gegen v_1, so geht die Normale stetig bzhw. in die Richtung der z oder der y über. Da u und v_1 über 0 hinaus variiren können, so kann die Normale, nach dem verschiedenen Wege, auf dem sie nach A gelangt, daselbst jede zur x Axe normale Richtung im ganzen Umkreise annehmen; immer aber wird sie über A hinweg stetig variiren, wofern nur das Verhältniss von $u:v_1$ stetig variirt.

Ferner sind in gleichem Falle die 2 symmetrischen Punkte

$$u = \pm\frac{\pi}{2}; \quad v = 0; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = \pm 1$$

Hier ist

$$\partial x = -\partial u; \quad \partial y = 0; \quad \partial z = 0$$

folglich giebt es auch hier, solange ∂u nicht null ist, nur eine einzige Tangente, in der x Richtung. Ist hingegen u constant $= \pm\frac{\pi}{2}$, so findet man:

$$\partial x = 0; \quad \partial y = 0; \quad \partial z = \mp \sin v\,\partial v$$

also ist die z Axe eine zweite, und zwar gemeinsame Tangente.

Zur Bestimmung der Normale seien $u_1 = \frac{\pi}{2} - u$ und v unendlich klein; dann giebt die Entwickelung:

$$pt = 2(v^2 - u_1^2); \quad qt = -(u_1 + v); \quad rt = -2u_1$$

Sind also u_1 und v von gleicher Ordnung, so fällt die Normale in die yz Ebene und kann hier, je nach dem Wege, alle zur x Axe normalen Richtungen haben. Verschwindet u_1 gegen v, so ist die finale Richtung die der y; verschwindet hingegen v gegen u_1, so ist dieselbe die Diagonale des Rechtecks aus den Strecken y und $1 - z = 2y$.

Hiermit ist gezeigt, dass man von jedem Punkte der Fläche bis zu demselben Punkte jeden beliebigen Weg längs der Fläche, auch über die 3 ausgezeichneten Punkte, bei stetig variirender Normale verfolgen kann, und dass, wofern nur das Intervall von v ein Ungeradvielfaches von π ist, die Normale in umgekehrter Stellung am Ende des Weges ankommt. Dies ist es, was die Eigenschaft der Einseitigkeit ausmacht. R. Hoppe.

3.

Volumes des solides engendrés par la révolution des polygones réguliers autour d'un de leurs côtés.

Théorème. Lorsqu'un polygone régulier fait une révolution entière autour d'un de ses côtés, il engendre un solide équivalent au cylindre, qui a pour base le cercle inscrit dans le polygone régulier et pour hauteur le périmètre du polygone.

Désignons par C le côté et par A l'apothême du polygone régulier que nous supposons de n côtés. D'après le théorème de Guldin, le volume V, qu'engendre ce polygone en tournant autour d'un de ses côtés, a pour mesure la surface S du polygone multipliée par la circonférence $2\pi A$ que d'écrit le centre de gravité. c'est-à-dire le centre du polygone. Or on a la surface du polygone $S = nC \times \frac{A}{2}$. Donc il vient

$$V = nC \times \frac{A}{2} \times 2\pi A = nC \times \pi A^2 = \pi A^2 \times nC,$$

ce qu'il fallait prouver.

Applications. Répresentant par R le rayon du polygone régulier, on trouve, pour la suite des premièrs polygones réguliers, les valeurs suivantes.

1⁰. Triangle équilateral, $n = 3$:

$$C = R\sqrt{3}, \qquad R = \tfrac{1}{3}C\sqrt{3};$$
$$A = \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{6}C\sqrt{3};$$
$$S = \tfrac{3}{4}R^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}C^2\sqrt{3};$$
$$V = \tfrac{3}{4}\pi R^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}\pi C^3.$$

2⁰. Carré, $n = 4$:

$$C = R\sqrt{2}, \qquad R = \tfrac{1}{2}C\sqrt{2};$$
$$A = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}C;$$
$$S = 2R^2 = C^2;$$
$$V = 2\pi R^3\sqrt{2} = \pi C^3.$$

3⁰. Pentagone régulier, $n = 5$:

$$C = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad R = \tfrac{1}{10}C\sqrt{50 + 10\sqrt{5}};$$
$$A = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{5} + 1) = \tfrac{1}{10}C\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$
$$S = \tfrac{5}{8}R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}C^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$
$$V = \tfrac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}C^3(5 + 2\sqrt{5}).$$

4⁰. Hexagone régulier, $n = 6$:

$$C = R;$$
$$A = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}C\sqrt{3};$$
$$S = \tfrac{3}{2}R^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{2}C^2\sqrt{3};$$
$$V = \tfrac{9}{2}\pi R^3 = \tfrac{9}{2}\pi C^3.$$

5⁰. Octogone régulier, $n = 8$:

$$C = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \qquad R = \tfrac{1}{2}C\sqrt{4 + 2\sqrt{2}};$$
$$A = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}C(1 + \sqrt{2});$$
$$S = 2R^2\sqrt{2} = 2C^2(1 + \sqrt{2});$$
$$V = 2\pi R^3\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 2\pi C^3(3 + 2\sqrt{2}).$$

6⁰. Décagone régulier, $n = 10$:

$$C = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5} - 1), \qquad R = \tfrac{1}{2}C(\sqrt{5} + 1);$$
$$A = \tfrac{1}{4}R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}C\sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$
$$S = \tfrac{5}{4}R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \tfrac{5}{2}C^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$
$$V = \tfrac{5}{2}\pi R^3\sqrt{5} = \tfrac{5}{2}\pi C^3(5 + 2\sqrt{5}).$$

7⁰. **Dodécagone régulier,** $n = 12$:

$$C = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \quad R = \tfrac{1}{2}C(\sqrt{6}+\sqrt{2});$$
$$A = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \tfrac{1}{2}C(2+\sqrt{3});$$
$$S = 3R^2 = 3C^2(2+\sqrt{3});$$
$$V = \tfrac{3}{2}\pi R^3(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 3\pi C^3(2+\sqrt{3})^2.$$

8⁰. **Pentédécagone régulier,** $n = 15$:

$$C = \tfrac{1}{4}R[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)], \quad R = \tfrac{1}{2}C(\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{5}});$$
$$A = \tfrac{1}{8}R[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}--1)] = \tfrac{1}{4}C[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)];$$
$$S = \tfrac{15}{16}R^2[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}] = \tfrac{15}{8}C^2[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)];$$
$$V = \tfrac{15}{16}\pi R^3[\sqrt{50+10\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)]$$
$$= \tfrac{15}{16}\pi C^3[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)]^2.$$

G. Dostor.

Litterarischer Bericht

CCXXVII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Lehrbuch der politischen Arithmetik. Vom Professor Josef Haberl. Wien 1875. Wilhelm Braumüller.

Wir glauben das genannte Lehrbuch als eine gediegene Leistung in der ohnehin nicht sehr umfangreichen Litteratur der politischen Arithmetik begrüssen zu können. Es zerfällt in zwei Hauptteile.

Der erste Teil umfasst vier Abschnitte folgenden Inhalts: Im ersten Abschnitte werden die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung in so weit entwickelt, als ihre Kenntniss zum gründlichen Verständniss und zur einfacheren Durchführung der später behandelten Aufgaben, namentlich jener über Capitals- und Rentenversicherungen, erforderlich erscheint. Im zweiten Abschnitte werden die einfache und zusammengesetzte Zinsesrechnung nebst verwandten Aufgaben mit eingehender Gründlichkeit behandelt. Nicht leicht wird man in einem Buche über praktische Arithmetik den eben angeführten Gegenstand der Zinsesrechnung so wohl geordnet, so gründlich und erschöpfend besprochen und dabei doch jede unnütze die Uebersicht und Einsicht erschwerende Weitschweifigkeit vermieden finden, wie in dem in Rede stehenden Lehrbuche.

Der dritte Abschnitt enthält die verschiedenen Arten der Rückzahlung aufgenommener Capitalien, somit die verschiedenen Arten von Schuldentilgungsplänen in gründlicher und eingehender Durchführung, vorbehaltlich die Constructionen unverzinslicher und verzinslicher Lotterieanlehen, welche im vierten Abschnitte mit musterhafter Deutlichkeit besprochen und wobei auch alle die über Lose

stellbaren Fragen bezüglich ihres wahren und ihres Hoffnungswertes, ihres Gewinnes oder Verlustes erörtert werden.

Den zweiten Hauptteil des Werkes widmet der Verfasser jenen Rechnungsaufgaben, die sich bei Lebensversicherungen ergeben können. Dieser Teil zerfällt in sieben Abschnitte folgenden Inhaltes: Der erste Abschnitt enthält die zur gehörigen Auffassung der Aufgaben über Lebensversicherungen notwendigen Vorbegriffe, insbesondere die Erläuterungen über die Bedeutung und den Gebrauch der Sterblichkeitstafeln und die Construction der, zur schnelleren Ausführung der Rechnungen erforderlichen, sogenannten Grundtafeln.

In den folgenden sechs Abschnitten erscheinen die einzelnen Fälle der Capitals- und Rentenversicherung behandelt und zwar in nachstehender Gruppirung: 1. die Leibrenten; 2. die Capitalsversicherung auf den Todesfall; 3. die Capitalsversicherung auf den Fall des Erlebens (Ueberlebens-Associationen, gemischte Capitalsversicherung); die Gegenversicherung; 4. die verschiedenen Arten der Verbindungsrenten (Witwenpensionen, Erziehungsrenten); 5. einseitige und gegenseitige Capitalsversicherung für den Ueberlebensfall; 6. Capitalsversicherung für den Fall, dass zwei Personen verschiedenen Alters nach Ablauf einer bestimmten Zeit noch leben, oder für den Fall, als während einer bestimmten Zeit eine der zwei Personen stürben; ferner die Kinderversorgung.

Wie schon aus dieser kurzen Inhaltsangabe hervorgeht, werden alle in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Fälle der Capitals- oder Rentenversicherung behandelt und zwar nicht nur der Hauptsache nach, sondern auch noch mit besonderer Berücksichtigung vieler noch entstehenden praktischen Fragen namentlich bezüglich des Policen-Wertes, dessen Ermittlung insbesondere bei jeder Bilanzziehung unumgänglich wird.

Durch die vortreffliche Anordnung der einzelnen Teile des behandelten Gegenstandes, durch die natürliche, deutliche zugleich gründliche und erschöpfende Darstellung desselben, hat der Verfasser — welcher, nebenbei gesagt, dadurch ein eingehend betriebenes Studium der besprochenen Materien an den Tag legt — in dem in Rede stehenden Lehrbuche ein in seiner Art ausgezeichnetes und sehr nützliches Werk geliefert.

Es bedarf kaum jener mathematischen Vorbildung, die jeder absolvirte Realschüler besitzt, um das hier besprochene Werk in allen seinen Teilen gehörig zu verstehen und es dürfte sich dasselbe vorzüglich auch eignen als Lehrbuch für den betreffenden Gegenstand an Handels-Akademien zu dienen.

Was aber dem Werke noch eine besondere praktische Brauchbarkeit verleiht, sind die vielen am Ende beigefügten sehr vorteilhaft eingerichteten Tabellen, welche die zur schnelleren Durchführung der verschiedenen Aufgaben über Zinseszinsen, über Capitals- und Rentenversicherung notwendigen Daten enthalten.

Es kann hier auch nicht unerwähnt gelassen werden, dass die Ausstattung des Werkes in Druck und Papier lobende Anerkennung verdiene und der Verlagsbuchhandlung alle Ehre mache.

Wien, im November 1874.

Dr. J. Zampieri, k. k. Professor.

Sur quelques développements de la fonction $\log \Gamma x$; seconde lettre à M. Adolphe Quetelet, secrétaire perpétuel de l'Academie. Par M. Angelo Genocchi, professeur à l'université de Turin. Extrait des Bulletins de l'Academie Royale de Belgique. 2. sér. t. XXXVI. n⁰. 11. nov. 1873.

Der Verfasser hat in den Bull. 1. sér. t. XX. 2. partie. p. 392. 1853. eine Formel von Binet bewiesen, welche $\log \Gamma x$ durch eine convergente Reihe darstellt, und reproducirt hier den Beweisgang zur Widerlegung erhaltener Einwürfe. Zunächst ist, identisch,

$$\Delta \log \Gamma x = \Delta u + \Delta U_n + R_n$$

wo Δ die Differenz für $\Delta x = 1$ bezeichnet, und

$$u = (x - \tfrac{1}{2}) \log x - x$$

$$U_n = \sum_{i=0}^{i=n-2} (-1)^i \beta_i X_i$$

$$\beta_i = \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} (\alpha - \tfrac{1}{2}) \partial\alpha; \quad X_i = \frac{i!}{x(x+1)\dots(x+i)}$$

$$R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{x+\alpha} \partial\alpha$$

gesetzt ist. Hieraus wird nun geschlossen, dass

$$\log \Gamma x = u + U_n + \Sigma R_n + C$$

wo C constant oder periodische Function von x sei. R_n verschwindet für $n = \infty$, mithin ist die Reihe U_n convergent. C erweist sich als unabhängig erst von n, dann von x, und ergiebt den Wert $\frac{1}{2}\log(2\pi)$, wofür indes die Begründung nicht mitgeteilt ist.

Von Einwürfen der Kritik sind 3 genannt. Der erste, die Begründung gelte nur von ganzen Zahlen x, kann wol nur auf Achtlosigkeit beruhen, da die Untersuchung allgemein geführt wird. Einen zweiten, die Eigenschaft der Grösse C sei nicht hinreichend begründet, hält der Verfasser für hervorgerufen durch ein Misverständniss: man dürfe nicht die Integration der Differenzengleichung mit Summation verwechseln. Dieses Urteil des Verfassers müssen wir geradezu umkehren: Misverständnisse können aus der Summation nicht entstehen, wol aber aus den gebräuchlichen Unbestimmtheiten, in welchen die Sätze über Differenzengleichungen sich aufgestellt finden. Was aus der Summation nicht als strenge Folge hervorgeht, ist auch nach Regeln der Integration nicht bündig nachgewiesen. Mag man die Unbestimmtheiten so lange bestehen lassen als kein Misverständniss existirt; liegt ein solches vor, so giebt die Summation die Controle. Also nicht in der Identificirung, sondern in der illusorischen Unterscheidung beider giebt sich der Mangel an Orientirung zu erkennen. Der dritte Einwurf vermisst die Berücksichtigung der doppelt-unendlichen Summation, sofern n und x unabhängig von einander unendlich gross werden. Zur Widerlegung wird nun eine sehr umständliche Untersuchung über die Convergenz der Reihe U_n geführt, die, da der Verfasser den genauen Rest in einer so leicht zu behandelnden Form aufgestellt hatte, doch gewiss nicht nötig war. Summirt man die obige Differenzengleichung von x bis $x+m-1$, so kommt:

$$\log \Gamma(x+m) - \log \Gamma x = (u+U_n)_{x+m} - (u+U_n)_x + \sum_x^{x+m-1} R_n$$

Nun ist (um einen Beleg anzuführen, nach Hoppe Lehrb. d. Differentialrechnung und Reihentheorie S. 182.) für $n=\infty$

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) = (-1)^{n-1}\varphi(\alpha)\left(\frac{e}{n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}-n}$$

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = \psi(x)\left(\frac{e}{n}\right)^{-x+\frac{1}{2}-n}$$

also die zu integrirende Function

$$= (-1)^{n-1}\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(x)}\left(\frac{e}{n}\right)^{x+\alpha}\frac{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}{x+\alpha}$$

Das Integral R_n ist ein Mittelwert hiervon zwischen $\alpha=0$ und $\alpha=1$; demnach verschwindet der Rest sichtlich, und es bedarf keines weitern Beweises der Convergenz der Reihe ΔU_n. Jetzt bleibt der Rest nach m zu summiren. Durch Substitution von $x+m$ für x, multiplicirt sich R_n mit dem Product

$$\frac{x\ldots(x+m-1)\,x\ldots(x+n-1)}{x\ldots(x+m+n-1)} = x\ldots(x+m-1)\left(\frac{e}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^{x-\frac{1}{2}+n}$$

wir brauchen daher nur diesen Coefficienten zu summiren, und teilen das Intervall der m bei $m = \frac{n}{e}$. Unterhalb dieser Grenze wird, weil die m ersten Factoren $< x+m$, der letzte < 1 ist, das Product

$$< \left(\frac{e(x+m)}{n+m}\right)^m < \left(\frac{\frac{x}{m}+1}{\frac{1}{e}+1}\right)^m$$

also von irgend einem m an kleiner als das allgemeine Glied einer convergenten geometrischen Reihe. Oberhalb der Grenze ist m unendlich gross, daher wird

$$x(x+1)\dots(x+m-1) = \psi(x)\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}-x-m}$$

und das Product

$$= \psi(x)\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^n \overset{=}{<} \psi(x)\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}$$

das ist gleichfalls das allgemeine Glied einer convergenten Reihe. Folglich erhält der, anfänglich unendlich kleine Rest, durch die Summation nur einen endlichen Factor hinzu und bleibt unendlich klein. Demnach erhellt auch die Convergenz der Reihe U_n ohne Schwierigkeit, und hieraus folgt, dass

$$C = \lim \left\{ \log \Gamma(x+m) - (u + U_n)_{x+m} \right\} \begin{matrix} m = \infty \\ n = \infty \end{matrix}$$

einen endlichen Wert hat, der aber noch periodische Function von x sein kann. Dass er constant ist, kann offenbar aus der Convergenz nicht folgen. Der Verfasser verweist in Betreff des Beweises auf Bull. 1. sér. XX. 2. part. p. 391. und XXI. 1. part. p. 84. Da er jedoch am Schluss der Note, S. 10. daraus, dass sich C für gewisse unendliche Werte von x constant erweist, folgern will, dass C überhaupt für $x = \infty$ constant sei, so kann es allerdings noch zweifelhaft scheinen, ob der citirte Beweis bündiger als dieser Schluss sei, und da überdies die Bündigkeit von der Kritik angefochten war, so war gewiss hinreichender Grund, darüber nähere Auskunft zu geben.

Der zweite Teil der Schrift enthält historische Bemerkungen. Insbesondere werden Sätze von Eulerschen Integralen, welche gewöhnlich spätern Autoren zugeschrieben werden, auf Euler selbst zurückgeführt. H.

Geometrie.

Lettre à M. Ad. Quetelet, secrétaire perpétuel de l'Académie, sur diverses questions mathématiques. Par M. Genocchi, professeur à l'université de Turin. Extrait des Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique, 2me série, tome XXXVI. n°. 8; août 1873.

Der Hauptteil ist überschrieben: Bemerkungen über die abstracte Geometrie. Der Verfasser hält die Frage über die Beweisbarkeit von Euklids Grundsatz durch die Lobatschefsky'sche Geometrie nicht für entschieden, weil die pseudosphärische Fläche (mit constanter negativer Krümmung, einfachem Connex und unendlicher Ausdehnung) nicht darstellbar sei. Er geht die Realisationsversuche durch; doch stets giebt es mehrfachen Durchschnitt der geodätischen Linien. Hierauf wendet er sich zu der Frage, wie sich der Unterricht zu verhalten habe, wenn hier wirklich ein Erfahrungssatz vorliege. Er beruft sich zunächst auf eine Aeusserung von Helmholtz: es sei schwieriger als man denkt den Unterschied zwischen Tatsachen und Sätzen in der Mathematik durch einfache Definition zu fixiren und in der Doctrin zur Geltung zu bringen, weil die Figuren der Geometrie nicht der Wirklichkeit entsprechen, sondern idealisirt sind — und bemerkt ganz richtig, dass ein Erfahrungssatz im Lehrsystem sich nur durch den Namen von einem Axiom unterscheiden würde. Hierbei ist jedoch von beiden Seiten übersehen, dass die Tatsachen der Erfahrung weder selbst Erkenntnisse, noch den Erkenntnissen coordinirbar, sondern blosse der Erkenntniss bedürftige Gegenstände momentanen Bewusstseins sind. Will man also auf Erfahrung recurriren, so kann man nicht etwas Formulirtes als Erfahrung substituiren, sondern muss den psychischen Weg von der erlebten Wirklichkeit zur ideellen Erkenntniss ans Licht ziehen, dies aber nicht bloss bei dem einen Satze, sondern bei den gesammten Elementen der Mathematik tun. Der begriffliche Unterschied zwischen Tatsachen und Sätzen ist leicht genug zu fassen; es fehlt sogar jede Aehnlichkeit. Wenn man aber nach vulgärem nachlässigem Wortgebrauch Sätze Tatsachen nennt, so ist es nicht nur, wie Helmholtz sagt, schwer eine Grenze zu definiren, sondern, wie Genocchi findet, geradezu kein Unterschied vorhanden. H.

Lehrbuch der descriptiven Geometrie von Dr. Bernhard Gugler, Professor an der K. polytechnischen Schule zu Stuttgart. Mit 12 Kupfertafeln in Mappe und 21 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Dritte Auflage. Stuttgart 1874. J. B. Metzler. 466 S.

Das Lehrbuch handelt ausschliesslich von der Orthogonalprojec-

tion auf 2 einander rechtwinklig schneidenden Grundebenen. Es stellt eine kleine Anzahl von Sätzen über die Beziehungen und die gegenseitige Bestimmung zwischen den darzustellenden Figuren und ihren Projectionen auf, giebt das gebräuchliche Verfahren beim Kenntlichmachen der notwendigen Bestimmungsstücke in der Darstellung an, und löst dann eine längere Reihe von Aufgaben in synthetisch aufsteigender Folge, erst bezüglich auf geradlinig eben begrenzte, dann auf krumme Figuren. Der einfachen Natur des Gegenstandes entspricht auch in der Tat eine einfache und leicht verständliche Darlegung. Wir empfehlen das Buch als seiner Aufgabe genügend.

H.

Die Elemente der kinematischen Curvenlehre. Ein Leitfaden für den Schulunterricht. Von Dr. Heinrich Grosse. Berlin, 1874. Ernst Wasmuth. 32 S.

Die Curvenlehre auf kinematische Grundlage zu stellen, ist ohne Zweifel der Natur der Sache vollkommen gemäss; auch ist es nicht schwer, und würde keine grosse Umständlichkeit erfordern, hierin ganz elementar zu beginnen und ohne Ansprüche an weitere Vorkenntnisse, ohne Stützung auf fremde Theorien, eine in voller Allgemeinheit genügende und doch leicht fassliche Doctrin zu entwickeln. Dies ist nun in der vorliegenden Bearbeitung nicht geschehen, und zwar ohne Erklärung, dass und warum sie es nicht tut. Sie zeichnet sich mit kühnstem Auftreten in Verschweigung dessen, was zum Verständniss notwendig ist, aus, während sie im Grunde so gut wie alles aus fremder Theorie entlehnt. Um so mehr ist es wol im Berichte geboten, das Verschwiegene ans Licht zu ziehen. Zunächst ist mit keinem Worte gesagt, dass das Buch nur von ebenen Figuren und Bewegungen handelt. Der Betrachtung räumlicher Gebilde wird sogar im voraus der Weg versperrt durch Aufstellungen, welche im allgemeinen unwahr sind und in der Ebene nur gerade zutreffen, z B. durch die Definition der Evolute als Ort des Krümmungsmittelpunkts, durch den Satz, dass die Bewegung eines starren Systems durch die einer Geraden bestimmt sei, u. a. Ferner steht in der Einleitung: der Bewegungslehre seien die Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung entnommen. Gleichwol wird schon in §. 1. die Zerlegung in Componenten als bekannt vorausgesetzt, und weiterhin erscheint überhaupt die ganze kinematische Theorie als selbstverständliche Grundlage aller Deduction. Da fragt man doch billig, wie und wo diese Vorbedingungen gegeben werden, worin sie bestehen, und was der Gegenstand des Vortrags ihnen gegenüber noch neues bietet? Ferner ist nur beiläufig im Vorwort von Ausschliessung der Infinite-

simalrechnung die Rede. Hierzu muss bemerkt werden: letztere lässt sich in der Lehre von der stetigen Bewegung (zu unterscheiden von der Kinematik der endlichen Transposition) ehrlicher Weise nicht ausschliessen. Der Begriff der Geschwindigkeit ist identisch mit dem Differentialquotienten; jenachdem eins von beiden verstanden wird oder nicht, gilt das gleiche vom andern. Hier nun vertritt ersterer den letztern; die Beziehung aber zwischen der momentanen Lage und der Geschwindigkeit fehlt in allen Aufstellungen. In diesem wesentlichen, zu aller Anwendung notwendigen Punkte ist die Doctrin mangelhaft und lässt den Schüler im Stich, der natürlich nicht merken kann, wie sehr er in Unkenntniss erhalten wird. Dass bei der Anwendung, wie sie hier ausschliesslich auf Kegelschnitte und Cykloiden nachfolgt, die Blösse nicht zum Vorschein kommt, ist sehr begreiflich, da bei geradliniger und Kreisbewegung jene Beziehung einfach genug ist, um unvermerkt über sie hinwegzukommen. Nach allem lässt sich über die Bearbeitung kein anderes Urteil fällen, als dass sie auf Täuschung der Schüler berechnet ist. H.

Mechanik.

Ueber Schwingungen verbundener Pendel. Von W. Dumas. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin, 1874. Weidmann. 16 S.

Der Inhalt der Schrift ist die durchgeführte Berechnung der Schwingungen eines Systems in derselben Verticalebene drehbarer Pendel, bestehend aus einem Hauptpendel mit fester Axe und beliebig vielen Nebenpendeln, deren parallele Axen am Hauptpendel fest sind, unter Voraussetzung kleiner Amplituden. Das Alembert-sche Princip giebt die Differentialgleichungen der Bewegungen; durch Vernachlässigung der höhern Potenzen und Producte der Ablenkungen lassen sich dieselben linear herstellen. Ihnen wird zunächst durch Annahme einer gemeinsamen, gleichzeitig beginnenden Periode mit verschiedener Maximalablenkung (Amplitude) genügt, einer Periode die der einfachen Pendellänge λ entspricht. Nach Elimination der Amplituden bleibt zur Bestimmung von λ eine Gleichung der Form

$$\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu_1}{\lambda-l_1}+\frac{\mu_2}{\lambda-l_2}+\ldots=1$$

welche lauter positive und im allgemeinen ungleiche Wurzeln hat. Nur wenn unter den einfachen Pendellängen l_1, l_2,... welche den Nebenpendeln entsprechen, gleiche vorhanden sind, ergeben sich gleiche

Wurzeln, die indes von Anfang weggehen, wenn man die Gleichung nach Verschmelzung entwickelt. Es giebt demnach für n Nebenpendel $n+1$ einfache Schwingungen, jede mit resultirender eigener Periode und Amplitude und mit willkürlicher eigener Anfangszeit. Die Amplituden haben nur einen willkürlichen gemeinsamen Factor. Die Superposition der so erhaltenen einfachen Schwingungen ergiebt die allgemeinste mögliche Bewegung, wie sich zeigt, indem man sie mit einem beliebig gegebenem Anfangszustand identificirt, und die Willkürlichen daraus bestimmt.

Hierauf folgen eine Anzahl Beobachtungen und Anwendungen. Es wird die Möglichkeit periodischer Schwingungen von kleiner Amplitude für ein Pendelsystem besprochen für eine feste Axe unterhalb des Schwerpunkts; dann die Aufgabe gelöst eine bestimmte Schwingungsform durch gesuchte Anfangsbewegung nebst Anordnung der Massen und Längen zu erzeugen. Eingehender werden dann die 2 Fälle behandelt, wo nur 1 Nebenpendel vorhanden ist, und wo beliebig viele Nebenpendel von kleiner Gesammtmasse im Verhältniss zur Masse des Hauptpendels gleiche Schwingungsdauer haben. Bei solcher Ungleichheit der Massen ist im ersten Falle die Periodenlänge nahezu umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Masse des Nebenpendels und dem Abstande beider Axen. Zum Schluss wird noch die Vorrichtung beschrieben zur Herstellung des Falles, wo die Masse des Hauptpendels null ist. Die experimentelle Bestätigung mehrerer Resultate hat der Verfasser in der Berliner physikalischen Gesellschaft an einem Secunden schwingenden Hauptpendel mit 3 Nebenpendeln gezeigt. H.

Optik.

Neuere Untersuchungen über die Identität von Licht und strahlender Wärme. Von R. Franz. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin, 1874. Weidmann. 14 S.

Die Schrift charakterisirt den Standpunkt der Frage, ob Licht und strahlende Wärme sich auf dieselben Bewegungen desselben Aethers zurückführen lassen, indem sie die Resultate der bisherigen Untersuchungen kurz zusammenstellt, in Betreff der Untersuchungen selbst aber die Abhandlungen einzeln nachweist, in denen sie beschrieben sind. Die bedeutendsten Fortschritte sind hiernach gemacht im Nachweis der übereinstimmenden Natur beider Bewegungen: jedes

objective Lichtphänomen entspricht auch einem gleichartigen Wärmephänomen; ein entgegengesetzter Fall ist in keinem Punkte entdeckt. Alle diese Phänomene sind jedoch die allgemeinen Wirkungen der Erregung eines elastischen Mediums und können aus verschiedenen Annahmen übereinstimmend hervorgehen. Was anfänglich der Identität am meisten entgegenstand, war die Absorption der Licht- und Wärmestrahlen unter verschiedenen Bedingungen. Diese Abweichung kam nun in erster Linie auf Rechnung der verschiedenen Brechbarkeit der verglichenen Strahlen; denn die grösste Intensität des Wärmespectrums fällt noch jenseit des Rot, ein Umstand der zugleich die Unempfindlichkeit der Netzhaut gegen die dunkeln Wärmestrahlen erklärt. Nachdem es jedoch gelungen war, die ausserhalb des Lichtspectrums fallenden Wärmestrahlen getrennt zu absorbiren, musste es sich fragen, ob die Licht- und Wärmestrahlen von gleicher Geschwindigkeit ungleich absorbirt werden. Offenbar steht auch, wenn dies der Fall ist, die Annahme frei, dass sich die gleichzeitig fortschreitende Vibration in Elemente zerlegt, die unter verschiedenen Bedingungen auf die Materie wirken. Doch ist hierüber kein entscheidender Versuch angeführt. H.

Das Spectroskop und seine Anwendungen. Eine übersichtliche Darstellung des gesammten Gebietes der Spectralanalyse. Von J. N. Lockyer, F. R. S. Eingeführt und bevorwortet durch Dr. H. Schellen. Mit 62 Figuren und 1 farbigen Spectraltafel. Braunschweig, 1874. George Westermann. 136 S.

Die Schrift entwickelt in einem äusserst leicht verständlichen Vortrag ohne Voraussetzung irgend welcher mathematischen oder physikalischen Vorkenntnisse erst die Gesetze der wenigen in Betracht kommenden Erscheinungen, wobei die Theorie des Lichtes ganz aus dem Spiele bleibt, dann die Einrichtung und den Gebrauch der Spectroskope, sehr einfach und deutlich vor Augen gestellt durch die eingedruckten Holzschnitte, und teilt die hauptsächlichsten Entdeckungen mittelst der Spectralanalyse mit. Sie eignet sich vorzüglich zur Verbreitung der Kenntniss von diesen Entdeckungen in einem weiteren, wissbegierigen Publicum, und empfiehlt sich durch vortreffliche Ausstattung. H.

Die Farbenlehre im Hinblick auf Kunst und Kunstgewerbe. Von Dr. Wilh. v. Bezold, ord. Professor der Physik am Polytechnicum in München. Mit 63 Figuren und 9 Tafeln. Braunschweig, 1874. George Westermann. 296 S.

Wenn gleich erst das letzte der 5 Capitel ausdrücklich der Kunst

und zwar besonders der ornamentalen Kunst und der Malerei, gewidmet ist, so ist doch auch in den 4 ersten, welche die wissenschaftliche Ausbildung bezwecken, der künstlerisch gewerbliche Gesichtspunkt durchweg entschieden massgebend. Dieser Umstand ist jedoch weit entfernt dem theoretischen Inhalt Einseitigkeit aufzuerlegen, vielmehr hat er, im Gegensatz zu andern ebenso populären Bearbeitungen, welche dem Dilettantismus zu Liebe oberflächlicher zuwerke gehen, die Folge, dass zur ernsten Gründlichkeit Anlass und deutliche Rechtfertigung gegeben war. In der Tat zeichnet sich die Schrift durch vielseitige, eingehende Berücksichtigung der mitwirkenden Elemente und durch richtige Scheidung der Begriffe bei Einfachheit und leicht verständlichem Vortrag aus. Hierin kamen ihr die Untersuchungen von Helmholtz und die vollständige Bearbeitung des gleichen Gegenstands von Brücke zustatten, auf welche letztere der Verfasser nur darum einen neuen Versuch folgen lassen will, weil sie nur wenig Verbreitung gefunden habe. Wenn derselbe, vielleicht gerade hierin, ein Vorurteil der Künstler gegen die Theorie annehmen zu müssen glaubt, so kann man gewiss auch das ebenso häufige entgegengesetzte Vorurteil, welches von der Theorie zu viel erwartet, hinzurechnen. Auch die Enttäuschung in letzterm Sinne liegt bei der hier befolgten Methode fern, wo die theoretische Bildung in der genauen Rechenschaft über wirkliche, praktisch vorliegende Verhältnisse gesucht wird.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Hankel, H., z. Gesch. d. Mathematik im Alterth. u. Mittelalter. 8. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik. Hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 4. Bd. J. 1872. 2. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 3 Mk. 60 Pf.

Prowe, A., Copernikus. 8. Berlin, Weidmann. 2 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bessell, F., dreistellige trigonometr. Zahlen u. vierzifferige Quadrat- u. Cubik-Wurzeln. 8. Hannover, Schulze. 1 Mk.

Burbach, O., physikal. Aufg. z. elementar-mathem. Behandlung. 3. Afl. 8. Gotha, Thienemann. 1 Mk. 20 Pf.

Helmes, J., die Elementar-Mathematik nach d. Bedürfnissen d. Unterrichts streng wiss. dargest. 1. Thl. 2. Abth. 2. Afl. 8. Hannover, Hahn. 2 Mk. 80 Pf.

Martus, H. E. C., mathemat. Aufg. z. Gebr. in den obersten Classen höherer Lehranst. 2. Thl. Resultate. 3. Afl. 8. Leipzig, Koch. 4 Mk.

Schellen, H., Aufg. f. d. theor. u. prakt. Rechnen. 1. Thl. 11. Afl. 8. Münster, Coppenrath. 2 Mk.

— method. geordnete Materialien f. d. Unt. im theoret. u. prakt. Rechnen. 1. Thl. 7. Afl. 8. Ebd. 4 Mk.

Schlömilch, O., Uebungsb. z. Studium d. höheren Analysis. 2. Thl. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 60 Pf.

Schubert, K., Aufg. z. Unt. in d. Arithmetik. 1. Bdchn. 8. Wien, Dirnboeck. 1 Mk. 20 Pf.

Sohncke's, L. A., Sammlg. v. Aufg. aus d. Differential- u. Integralrechng. 4. Afl. 1. Thl. 8. Halle, Schmidt. 4 Mk.

Ustrich, F., Lehrb. d. Arithmetik. 8. München, Hoepfner & Gr. 1 Mk.

— Sammlg. v. arithm. Aufgaben. 8. Ebd. 50 Pf.

Wienhold, E. F., Lehrb. der elementaren Mathematik für Seminaristen und Lehrer. 2. Thl. Geometrie. 8. Leipzig, Hahn. 3 Mk. 50 Pf.

Wittstein, Th., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 1. Bd. 2. Abth. Planimetrie. 7. Afl. 8. Hannover, Hahn. 2 Mk.

— fünfstellige logarithmisch-trigonometr. Tafeln. 6. Afl. 8. Hannover, Hahn. 2 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Günther, S., Lehrb. d. Determinanten-Theorie. 8. Erlangen, Besold. 5 Mk.

Haberl, J., Lehrb. d. polit. Arithmetik. 8. Wien, Braumüller. 7 Mk.

Hauck, H., u. A. F. Hauck, Lehrb. d. Arithmetik f. Gewerb-, Handels- u. Realschulen. 2. Thl. 1. Abth. 2. Afl. 8. Nürnberg, Korn. 2 Mk. 10 Pf.

Liese, A., angewandte Elementar-Mathematik. 2. Thl. Arithmetik. 8. Berlin, W. Schultze. 1 Mk. 60 Pf.

Montag, J. B., prakt. Unt. z. vortheilhaften Gebrauche der gemeinen u. trigonometr. Logarithmen. 2. Afl. 8. Quedlinburg, Ernst. 1 Mk.

Schütze, F., Kopfrechenschule. 1. Thl. 3. Afl. 8. Langensalza, Verlags-Comptoir. 1 Mk. 25 Pf.

Steck, N., u. J. Bielmayr, Lehrb. d. Arithmetik f. Lateinschulen. 4. Afl. 8. Kempten, Kösel. 1 Mk. 20 Pf.

Winckler, A., Integration verschied. Differentialgleichgn. zweiter Ordng. 8. Wien, Gerold's Sohn. 60 Pf.

Geometrie.

Adam, W., Lehr- u. Handb. d. Flächen- u. Körperrechng. 4. Afl. 8. Langensalza, Verlags-Comptoir. 1 Mk. 20 Pf.

Baur, M., die Raumcurven III. Ordnung u. Klasse. 4. Tübingen, Fues. 2 Mk. 40 Pf.

Blum, L., Schulbuch d. ebenen Geometrie f. mittlere Realklassen 8. Stuttgart, Metzler. 3 Mk. 40 Pf.

Carton-Modelle v. Flächen zweiter Ordnung. 6 Nrn. Darmstadt, Brill. 9 Mk., einz. Nrn. 1 Mk. 60 Pf.

Fink, J., geometr. Darstellungs-Unt. od. Anleitg. z. geometr. Zeichnen. 3. Afl. m. Atlas. 8. Freiburg, Herder. 2 Mk. 20 Pf.

Mink, W., Lehrb. d. Geometrie. 5. Afl. 8. Elberfeld, Friederichs. 3 Mk.

Salmon, G., analyt. Geometrie des Raumes. Deutsch bearb. v. W. Fiedler. 2. Thl. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Schreiber, G., Lehrb. d. Perspective. 2. Afl. 8. Leipzig, Oehmigke. 12 Mk.

Spieker, Th., Lehrbuch d. ebenen Geometrie. 10. Afl. 8. Potsdam, Stein. 2 Mk. 50 Pf.

Stegmann, A., die Grundlehren d. ebenen Geometrie. 2. Afl. 8. Kempten, Kösel. 2 Mk.

Streissler, J., d. geometr. Formenlehre. 1. Abth. 3. Afl. 8. Schimpff, Triest. 1 Mk. 60 Pf.

do. dass. 2. Abth. 2. Afl. 8. Ebd. 2 Mk.

Vogel, W., d. Elemente d. geometr. Zeichnens. 2. Thl. 8. Stuttgart, Grüninger. 3 Mk.

Worpitzky, Elemente d. Mathematik f. gelehrte Schulen u. zum Selbststudium. 4. Hft. Planimetrie. 8. Berlin, Weidmann. 2 Mk. 40 Pf.

Practische Mechanik, Apparate.

Rüdgisch, R. v., Instrumente u. Operationen d. niederen Vermessungskunst. 1. Abth. 8. Cassel, Kay. 4 Mk. 50 Pf.

Optik.

Hansen, P. A., dioptr. Unters. m. Berücksicht. d. Farbenzerstreug. u. d. Abweichg. wegen Kugelgestalt. 2. Abhandlg. 8. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Annalen d. k. k. Sternwarte in Wien. 3. F. 21. Bd. 1871. 8. Wien, Wallishausser. 11 Mk.

— dass. 3. F. 22. Bd. 1872. 8. Ebd. 11 Mk.

Beobachtungen, magnet. u. meteorolog. an d. k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1873. 4. Prag, Calve. 7 Mk. 50 Pf.

Friesach, K., Theorie d. Planetenvorübergänge v. d. Sonnenscheibe. 8. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Publikationen d. Hamburger Sternwarte. Nr. 1. Hrsg. von G. Rümker. 4. Hamburg, Friederichsen & Co. 5 Mk.

Spörer, G., Beobachtgn. d. Sonnenflecken zu Anclam. gr. 4. Leipzig, Engelmann. 15 Mk.

Physik.

Berthold, G., Rumford u. d. mechan. Wärmetheorie. 8. Heidelberg, Winter. 2 Mk. 40 Pf.

Buff, H., Lehrbuch d. physikal. Mechanik. 2. Bd. 2. Abth. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.; cplt. 21 Mk. 50 Pf.

Fliedner, C., Lehrb. d. Physik. 1. Thl. Die Physik d. Materie. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk.

Hanow, üb. einige Elektromagnet. u. magnoelektr. Erfindungen. 4. Delitzsch, Pabst. 1 Mk. 20 Pf.

Jochmann, E., Grundriss d. Experimentalphysik. 3. Afl. 8. Berlin, Springer'sche Buchh. 4 Mk.

Menzel, R., Wandtafeln f. d. physikal. Unterricht. 2. Lfg. Fol. Breslau, Morgenstern. 3 Mk.

Neumann, C., üb. d. v. Weber f. d. elektr. Kräfte aufgestellte Gesetz. 8. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

Scheffler, H., die Theorie d. Wärme. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk.

Wiedemann, G., d. Lehre v. Galvanismus u. Elektromagnetismus. 2. Bd. Wirkgn. d. galvan. Stromes in d. Ferne. 2. Abth. 2. Afl. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 22 M.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathemat.-phys. Classe d. königl. sächs. Ges. d. Wiss. 10. Bd. 8. Leipzig, Hirzel. 21 Mk.

Annalen, mathemat. Hrsg. v. C. Neumann. VIII. Bd. 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. prcplt. 20 Mk.

Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Red. F. J. Studnička. Ročnik IV. Cislo 1. 8. Prag, Gregr & D. prcplt. 10 Mk.

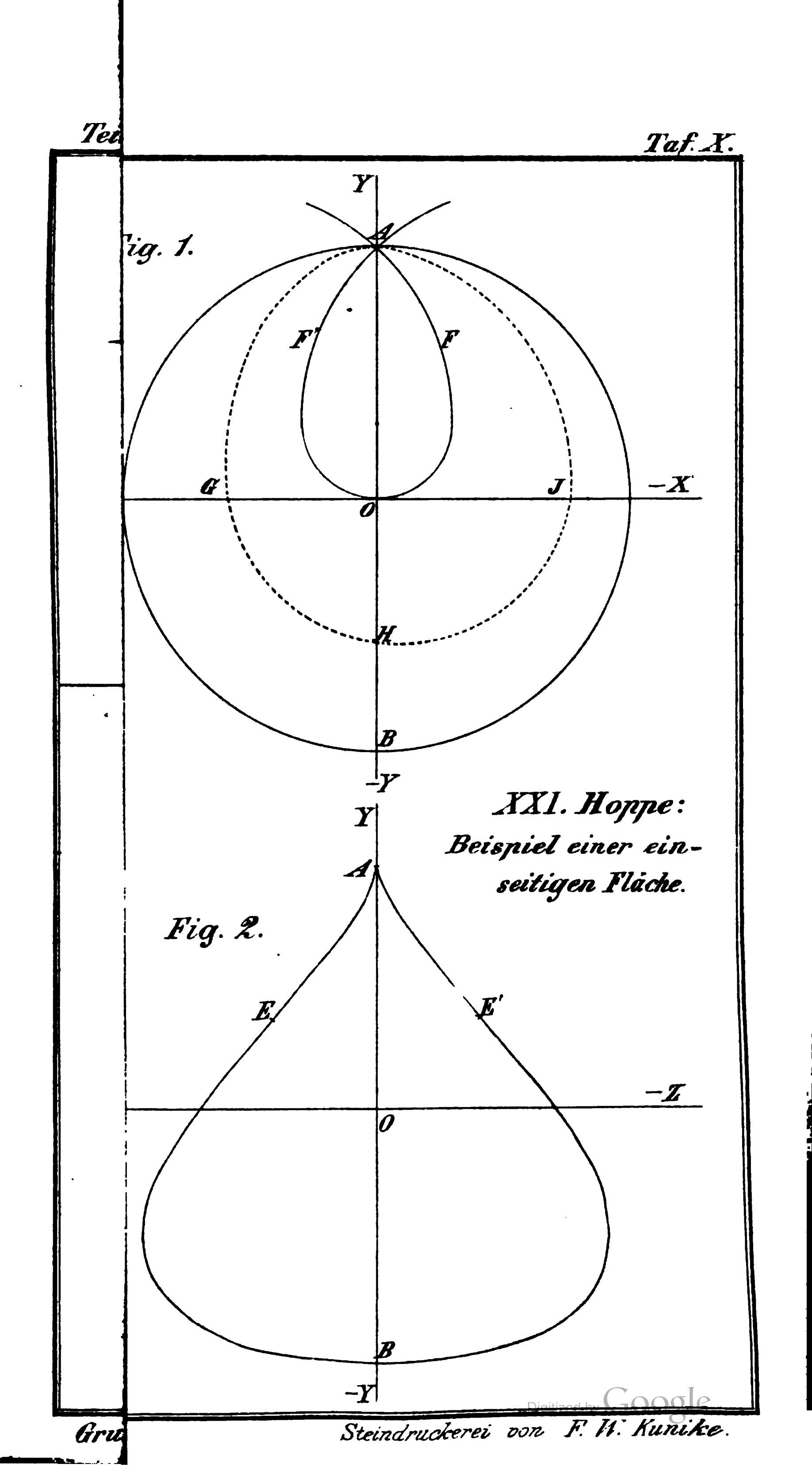
Mélanges mathémat. et astron. tirés du bulletin de l'Akad. imp. des sciences de St. Petersb. Tome V. Livr. 1. 8. Leipzig, Voss. 1 Mk.

Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Mathematisch-naturwiss. Classe. 69. Bd. 1874. 1. Abth. 1—4. Hft. Wien, Gerold's S. p. anno 20 Mk.

dass. 2. Abth. 1—4. Hft. 8. Ebd. p. anno 16 Mk.

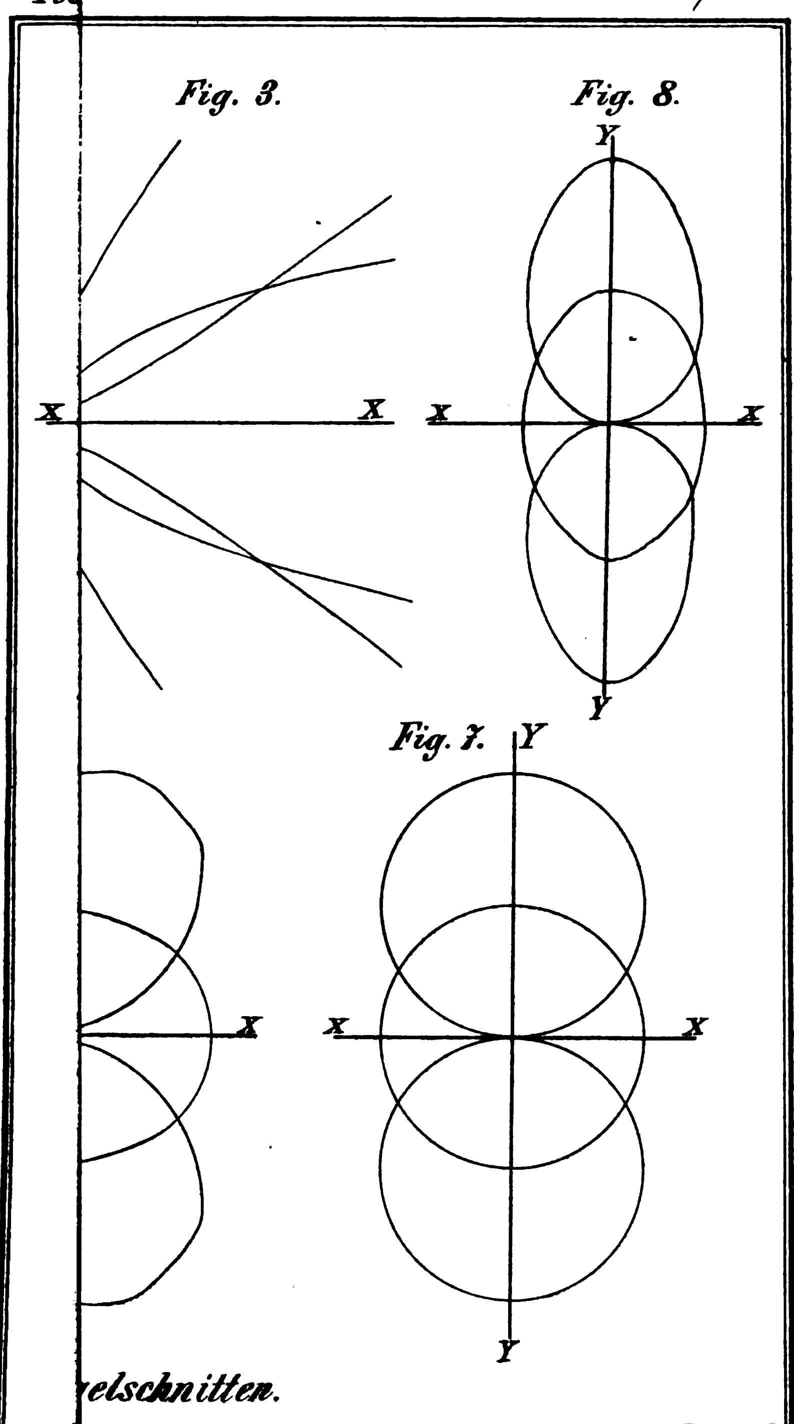
dass. 3. Abth. 1—5. Hft. 8. Ebd. p. anno 12 Mk.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. Hrsg. v. O. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 20. J. (6 Hfte.) 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. prcplt. 18 Mk.

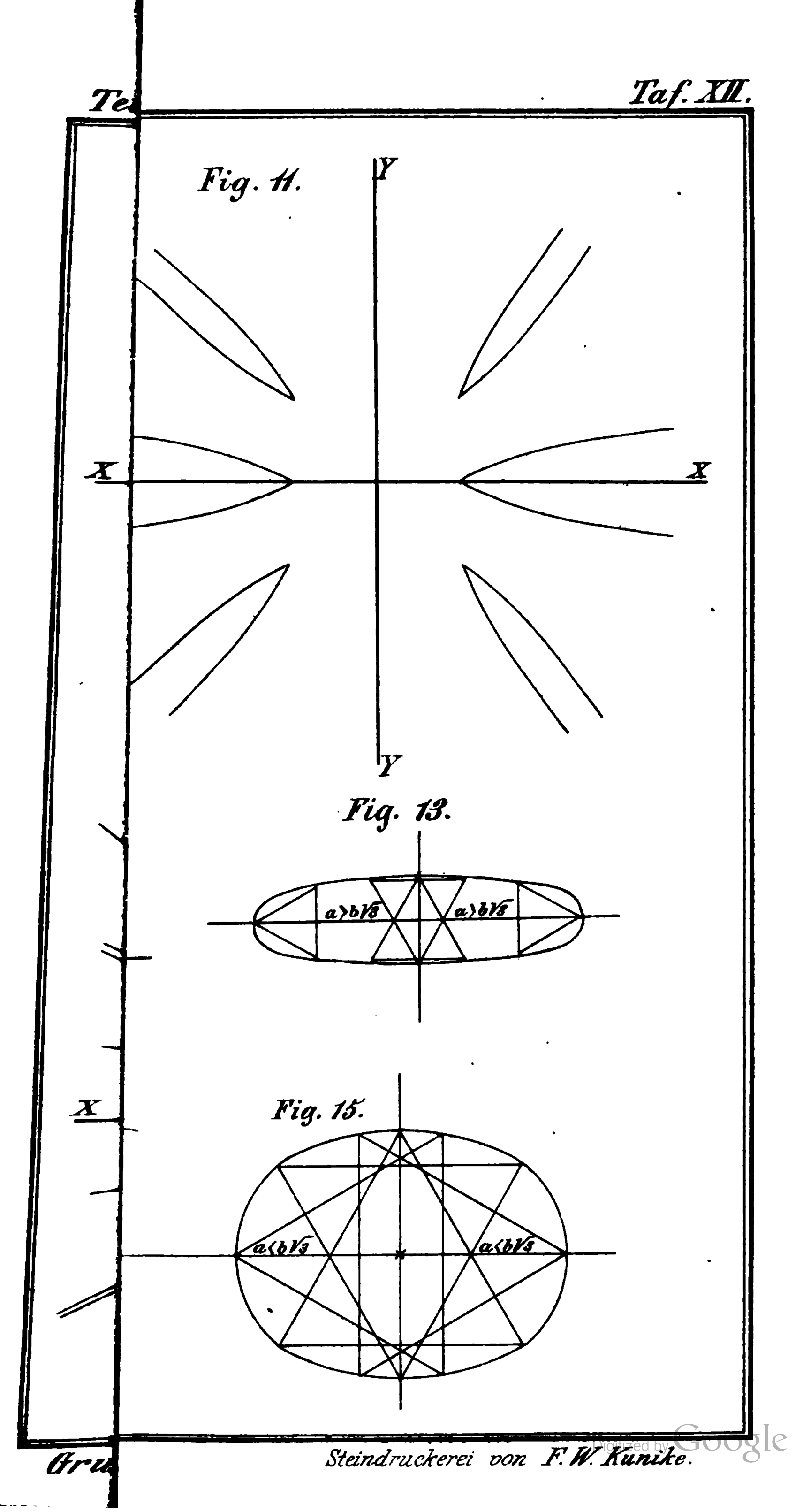


XXI. Hoppe: Beispiel einer einseitigen Fläche.

Steindruckerei von F. W. Kunike.



Steindruckerei von F. W. Kunike.



Steindruckerei von F. W. Kunike.

INHALT.

Seite.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

Mar 4

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Siebenundfunfzigster Teil. Viertes Heft.

(Mit zwei lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1875.


Digitized by Google

Druckfehler in Teil LV.

S. 233. Zeile 3. v. oben statt $(\varphi + \ldots)$ lies $\cos(\varphi + \ldots)$

Druckfehler in Teil LVI.

S. 429. Zeile 10. v. oben statt $k : \mathfrak{k}$ (wie Seite 428. Zeile 1.)
„ „ 2. v. unten „ $(\ldots)(x+c) : (\ldots)(x-c)$
S. 430. „ 12. v. oben „ $> k^+_{n,2} : < k^+_{n,2}$
„ „ 2, 3, 11, 14 v. unten statt $k : \mathfrak{k}$
S. 431. „ 9. v. oben statt $\overline{KQ^r} : \overline{HQ^r}$
„ „ 1. v. unten „ $a^{r+s} : a^{r-s}$
S. 433. „ 9. v. unten „ 1,5 : 15
S. 435. „ 12. v. oben „ $P_0 S : \mathfrak{P}_0 S$
„ „ 16. v. oben setze $\mathfrak{F}'(0) = F'(0) - \mathfrak{k}f'(0) = F'(0) = ..$
„ „ 5. v. unten statt 0,66 : —0,46
„ „ 8. v. unten „ $d-h : d$

In Teil LVII.

S. 118. Zeile 2. v. oben statt $+\pi$ lies $-\pi$
S. 125. „ 5. v. unten „ $=\pi$ „ $-\pi$
S. 319. „ 13. v. oben „ $8rF^2$ „ $4rF^2$
„ „ 7. v. unten „ $8rF^2$ „ $4rF^2$
S. 321. „ 5. v. oben „ $2a^2b^2c^2$ „ $a^2b^2c^2$
S. 324. „ 1. v. „ „ $2abcF$ „ $abcF$
S. 375. „ 5 u. 6. v. unten statt $b-\beta$ lies $b-\alpha$
„ $c-\gamma$ „ $c-\alpha$

XXII.

Der Transformationsfactor.

Von

Herrn ***Max Greiner***,

Assistenten der Kreisgewerbeschule zu Regensburg.

Die allgemeinste Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, ist von der Form:

$$a_{00}X^2+a_{11}Y^2+2a_{01}XY+2a_{02}X+2a_{12}Y+a_{22}=0$$

Will man die Gleichung des Kegelschnittes auf irgend ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, das mit dem ursprünglichen in einer Ebene liegt; so hat man die Substitutionen:

$$X=\alpha x+\alpha_1 y+\alpha_2$$
$$Y=\beta y+\beta_1 y+\beta_2$$

zu machen; wobei bekanntlich zwischen den Transformationsgrössen α, β, α_1, β_1 die Beziehungen:

$$\alpha^2+\beta^2=1$$
$$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2=1$$
$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0$$

stattfinden müssen.

Durch diese drei Bedingungsgleichungen bleibt aber noch die Wahl von drei der sechs Transformationsgrössen willkürlich, und es können dieselben insbesonders so gewählt werden, dass die transformirte Gleichung des Kegelschnittes die Form:

$$\lambda_0 x^2+\lambda_1 y^2-\varrho=0 \text{ annimmt.}$$

Diese Gleichung ist aber nun auf ein Coordinatensystem bezogen, das bekanntlich mit den Hauptaxen des Kegelschnittes zusammenfällt und zum Anfangspunkte den Mittelpunkt des Kegelschnittes hat.

Da aber die auf die Hauptaxen bezogene Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel die Form:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

hat, worin a und b die Längen der Halbaxen des Kegelschnittes bedeuten, so lässt sich immer eine Grösse k so bestimmen, dass:

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 - \varrho = k(b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2) = 0 \text{ wird.}$$

Die Grösse k lässt sich, wie in Nachstehendem gezeigt wird, durch die Coefficienten der gegebenen Kegelschnittsgleichung unzweideutig ausdrücken und kann kurzweg der Transformationsfactor genannt werden.

Führt man nämlich die oben angedeuteten Substitutionen aus; so ergibt sich die Gleichung:

$$a_{00}(\alpha x+\alpha_1 y+\alpha_2)^2+a_{11}(\beta x+\beta_1 y+\beta_2)^2+2a_{01}(\alpha x+\alpha_1 y+\alpha_2).(\beta x+\beta_1 y+\beta_2)$$
$$+2a_{02}(\alpha x+\alpha_1 y+\alpha_2)+2a_{12}(\beta x+\beta_1 y+\beta_2)+a_{22} \equiv k(b^2x^2 \pm a^2y^2-a^2b^2)=0$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x und y folgt sodann:

$$a_{00}\alpha^2 + a_{11}\beta^2 + 2a_{01}\alpha\beta = kb^2 \quad (1)$$
$$a_{00}\alpha_1^2 + a_{11}\beta_1^2 + 2a_{01}\alpha_1\beta_1 = \pm ka^2 \quad (2)$$
$$a_{00}\alpha\alpha_1 + a_{11}\beta\beta_1 + a_{01}(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) = 0 \quad (3)$$
$$a_{00}\alpha\alpha_2 + a_{11}\beta\beta_2 + a_{01}(\alpha\beta_2 + \alpha_2\beta) + a_{02}\alpha + a_{12}\beta = 0 \quad (4)$$
$$a_{00}\alpha_1\alpha_2 + a_{11}\beta_1\beta_2 + a_{01}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{02}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = 0 \quad (5)$$
$$a_{00}\alpha_2^2 + a_{11}\beta_2^2 + 2a_{01}\alpha_2\beta_2 + 2a_{02}\alpha_2 + 2a_{12}\beta_2 + a_{22} = -ka^2b^2 \quad (6)$$

Nun sind aber α_2 und β_2 die Coordinaten des Anfangspunktes des ursprünglichen Coordinatensystemes und somit die Coordinaten des Kegelschnittmittelpunktes; weshalb die Gleichungen:

$$a_{00}\alpha_2 + a_{01}\beta_2 + a_{02} = 0$$
$$a_{10}\alpha_2 + a_{11}\beta_2 + a_{12} = 0$$

bestehen müssen, woraus folgt:

$$\alpha_2 = \frac{a_{01}a_{12} - a_{11}a_{02}}{a_{00}a_{11} - a_{01}^2}, \quad \beta_2 = \frac{a_{02}a_{01} - a_{00}a_{12}}{a_{00}a_{11} - a_{01}^2}$$

Demnach geht Gleichung (6) über in:

$$a_{02}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 + a_{22} = -ka^2b^2$$

oder in:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = -ka^2b^2 \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (1) und (3):

$$\alpha\ (a_{00}\alpha + a_{01}\beta) + \beta\ (a_{01}\alpha + a_{11}\beta) = kb^2$$
$$\alpha_1(a_{00}\alpha + a_{01}\beta) + \beta_1(a_{01}\alpha + a_{11}\beta) = 0$$

folgt unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$
$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 = 0$$
$$a_{00}\alpha + a_{01}\beta = \alpha kb^2 \quad \text{und} \quad a_{01}\alpha + a_{11}\beta = \beta kb^2$$

und demnach

$$\frac{a_{00}\alpha + a_{01}\beta}{a_{01}\alpha + a_{11}\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

oder:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{a_{00} - a_{11}}{a_{01}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_{00} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2}}{2a_{01}}$$

Und weil $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ist, so folgt:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_{00} - a_{11} \mp \sqrt{(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2}}{2a_{01}}$$

Aus Gleichung (1):

$$kb^2 = a_{00}\alpha^2 + a_{11}\beta^2 + 2a_{01}\alpha\beta$$

folgt:

$$\frac{kb^2}{\beta^2} = a_{00}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{01}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{11} = a_{00} + a_{00}\frac{\alpha^2}{\beta^2} \pm \sqrt{(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2}$$

oder, da

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

ist, hat man:

$$kb^2 = a_{00} \pm \beta^2\sqrt{(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2}$$

Ebenso folgt aus Gleichung (2):

$$\pm ka^2 = a_{00} \mp \beta_1^2\sqrt{(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2}$$

Mit Zuhilfenahme der Gleichungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$$

folgt:

$$\frac{1}{\beta^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta_1^2} = 1 + \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2}$$

oder, wenn man der Kürze halber: $\sqrt{(a_{00} - a_{11})^2 + 4a_{01}^2} = w$ setzt, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{w \pm (a_{00} - a_{11})}{2a_{01}^2} . w$$

$$\frac{1}{\beta_1^2} = \frac{w \mp (a_{00} - a_{11})}{2a_{01}^2} w$$

Somit ist:

$$\beta^2 = \frac{2a_{01}^2}{w(w \pm (a_{00} - a_{11}))} \quad \text{und} \quad \beta_1^2 = \frac{2a_{01}^2}{w(w \mp (a_{00} - a_{11}))}$$

und ferner ist:

$$kb^2 = a_{00} + \frac{2a_{01}^2}{(a_{00} - a_{11}) \pm w} \tag{8}$$

$$\pm ka^2 = a_{00} + \frac{2a_{01}^2}{(a_{00} - a_{11}) \mp w} \tag{9}$$

Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen folgt sodann:

$$k^2 a^2 b^2 = \pm \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Setzt man nun der Kürze halber:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varDelta$$

und:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = \delta$$

so hat man:

$$k^2 a^2 b^2 = \pm \delta$$

und ferner hat man nach Gleichung (7):

$$ka^2 b^2 = -\frac{\varDelta}{\delta}$$

so dass durch Division beider Gleichungen folgt:

$$k = \mp \frac{\delta^2}{\varDelta}$$

oder:

$$k = \mp \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Somit ist der Wert des Transformationsfactors ausgedrückt durch die Coefficienten der Kegelschnittsgleichung; für die Ellipse ist das obere, für die Hyperbel das untere Vorzeichen zu nehmen.

Da nun die Grösse k bekannt ist, so folgt für das Product der Halbaxenquadrate einer Ellipse:

$$a^2 b^2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}.$$

Weil aber der Inhalt einer Ellipse gleich $ab\pi$ ist, so ergibt sich für das Quadrat des Inhaltes einer Ellipse, deren Gleichung:

$$a_{00}x + a_{11}y^2 + 2a_{01}xy + 2a_{02}x + 2a_{12}y + a_{22} = 0 \text{ ist:}$$

$$J^2 = \pi^2 \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}^3 \tag{12}$$

Ferner folgt durch Addition der Gleichungen (8) und (9):

$$ka^2 \pm kb^2 = \pm (a_{00} + a_{11})$$

oder:

$$a^2 \pm b^2 = -(a_{00} + a_{11}) \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}^2 \tag{13}$$

Wollte man nun die Kegelschnittsgleichung:

$$f(x,y) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{01}xy + 2a_{02}x + 2a_{12}y + a_{22} = 0$$

in die Gleichung bezüglich der Hauptaxen des Kegelschnittes überführen, so hätte diese Gleichung zu Coefficienten der Variabeln x^2 und y^2 die $k$fachen Halbaxenquadrate, und somit muss die Gleichung:

$$\frac{1}{k} f(x,y) = A_{00}x^2 + A_{11}y^2 + 2A_{01}xy + 2A_{02}x + 2A_{12}y + A_{22} = 0$$

nach der Transformation gerade die Halbaxenquadrate zu Coefficienten der Variablen x^2 und y^2 haben.

Diese Form der Kegelschnittsgleichung, welche aus der gegebenen nur durch Multiplication mit dem Factor $\frac{1}{k}$ hervorgeht, kann, ähnlich wie in der Theorie der geraden Linie, die Normalform der Kegel-

schnittsgleichung genannt werden und lässt sich in vielen Fällen äusserst zweckmässig anwenden.

Da nach Vorigem:

$$a^2 b^2 = \pm \frac{1}{k^2} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad a^2 \pm b^2 = \pm \frac{(a_{00} + a_{11})}{k}$$

ferner allgemein:

$$A_{\lambda\mu} = \frac{a_{\lambda\mu}}{k^2}$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= \pm \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{vmatrix} \\ a^2 \pm b^2 &= \pm (A_{00} + A_{11}) \end{aligned} \tag{14}$$

Ist also die Kegelschnittsgleichung durch Multiplication mit dem Factor $\frac{1}{k}$ auf die Normalform gebracht, so stellt diejenige Determinante, deren Verschwinden ein Linienpaar bedingen würde, den Wert $a^2 b^2$ und die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2 den Wert von $a^2 \pm b^2$ dar.

Die Kegelschnittsgleichung in der Normalform gestattet also mit Hülfe der Formeln (14) direct aus ihr die Werte für die Grössen $a^2 b^2$ und $a^2 \pm b^2$ abzulesen.

Mit Hülfe des Vorangehenden lässt sich nun auch sehr einfach zeigen, dass man zur Kegelschnittsgleichung in der Normalform nur das Product der Halbaxenquadrate zu addiren hat, um die Gleichung des Asymptotenpaares des durch die Gleichung dargestellten Kegelschnittes zu erhalten.

XXIII.

Die orthoptische Linie eines Kegelschnittes.

Von

Max Greiner.

Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, von welchem aus ein gegebener Kegelschnitt unter rechten Winkeln gesehen wird, heisst die orthoptische Linie dieses Kegelschnittes.

Es hat somit jeder Punkt der orthoptischen Linie die Eigenschaft, dass die Tangenten, die von ihm aus an den Kegelschnitt gezogen werden können, zu einander senkrecht stehen; so dass also die orthoptische Linie auch als der geometrische Ort der Schnittpunkte der zu einander senkrechten Tangentenpaare des Kegelschnittes definirt werden kann.

Sei nun:

$$f(x,y,z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{01}xy + 2a_{02}xz + 2a_{12}yz = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in homogenen Coordinaten, so sind die Gleichungen der Tangenten irgend zweier Punkte mit den Coordinaten $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$:

$$xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0) = 0 \qquad (1)$$

$$xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1) = 0 \qquad (2)$$

wozu aber noch die Gleichungen treten müssen:

$$x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0) \equiv 0 \qquad (3)$$

$$x_1 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_1 f'(z_1) \equiv 0 \qquad (4)$$

weil die Punkte (0) und (1) dem Kegelschnitte angehören.

Sollen aber die beiden Tangenten der Punkte (0) und (1) des Kegelschnittes zu einander senkrecht stehen, so muss noch die Bedingungsgleichung:

$$f'(x_0)f'(x_1)+f'(y_0)f'(y_1)\equiv 0 \tag{5}$$

stattfinden.

Eliminirt man nun aus den fünf Gleichungen die Grössen x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1, so erhält man als Resultat der Elimination die Gleichung der gesuchten Ortscurve.

Setzt man nun der Kürze halber:

$$\left.\begin{aligned} a_{00}f'(x_1)+a_{01}f'(y_1) &= \lambda \\ a_{01}f'(x_1)+a_{11}f'(y_1) &= \mu \\ a_{02}f'(x_1)+a_{12}f'(y_1) &= \nu \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so geht Gleichung (5) über in:

$$x_0 \,.\, \lambda+y_0\,\mu+z_0\,\nu=0$$

Eliminirt man nun aus dieser Gleichung und aus den Gleichungen (1) und (3) die Grössen x_0, y_0, z_0 so folgt:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ f'(x) & f'(y) & f'(z) \\ f'(x_0) & f'(y_0) & f'(z_0) \end{vmatrix} = 0$$

oder, indem man diese Determinante nach der letzten Horizontalreihe entwickelt:

$$f'(x_0)(\nu f'(y)-\mu f'(z))+f'(y_0)(\lambda f'(z)-\nu f'(x))+f'(z_0)(\mu f'(x)-\lambda f'(y))=0$$

Eliminirt man nun aus dieser Gleichung und den Gleichungen (1) und (5) die Grössen $f'(x_0)$, $f'(y_0)$, $f'(z_0)$, so hat man:

$$\begin{vmatrix} \nu f'(y)-\mu f'(z) & \lambda f'(z)-\nu f'(x) & \mu f'(x)-\lambda f'(y) \\ x & y & z \\ f'(x_1) & f'(y_1) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt aber:

$$f'(x_1)[\lambda zf'(z)-\nu zf'(x)-\mu yf'(x)+\lambda yf'(y)]+f'(y_1)[\mu xf'(x)-\lambda xf'(y) \\ -\nu zf'(y)+\mu zf'(z)]=0$$

Addirt und subtrahirt man im Factor von $f'(x_1)$ die Grösse $\lambda xf'(x)$ und im Factor von $f'(y_1)$ die Grösse $\mu\, yf'(y)$, so geht obige Gleichung unter Berücksichtigung der Gleichheit:

$$xf'(x)+yf'(y)+zf'(z)\equiv 2f$$

über in:

$$f'(x_1)[2\lambda f-f'(x)(\lambda x+\mu y+\nu z)]+f'(y_1)[2\mu f-f'(y)(\lambda x+\mu y+\nu z)]=0 \tag{7}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (6) der Reihe nach mit x, y, z und addirt dieselben, so folgt:

$$\lambda x+\mu y+\nu z=\tfrac{1}{2}f'(x)f'(x_1)+\tfrac{1}{2}f'(y)f'(y_1)$$

und somit wird aus Gleichung (7):

$$f'(x_1)[4\lambda f-f'(x)(f'(x)f'(x_1)+f'(y)f'(y_1))]$$
$$+f'(y_1)[4\mu f-f'(y)(f'(x)f'(x_1)+f(y)f'(y_1))]=0$$

Substituirt man in diese Gleichung die Werte von λ und μ, so erhält man:

$$\left(\frac{f'(x_1)}{f'(y_1)}\right)^2+\frac{2f'(x_1)}{f'(y_1)}\,\frac{4a_{01}f-f'(x)f'(y)}{4a_{00}f-f'(x)^2}+\frac{4a_{11}f-f'(y)^2}{4a_{00}f-f'(x)^2}=0 \tag{8}$$

Diese Gleichung enthält nunmehr die Coordinaten des Punktes (1); würde man nun aus den obigen fünf Gleichungen ebenso die Coordinaten des Punktes (0) eliminiren, so müsste man selbstverständlich auf dieselbe Endgleichung (8) zurückkommen, und somit folgt, dass die Wurzeln der quadratischen Gleichung (8) nichts anders als die Grössen:

$$\frac{f'(x_0)}{f'(y_0)} \quad \text{und} \quad \frac{f'(x_1)}{f'(y_1)}$$

sind. Demnach ist:

$$\frac{f'(x_0)}{f'(y_0)}\cdot\frac{f'(x_1)}{f'(y_1)}=\frac{4a_{11}f-f'(y)^2}{4a_{00}f-f'(x)^2}$$

Da aber zufolge der Gleichung (5) $f'(x_0)f'(x_1)+f'(y_0)f'(y_1)\equiv 0$ ist, so folgt:

$$\frac{4a_{11}f-f'(y)^2}{4a_{00}f-f'(x)^2}=-1$$

oder:

$$(a_{00}+a_{11})f(x,y)-[\tfrac{1}{4}f(x)^2+\tfrac{1}{4}f(y^2)]=0 \tag{9}$$

Diese Gleichung stellt also den Ort der Schnittpunkte aller rechtwinkligen Tangenten des Kegelschnittes dar und ist somit die Gleichung der orthoptischen Linie. Ordnet man die Glieder derselben nach Potenzen von x und y so folgt:

$$x^2+y^2-2x\,\frac{a_{10}\,a_{12}-a_{11}\,a_{02}}{a_{00}\,a_{11}-a_{01}^{\,2}}-2y\,\frac{a_{01}\,a_{02}-a_{00}\,a_{12}}{a_{00}\,a_{11}-a_{01}^{\,2}}$$
$$+\frac{a_{00}\,a_{22}+a_{11}\,a_{22}-a_{02}^{\,2}-a_{12}^{\,2}}{a_{00}\,a_{11}-a_{01}^{\,2}}=0$$

Da aber die Coefficienten $\frac{a_{10}\,a_{12}-a_{11}\,a_{02}}{a_{00}\,a_{11}-a_{01}^{\,2}}$ und $\frac{a_{01}\,a_{02}-a_{00}\,a_{12}}{a_{00}\,a_{11}-a_{01}^{\,2}}$ nichts anders als die Coordinaten α und β des Kegelschnittmittelpunktes sind, so folgt aus obiger Gleichung, dass die orthoptische Linie eines Kegelschnittes ein mit ihm concentrischer Kreis ist. Sei nun R sein Radius, so wäre seine Gleichung:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$$

und somit ist:

$$\alpha^2+\beta^2-R^2=\frac{a_{00}\,a_{22}+a_{11}\,a_{22}-a_{02}^{\,2}-a_{12}^{\,2}}{a_{00}\,a_{11}-a_{01}^{\,2}}$$

woraus folgt:

$$R^2=-(a_{00}+a_{11})\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Aus dem über den Transformationsfactor Erwähnten geht hervor, dass zufolge der Gleichung (13):

$$R^2 = a_2 \pm b^2 \quad \text{ist.}$$

d. h. Die orthoptische Linie einer Ellipse ist ein mit ihm concentrischer Kreis, dessen Radienquadrat gleich der Quadratsumme der Halbaxe ist. Und:

Die orthoptische Linie einer Hyperbel ist ein mit ihr concentrischer Kreis, dessen Radienquadrat gleich der Differenz der Halbaxenquadrate ist.

Für die Parabel ist bekanntlich $a_{00}\,a_{11}-a_{01}^{\,2}=0$; somit ist der Radius ihres orthoptischen Kreises unendlich gross, also ihre orthoptische Linie eine Gerade, die, wie leicht zu beweisen ist, senkrecht auf ihrer Hauptaxe steht und mit ihrer Leitlinie zusammenfällt.

Besonders interessante Sätze ergeben sich aber, wenn man sich die Gleichung des Kegelschnittes in homogenen Liniencoordinaten gegeben denkt.

Sei nämlich:

$$F(u,v,w)=e_{00}\,u^2+e_{11}\,v^2+e_{22}\,w^2+2e_{01}\,uv+2e_{02}\,uw+2e_{12}\,vw=0$$

die Gleichung des Kegelschnittes, so müssen, wenn u_0, v_0, w_0 und u_1, v_1, w_1 die Coordinaten zweier Tangenten des Kegelschnittes sind, die Gleichungen bestehen:

$$u_0 \tfrac{1}{2} F'(u_0) + v_0 \tfrac{1}{2} F'(v_0) + w_0 \tfrac{1}{2} F'(w_0) = 0 \qquad (1)$$

$$u_1 \tfrac{1}{2} F'(u_1) + v_1 \tfrac{1}{2} F'(v_1) + w_1 \tfrac{1}{2} F'(w_1) = 0 \qquad (2)$$

Die Gleichungen der beiden Tangenten sind aber:

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0 \qquad (3)$$

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0 \qquad (4)$$

Und die Bedingung, dass dieselben auf einander senkrecht stehen, ist:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0 \qquad (5)$$

Aus diesen fünf Gleichungen sind nun die Grössen u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1 zu eliminiren, um die Gleichung der orthoptischen Linie zu erhalten.

Durch Elimination der Grössen u_1, v_1, w_1 aus den Gleichungen (2), (4) und (5) folgt:

$$\begin{vmatrix} \tfrac{1}{2} F'(u_1) & \tfrac{1}{2} F'(v_1) & \tfrac{1}{2} F'(w_1) \\ x & y & z \\ u_0 & v_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und hieraus ergibt sich, wenn man entwickelt und nach u_1, v_1, w_1 ordnet:

$$\begin{aligned} & u_1 [e_{01} u_0 z - e_{00} v_0 z + e_{02} v_0 x - e_{02} u_0 y] \\ + & v_1 [e_{11} u_0 z - e_{01} v_0 z + e_{12} v_0 x - e_{12} u_0 y] \\ + & w_1 [e_{12} u_0 z - e_{02} v_0 z + e_{22} v_0 x - e_{22} u_0 y] = 0 \end{aligned}$$

Setzt man für die Coefficienten u_1, v_1, w_1 der Kürze halber die Grössen A, B, C, so folgt für obige Gleichung:

$$u_1 A + v_1 B + w_1 C = 0$$

Eliminirt man nun aus dieser Gleichung und den Gleichungen (4) und (5) die Grössen u_1, v_1, w_1, so hat man:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ u_0 & v_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Entwickelt man diese Determinante, setzt die Werte von A B, C ein und ordnet die Gleichung nach Potenzen von u_0 und v_0, so folgt, nachdem man die ganze Gleichung mit u_0^2 dividirt hat:

$$\left(\frac{u_0}{v_0}\right)^2 + 2\frac{u_0}{v_0}\,\frac{e_{02}\,yz + e_{12}xz - e_{00}\,z^2 - e_{22}\,xy}{e_{22}\,y^2 - 2e_{12}\,yz + e_{11}\,z^2} + \frac{e_{22}\,x^2 - 2e_{02}xz + e_{00}z^2}{e_{22}\,y^2 - 2e_{12}yz + e_{11}z^2} = 0$$

Würde man aus den fünf Gleichungen statt der Grössen u_1, v_1, w_1 die Grössen u_0, v_0, w_0 eliminiren, so erhielte man ganz dieselbe Endgleichung in $\left(\frac{u_1}{v_1}\right)$; folglich sind die Wurzeln obiger quadratischen Gleichung die Grössen:

$$\frac{u_0}{v_0} \quad \text{und} \quad \frac{u_1}{v_1}$$

und somit ist:

$$\frac{u_0}{v_0}\cdot\frac{u_1}{v_1} = \frac{e_{22}\,x^2 - 2\,e_{02}\,x\,z + e_{00}\,z^2}{e_{12}\,y^2 - 2\,e_{12}\,y\,z + e_{11}\,z^2}$$

Da aber zufolge Gleichung (5) $u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0$ ist, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{e_{12}\,x^2 - 2\,e_{02}\,x\,z + e_{00}\,z^2}{e_{12}\,y^2 - 2\,e_{12}\,y\,z + e_{11}\,z^2} = -1$$

Folglich ist die Gleichung der orthoptischen Linie, ausgedrückt durch durch gewöhnliche Coordinaten:

$$K_F = e_{22}\,(x^2 + y^2) - 2\,e_{02}\,x - 2\,e_{12}\,y + (e_{00} + e_{11}) = 0$$

aus welcher ebenfalls ersichtlich ist, dass dieselbe ein mit dem Kegelschnitte concentrischer Kreis ist.

Für den Kegelschnitt, dessen Gleichung:

$$\Phi(u,v,w) = \varepsilon_{00}\,u^2 + \varepsilon_{11}\,v^2 + \varepsilon_{22}\,w^2 + 2\,\varepsilon_{01}\,uv + 2\,\varepsilon_{02}\,uw + 2\,\varepsilon_{12}\,vw = 0$$

ist ergibt sich ganz analog dem Obigem die Gleichung der orthoptischen Linie als:

$$K_\Phi = \varepsilon_{22}\,(x^2 + y^2) - 2\,\varepsilon_{02}\,x - 2\,\varepsilon_{12}\,y + (\varepsilon_{00} + \varepsilon_{11}) = 0$$

und somit ist die Gleichung der orthoptischen Linie, welche dem Kegelschnitte von der Gleichung:

$$F(u,v,w) - \lambda\,\Phi(u,v,w) = 0 \text{ zugehört:}$$

$$K_F - \lambda\,K_\Phi = 0$$

Alle Kegelschnitte, deren Gleichungen die Form:

$$F(u,v,w) - \lambda\,\Phi(u,v,w) = 0$$

haben, sind aber bekanntlich einem und demselben Vierseit einbeschrieben, und somit ergibt sich der Satz:

Die orthoptischen Linien aller Kegelschnitte, die einem und demselben Vierseit einbeschrieben sind, gehen sämmtlich durch zwei feste Punkte. Da aber diese beiden festen Punkte nur eine einzige Gerade bestimmen, so gibt es unter den sämmtlichen Kegelschnitten, die einem gegebenen Vierseit einbeschrieben sind, nur eine einzige Parabel, deren Leitlinie eben die Verbindungslinie dieser beiden festen Punkte ist.

Unter den, einem Vierseit einbeschriebenen, Kegelschnitten gibt es aber insbesondere drei, die sich auf Punktepaare reduciren; nämlich auf die beiden Gegeneckenpaare und auf das Schnittpunktepaar der Gegenseiten des Vierseits. Die orthoptischen Linien dieser Kegelschnitte sind diejenigen Kreise, die man über den Diagonalen des Vierseits, als Durchmesser genommen, beschreiben kann. Somit folgt der Satz:

Die über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmesser beschriebenen Kreise haben eine und dieselbe gemeinschaftliche Sehne.

Daraus folgt unmittelbar:

Die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits gehören einer und derselben Geraden an.

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Gerade der Ort der Mittelpunkte aller dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte und somit die Axe der einzigen unter diesen Kegelschnitten befindlichen Parabel ist.

Denn bekanntlich ist die Gleichung des Mittelpunktes eines Kegelschnittes, der durch die Gleichung:

$$F(u,v,w) - \lambda\, \Phi(u,v,w) = 0$$

dargestellt wird:

$$\tfrac{1}{2} F'(w) - \lambda \tfrac{1}{2} \Phi' = 0$$

oder:

$$(e_{02} - \lambda\, \varepsilon_{02})\, u + (e_{12} - \lambda\, \varepsilon_{12})\, v + (e_{22} - \lambda\, \varepsilon_{22})\, w = 0$$

woraus sofort ersichtlich ist, dass die Mittelpunkte aller einem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte einer Geraden angehören.

Da aber die Mitten der drei Diagonalen, welche als die Mittelpunkte jener Kegelschnitte, die sich auf Punktepaare reduciren, angesehen werden können, einer Geraden angehören, so muss diese auch die Mittelpunkte der übrigen dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte enthalten. Ihr unendlich ferner Punkt ist alsdann der Mittelpunkt der einzigen unter den Kegelschnitten befindlichen Parabel.

XXIV.

Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Fortsetzung von N. III.

Artikel III. (§ 10—§ 12.)

Hierzu 1 Tafel.

Berechnung der reellen Wurzeln.

Einleitung.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Bestimmung der reellen Wurzeln auf analytischem Wege. Dieselbe lehnt sich an einfache geometrische Constructionen an (§ 2., Aufg. III., § 3., Krit. II. u. Krit. III.). Wir können uns Schritt für Schritt ein Bild von den Rechenoperationen machen, worin ein nicht unwesentlicher Vorteil besteht.

Wenn wir hier geometrische Lösungen mit unterlaufen lassen und auf Figuren verweisen, so geschieht es einerseits um diesen Zusammenhang vor Augen zu haben, ohne ihn erst aus dem Früheren heraussuchen zu müssen, andrerseits um uns kürzer fassen zu können.

Zugleich geht daraus hervor, wie die analytische Methode durch geometrische Hülfsmittel unterstützt werden kann, abgesehen von der geometrischen Auflösung in Artikel I.

§ 10.

Wir stellen uns zunächst das für die Trennung der reellen Wurzeln wichtige

Problem I. Auf der $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Seite eines beliebig gegebenen Wertes x_1 ein Intervall $\left\{\begin{matrix}x_1\, x\\ x\, x_1\end{matrix}\right\}$ *) zu bestimmen, in welchem höchstens eine Wurzel w von $f(x)=0$ liegt.

Geometrische Auflösung.
(Vergl. § 3., Krit. II. u. § 8., III.).

1) Löse § 2., Aufg. I. für $c \leqq x_1$.

2) Construire laut Fig. I. der Reihe nach HK, C, O, $\mathfrak{P}$ und bestimme einen Curvenpunkt F auf der $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Seite von P so, dass die Tangenten in T (siehe § 3, Anmerkung 1)) die Ordinate $\mathfrak{P}P$ nicht unterhalb $\mathfrak{P}$ schneidet **).

$$x = \text{Abscisse von } T.$$

In Fig. I. ist

$$y = F(x) + (x_1 - x) F'(x) \geqq y_1 = \mathfrak{F}(x_1),$$

d. h.

$$\lambda (x-h)^r + (x_1 - x)\, \lambda r (x-h)^{r-1} \geqq \mathfrak{F}(x_1)$$

also

$$\lambda (r-1)(x-h)^r - \lambda r (x_1 - h)(x-h)^{r-1} + \mathfrak{F}(x_1) \leqq 0.$$

Dividiren wir durch $\lambda(x_1-h)^r$, substituiren

$$z = \frac{x-h}{x_1-h},$$

*) Zur kürzeren Ausdrucksweise können wir solche Intervalle symbolisch durch

$$(x_1\, w_2\, x)\, w \text{ resp. } w\,(x\, w_2\, x_1)$$

bezeichnen. (Siehe z. B. Modif. Verf.).

**) Der geometrische Ort der Berührungspunkte der von $\mathfrak{P}$ an das System $y=\lambda(x-h)^r$, λ variabel, gezogenen Tangenten ist nach § 8., II. eine gleichseitige Hyperbel.

sowie

$$\mathfrak{F}(x_1) = F(x_1) - \mathfrak{k}f(x_1) = \lambda(x_1 - h)^r - \mathfrak{k}f(x_1),$$

so ergibt sich folgende

Algebraische Lösung.

1) Löse § 2., Aufg. I. für $c \overset{=}{<} x_1$.

2) Berechne $h = c - a$,

$$p = \frac{\mathfrak{k}f(x_1)}{\lambda(x_1 - h)^r} = \frac{\mathfrak{k}f(x_1)}{\lambda(a - c + x_1)^r}. \tag{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \gtrless 1 \text{ so, dass} \\ \varphi_r(z) = (r-1)z^r - rz^{r-1} + 1 \overset{=}{<} p \end{array} \right\} \tag{2}$$

schliesslich:

$$x = z(x_1 - h) + h \overset{=}{>} c \tag{3}$$

Die Lösung von (2) ersiehe aus § 12.

Problem II. Aus einer $\left\{\begin{array}{l}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{array}\right\}$ Grenze x_1 einer Wurzel w eine $\left\{\begin{array}{l}\text{obere}\\ \text{untere}\end{array}\right\}$ Grenze x derselben zu berechnen *).

Auflösung.

Löse wiederholt Problem I., das gefundene x jedesmal als neues x_1 betrachtend, so lange bis $f(x)$ das entgegengesetzte Vorzeichen von $f(x_1)$ erhält. Dieser Fall tritt stets ein, wenn w keine mehrfache Wurzel ist (§ 8., III., 1)).

Wir brauchen nur

$$z = \text{einem Näherungswert von (2)} \tag{1}$$

zu nehmen.

---

*) Oder was dasselbe: Ein Intervall $\left\{\begin{array}{l}(x_1\ x)\\ (x\ \ x_1)\end{array}\right\}$ zu bestimmen, welches genau eine Wurzel enthält. Es möchte sich empfehlen solche Intervalle symbolisch durch $(x_1\,w\,x)$ resp. $(x\,w\,x_1)$ zu bezeichnen.

Für diejenigen x_1, für welche $p < 1$ ($\mathfrak{F}(x_1) > 0$) genügt nach § 8., III., 2), indem wir in § 9., I. (5) statt $x, x', x_1 : x-h, x'-h, x_1-h$ und statt

$$\varphi(x_1):(x_1-h)+\frac{\mathfrak{k}' f(x_1)}{(x_1-h)^{r-1}}$$

ferner

$$z = 1+\frac{\mathfrak{k}}{2r(r-1)} \quad (p \text{ wie oben})$$

setzen, der Wert:

$$z = z_0 \pm \sqrt{z_0^2-1}$$

Ist $p > 1$ ($\mathfrak{F}(x_1) < 0$), so genügt $z = \frac{r}{r-1}$ (2)

Liegt x_1 der Wurzel hinreichend nahe, so hat man Problem I. nur einmal aufzulösen.

Ist w eine mehrfache Wurzel, so findet eine fortwährende Annäherung auf der $\left\{\begin{matrix}\text{neg.}\\ \text{pos.}\end{matrix}\right\}$ Seite statt.

Wie in diesem Fall die Wurzel getrennt werden kann von der nächst $\left\{\begin{matrix}\text{folgenden}\\ \text{vorhergehenden}\end{matrix}\right\}$ nicht mit ihr zusammenfallenden Wurzel, geht aus der Schlussbemerkung in Artikel I. hervor.

Ist $x = F(x_1)$ eine Lösung von Problem I. in der angegebenen Weise und schliessen wir den Fall aus, dass w eine mehrfache Wurzel ist, so genügt dem Problem die $r$fach iterirte Function

$$x = \underset{1}{F}(\underset{2}{F}(\underset{3}{F}(\ldots \underset{r}{(}x_1\underset{r}{)}\ldots\underset{1}{)}\underset{2}{)}\underset{3}{)}),$$

wo r endlich ist, $= 1$ oder $= 2$ ... etc.

Beispiel I.

(§ 2., Beispiel IIa., (3)).

$$x^6+6x^5+9x^4-5x^3-15x^2+0x+5 = 0.$$

Die kleinste positive Wurzel w zu trennen. Hier ist $x_1 = 0$ eine untere Grenze von w, eine obere wird gesucht.

Wir lösen § 2., Aufg. I. für $x_1 = 0$, $c = 0$ und $\lambda = 1$ und finden wie in § 2.:

$$a = 0{,}1; \quad r = 6; \quad \mathfrak{k} = \frac{1}{60}, \quad h = -0{,}1.$$

Weiter ist

1) für $x_1 = 0$:

$$p = \frac{5}{60} \cdot \frac{1}{(0{,}1)^6} = \frac{10^6}{12} = 83333{,}33\ldots; \quad \varphi_6(z) = 5z^6 - 6z^5 + 1;$$

$$\varphi_6(5) < p; \quad z = 5; \quad x = (5-1)0{,}1 = 0{,}4.$$

Da $f(0{,}4) = 2{,}576 > 0$, so liegt zwischen 0 und 0,4 keine Wurzel, wir fahren also fort:

2) für $x_1 = 0{,}4$:

$$p = \frac{1}{60}\frac{f(0{,}4)}{(0{,}5)^6} = \frac{1}{60}.2{,}576.64 = 2{,}74\ldots; \quad \varphi_6\left(\frac{6}{5}\right) = 1 < p;$$

$$z = \frac{6}{5} = 1{,}2; \quad x = 1{,}2(0{,}5) - 0{,}1 = 0{,}5.$$

Es ist wieder $f(0{,}5) = 1{,}391 > 0$ also

3) für $x_1 = 0{,}5$:

$$p = \frac{1}{60}\frac{f(0{,}5)}{(0{,}6)^6} = \frac{1}{60} \cdot \frac{1{,}391.10^6}{6^6} = 0{,}49\ldots; \quad \varphi_6(1{,}14) = 0{,}422 < p;$$

$$z = 1{,}14; \quad x = 1{,}14.0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}584\ldots; \quad f(0{,}58) = 0{,}43.$$

4) für $x_1 = 0{,}58$:

$$p = \frac{1}{60} \cdot \frac{f(0{,}58)}{(0{,}68)^6}; \quad \log p = 0{,}860\ldots - 2; \quad \log \varphi_6 1{,}06 < \log p;$$

$$z = 1{,}06; \quad x = 1{,}06.0{,}68 - 0{,}1 = 0{,}6208; \quad f(0{,}62) = -0{,}021\ldots$$

Die Wurzel liegt also zwischen

0,588 und 0,62.

Zur geometrischen Interpretation verweisen wir auf Artikel I., Fig. IV a.

Wir können in dieser Weise fortfahren und die übrigen Wurzeln trennen, unter Beibehaltung von $c = 0$ und auch der Werte a, r, $\mathfrak{k}$, h bei der Trennung der 3, 5 ... Wurzel (in pos. Sinne), während derjenigen der 2, 4 ... Wurzel ein anderes $\mathfrak{k}$ (hier $\mathfrak{k} < 0$) zu Grunde gelegt werden muss (r kann durchweg $\overline{\overline{>}}\, n$ beibehalten werden).

Im vorliegenden Beispiel kann sich die Methode an die Fig. IV a und Fig. IV b des Artikel I. im Geiste anlehnen.

Es kann indes hierbei der Fall eintreten, dass die Trennung

sehr langsam von Statten geht. Um diesem Uebelstande zu begegnen, lassen wir c nachrücken, d. h. wir setzen z. B. die Trennung der Wurzeln, die >1, >10, >100 ... sind, bezüglich

$$c = 1; \quad 10; \quad 100.$$

Mit Vorteil können wir uns des Fourier'schen Kriterium's bedienen *).

Beispiel II.

$$f(x) = x^7 + x^6 - 6x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 4x - 1 = 0 \qquad (1)$$

Die $x_1 = -2$ auf der pos. Seite benachbarte Wurzel zu trennen.

---

*) Anmerkung I. Haben wir in einem Intervall m reelle Wurzeln ermittelt und gehen in demselben z Zeichen-Wechsel „verloren", so entspricht die Differenz $d = z - m$ (= paar oder 0) eben so vielen complexen Wurzeln. (Die in einem anderen, ganz ausserhalb des ersteren liegenden Intervall ermittelte Differenz $d_1 = z_1 - m_1$ entspricht d_1 weiteren imaginären Wurzeln).

Anmerkung II. Um einen Vergleich des vorliegenden Verfahrens mit denen von Lagrange und Sturm anzustellen, bezeichnen wir die successive erhaltenen Werte x — welche wir als neue x_1 betrachten — mit

$$x_{1,0} \ x_{1,1} \ x_{1,2} \ldots x_{1,r} \ x_{1,r+1} \ldots$$

Es liegt dann zwischen je 2 aufeinander folgenden Werten z. B. $x_{1,r}$ und $x_{1,r+1}$ keine oder eine Wurzel, je nachdem $f(x_{1,r})$ und $f(x_{1,r+1})$ gleiche od. entgegs. Vorzeichen haben.

Die Methode von Lagrange, verbessert durch Cauchy, bestimmt die Reihe der x_1 so, dass

$$x_{1,r+1} - x_{1,r} = \varepsilon = \text{constant}.$$

Die von Sturm gibt die Anzahl der reellen Wurzeln in einen beliebigen Intervall $(x_1 \, x')$ als Zahl der Zeichenwechsel einer gewissen Reihe, während wir in $(x_{1,0} \, x_{1,r})$ — dessen Endglied vom Anfangsglied abhängig ist — ebenfalls die Anzahl der reellen Wurzeln als Zahl der Wechsel einer Reihe finden. Während aber bei Sturm die Wurzeln erst getrennt werden müssen, sind dieselben hier bereits getrennt.

Wir können indes auch gleichzeitig von x_1 aus eine Reihe

$$x_{1,0}, \ x_{1,1}, \ x_{1,2} \ldots x_{1,r}$$

und von $x' > x_1$ aus in ähnlicher Weise in negativem Sinne

$$x^{1,s} \ldots x^{1,2}, \ x^{1,1}, \ x^{1,0}$$

bilden.

Als Bspl. hierzu empfehlen wir obige Glg. für $x_1 = 0$ und $x' = 1$ zu behandeln (Art. I., Fig. IV a).

Es ist $f(x_1) = -1 < 0$, § 2., Aufg. I., Fall b) zu lösen. Wir finden als zulässig $c = -2$ und da die nach -2 transformirte Gleichung

$$x^7 - 13x^6 + 66x^5 - 165x^4 + 210x^3 - 126z^2 + 28x - 1 = 0 \qquad (2)$$

lautet (dieselbe Glg. wie in § 2., Bspl. IIa (1)), so weiter:

$$\lambda = 1, \quad p = 6, \quad r = 6, \quad a = 0{,}1, \quad \mathfrak{k} = -\frac{5}{42}(0{,}1)^4.$$

Ferner

$$p = -\frac{5}{42}(0{,}1)^4 \frac{f(-2)}{(0{,}1)^6} = \frac{500}{42} = 11{,}905 \ldots > \varphi_6(1{,}49)$$

$$z = 1{,}49; \quad x = 1{,}49 . 0{,}1 - 2 - 0{,}1 = -2 + 0{,}049.$$

Da $f(-2)$ und $f(-2+0{,}049)$ entgs. Vorzeichen haben, so liegt also zwischen

$$-2 \quad \text{und} \quad -2+0{,}049$$

eine und nur eine Wurzel von (1).

Wir haben also die Wurzel getrennt durch einmalige Lösung des Problems I.

Betrachten wir (2) als ursprünglich gegeben und suchen eine obere Grenze der kleinsten pos. Wurzel, so finden wir, $x_1 = 0$ und $c = 0$ gesetzt, $x = 0{,}049$. (Die Operationen sind dieselben).

Beispiel III.

$$\binom{44}{0}x^{22} - \binom{48}{1}x^{21} + \binom{42}{2}x^{20} - \binom{41}{3}x^{19} + \ldots$$
$$+ \ldots \binom{24}{20}x^2 - \binom{23}{21}x + \binom{22}{22} = 0\,{*})$$

Die kleinste positive Wurzel zu trennen. Wir setzen $x_1 = 0$ und $c = 0$ und lösen § 2., Aufg. I., Fall a), da $f(0) = +1 > 0$; $r = 22$; ferner:

$$k_{22} = 1, \quad k_{20} = \frac{\binom{22}{2}}{\binom{42}{2}}a^2, \quad k_{18} = \frac{\binom{22}{4}}{\binom{40}{4}}a^4, \quad k_{16} = \frac{\binom{22}{6}}{\binom{38}{6}}a^6, \quad k_{14} = \frac{\binom{22}{8}}{\binom{36}{8}}$$

---

*) Die Wurzeln sind sämmtlich pos. reell und zwar der Grösse nach

$(2\sin 2)^2$, $(2\sin 3.2)^2$, $(2\sin 5.2)^2$ ... $(2\sin 43.2)^2$.

$$k_{12} = \frac{\binom{22}{10}}{\binom{34}{10}} a^{10},\ k_{10} = \frac{\binom{22}{12}}{\binom{32}{12}} a^{12},\ k_8 = \frac{\binom{22}{14}}{\binom{30}{14}} a^{14},\ k_6 = \frac{\binom{22}{14}}{\binom{28}{16}} a^{16},$$

$$k_4 = \frac{\binom{22}{18}}{\binom{26}{18}} a^{18},\ k_2 = \frac{\binom{22}{20}}{\binom{24}{20}} a^{20}.$$

Wählen wir $a = 0{,}1$, so ist der kleinste dieser Werte

$$k +_{n,2} = \frac{\binom{22}{20}}{\binom{24}{20}} a^{20} = \frac{\binom{22}{2}}{\binom{24}{4}} a^{20} = \mathfrak{k} \ (\lambda = 1 \text{ genommen}),$$

$$p = \frac{\mathfrak{k} f(0)}{a^{22}} = \frac{\binom{22}{2}}{\binom{24}{4}} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{100}{46} = 2{,}17\ldots > \varphi_{22}(1{,}06) = 1{,}88\ldots$$

$z = 1{,}06;\quad x = (z-1)a = 0{,}006;\quad f(x) < 0.$

Es liegt also zwischen 0 und 0,006 eine und nur eine Wurzel. (Dieselbe ist = 0,00487 ..., die folgende 0,C4371 ...).

Die Trennung ist also wieder beim ersten Schritt erfolgt.

Modificirtes Verfahren.

Bei der Trennung in pos. Sinne können wir uns eines Verfahrens bedienen, wonach die Bedingung Problem I. (2) dadurch erfüllt wird, dass wir nicht zuerst a wählen und dann z bestimmen, sondern umgekehrt.

Wir wollen dies an einem

Beispiel

erläutern. Es sei § 2., Beispiel III.:

$$x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 0.x + 5 = 0.$$

Die kleinste pos. Wurzel von $x_1 = 0$ aus zu trennen.

Für $c = 0$, $x_1 = 0$ finden wir: $r = 6$, ferner

$$k +_{n,2} = \text{dem kleinsten der Werte } 1,\ \frac{15}{9} a^2,\ 4a^3.$$

Ist $a < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0{,}62996$ und $< \frac{15}{36} = 0{,}4166\ldots$, so ist

$$\mathfrak{k} = 4a^3,$$
$$p = \frac{\mathfrak{k} f(0)}{a^6} = \frac{20}{a^3};$$

obige Bedingung algebr. Lösung (2): $a \overset{=}{<} \sqrt[3]{\frac{20}{\varphi_6(z)}}$. Wir können also sagen:

Zwischen 0 und $x = a(z-1)$ liegt höchstens eine Wurzel, wenn $z > 1$ und $a < 0{,}4166\ldots$ und $< \sqrt[3]{\frac{20}{\varphi_6(z)}}$ ist.

Wählen wir z. B.

1) $z = 2$, so erhalten wir $x = 0{,}4166 \,.\, 1 \;\; = 0{,}4166$
2) $z = 3$, - - - $x = 0{,}209 \;.\, 2 \;\; = 0{,}418$
3) $z = 2{,}5$, - - - $x = 0{,}315 \;.\, 1{,}5 = 0{,}472$

Der letzte Wert ist also der vorteilhaftere.

Transformiren wir die Gleichung nach einem $c \overset{=}{<} x$, etwa $= 0{,}47$, behandeln die neue in derselben Weise u. s. w., so muss die kleinste pos. Wurzel getrennt erscheinen und so nach und nach jede *).

Auch hierbei können wir mit Vorteil das Fourier'sche Kriterium anwenden (Anmerk. I. nach Bspl. I.).

Als Beispiel empfehlen wir die kleinste pos. Wurzel der obigen Gleichung vom 22. Grade zu trennen.

§ 11.

Nachdem wir im Vorigen gezeigt, wie die reellen Wurzeln getrennt werden können, bleibt uns noch übrig anzugeben, wie man sich einer beliebigen Wurzel von einer oberen oder unteren Grenze derselben aus annähern kann.

Problem I. Auf der $\left\{\begin{array}{c}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{array}\right\}$ Seite eines beliebig ge-

---

*) Dies Verfahren ist gleich dem folgenden:

Bestimme — wir verweisen auf Problem I. *) —: $(0{,}47 \underset{?}{w} x) w$ für $c = 0{,}47$; setze $x = x_1$ und bestimme $(x_1 \underset{?}{w} x) w$ für $c = x_1$ u. s. f.

gebenen Wertes x_1 ein Intervall $\begin{Bmatrix} x_1\, x \\ x\, x_1 \end{Bmatrix}$ *) zu bestimmen, in welchem keine Wurzel von $f(x) = 0$ liegt.

Geometrische Auflösung.

(Vergl. § 2., Aufg. III., § 3., Krit. III.).

1) Löse § 2., Aufg. II. für $c \overset{=}{<} x_1$.

2) Construire laut Fig. II. nacheinander HK, C, O, $\mathfrak{P}$, die Tangenten in P und $\mathfrak{P}$ an K resp. $\mathfrak{K}$ nach § 3., Anmerkung, und bezüglich

$$x_1 < x \overset{<}{=} s',$$

$$s \overset{<}{=} x < x_1.$$

Es ist für ein solches x:

$$\lambda(x-h)^r - \alpha x - \beta \overset{=}{<} 0,$$

wo $\alpha = \mathfrak{F}'(x_1)$ und $\beta = \mathfrak{F}(x_1) - x_1\,\mathfrak{F}'(x_1)$,
oder

$$\lambda(x-h)^r - \alpha(x-h) - (\alpha h + \beta) \overset{=}{<} 0,$$

$$(\alpha h + \beta)\left(\frac{1}{x-h}\right)^r + \alpha\left(\frac{1}{x-h}\right)^{r-1} - \lambda \overset{=}{>} 0,$$

$$-\left\{\left(-\frac{\beta}{\alpha} - h\right)\frac{1}{x-h}\right\}^r + \left\{\left(-\frac{\beta}{\alpha} - h\right)\frac{1}{x-h}\right\}^{r-1} - \frac{\lambda}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha} - h\right)^{r-1} \overset{=}{>} 0.$$

Dies giebt folgende

1. *Algebraische Auflösung.*

1) Wie vor.

2) Berechne nacheinander $f(x_1)$; $f'(x_1)$; $h = c - a$;
$F'(x_1) = \lambda r (x_1 - h)^{r-1}$;
$\alpha = F'(x_1) - kf'(x_1)$; $F(x_1) = \lambda(x_1 - h)^r$; $\mathfrak{F}(x_1) = F(x_1) - kf(x_1)$;
$\beta = \mathfrak{F}(x_1) - \alpha . x_1$,

$$\gamma = -\frac{\beta}{\alpha} - h = \frac{-\beta - \alpha h}{\alpha},$$

$$q = \frac{\lambda}{\alpha} . \gamma^{r-1}$$

) Symbolisch können wir diese Intervalle durch $(x_1 x)w$ bezügl. $w(x x_1)$ bezeichnen. (Vergl. § 10. Problem I.) und Problem II.*)).

3) $\psi_r(z) = -z^r + z^{r-1} \gtreqless q$

und zwar

a) wenn $x > x_1$ sein soll:

$$z < \frac{\gamma}{x_1 - h},$$

sowie

1. falls $\alpha > 0$ und $\gamma > 0$ (also $q > 0$): $0 < z < \frac{r-1}{r}$

2. „ $>$ „ $<$ („ $q \lesseqgtr 0$ wenn $r \begin{Bmatrix} \text{grade} \\ \text{ungrade} \end{Bmatrix}$): $z < 0$

3. „ $<$ „ $>$ („ $q < 0$): $z > 1$.

(Der Fall $\alpha < 0$ und $\gamma < 0$ kann nicht eintreten).

b) wenn $x < x_1$ verlangt wird:

$$z > \frac{\gamma}{x_1 - h},$$

sowie

1. falls $\alpha > 0$ und $\gamma > 0$ (also $q > 0$): $\frac{r-1}{r} < z < 1$

2. sonst $z = \frac{\gamma}{c - h} = \frac{\gamma}{a}$.

Schliesslich finden wir:

4) $x = h + \frac{\gamma}{z} \gtreqless c$.

Die Lösung von 3) kann nach § 12. erfolgen.

Beispiel.

(§ 2., Bspl. II. a, (3)).

$$f(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 0 . x + 5 = 0.$$

Auf beiden Seiten von $x_1 = 0{,}8$ ein Intervall zu berechnen, welches keine Wurzel enthält.

1) Da $f(0{,}8) = -1{,}245 \ldots < 0$, so ist zunächst § 2., Aufg. II. für $c < x_1$ zu lösen. Es sei $c = 0$, so können wir die § 2. gefundenen Werte benutzen:

$$\lambda = 1, \quad a = 0{,}1, \quad r = 6 \quad \text{und} \quad \mathfrak{k} = \frac{1}{60}.$$

2) $f(0{,}8) = -1{,}245376\ldots$; $f'(0{,}8) = -0{,}9139\ldots$; $h = -0{,}1$; $F'(0{,}8) = 3{,}54294$.

$\alpha = 3{,}55817$; $F(0{,}8) = 0{,}531441$; $\mathfrak{F}(0{,}8) = 0{,}552197$; $\beta = -2{,}29434$

$\gamma = \frac{2{,}29434}{3{,}55817} + 0{,}1 = \frac{2{,}65016}{3{,}55817}$; $q = \frac{(2{,}65016)^5}{(3{,}55817)^6}$; $\log q = 0{,}80899-2$

Es sei zunächst $x > x_1$ verlangt.

Hier liegt der Fall a) 1. vor, sodass $z < \frac{\gamma}{0{,}9} = 0{,}827\ldots$ und $< \frac{r-1}{r} = 0{,}833\ldots$, aber > 0 sein muss.

Wir finden nach § 12. $\log \psi_6\, 0{,}789 = 0{,}80968-2 > \log q$, also $z = 0{,}789$; $x = -0{,}1 + \frac{2{,}65016}{3{,}55817\,.\,0{,}789}$; $\log(x+0{,}1) = 0{,}97496-1$; $x + 0{,}1 = 0{,}944$; $x = 0{,}844$.

Zwischen 0,8 und 0,844 hat die Gleichung mithin keine Wurzel.

Berechnen wir jetzt ein solches Intervall auf der negativen Seite von $x_1 = 0{,}8$.

Es liegt Fall b) 1. vor, also muss $0{,}833\ldots < z < 1$ sein. Da $\psi_6\, 0{,}872 = 0{,}80981-2 > \log q$, so ist $z = 0{,}872\,(> 0{,}827)$ statthaft;

$$x = -0{,}1 + \frac{2{,}65016}{3{,}55817\,.\,0{,}872}; \quad \log(x+0{,}1) = 0{,}93152-1;$$

$$x + 0{,}1 = 0{,}854\ldots; \quad x = 0{,}754\ldots$$

Zwischen 0,754... und 0,8 hat die Gleichung also ebenfalls keine Wurzel.

2. *Algebraische Lösung.*

Diese Lösung ist einfacher als die vorige, die Annäherung an die Wurzel aber eine langsamere.

1) Löse bezüglich $\left\{\begin{matrix}\text{Aufg. II.}\\ \text{,, I.}\end{matrix}\right\}$ in § 2. für $c \overset{=}{<} x_1$, mit dem Unterschiede, dass an die Stelle von $\varkappa\pm_{n,2} : \varkappa\pm_{n,1}$ tritt, sodass geom. interpretirt die Curve $y = \mathfrak{F}(x)$ von der Abscisse c an beständig aufsteigt.

2) Berechne nacheinander:

$$h = c - \alpha; \quad p = \frac{\mathfrak{f}\, f(x_1)}{\lambda(x_1 - h)^r}; \ z \text{ bezüglich} \lesseqgtr \sqrt[r]{1-p} \ (\text{oder} = \sqrt[r]{1-p});$$

$$x = z(x_1 - h) + h \overset{=}{>} c.$$

(Es ist x bestimmt durch $F(x) \overset{=}{<} \mathfrak{F}(x_1)$ resp. $F(x) \overset{=}{>} \mathfrak{F}(x_1)$).

Beispiel I.

In § 10., Bspl. I. fanden wir eine Wurzel w zwischen 0,58 und 0,62. Es ist $f(0{,}6) = 0{,}2\ldots > 0$, dagegen $f(0{,}62) < 0$; w liegt also zwischen 0,6 und 0,62.

Bestimmen wir x so, dass $0{,}6 < x < w\ (< 0{,}62)$. Wir finden als zulässig (nach § 2., Bspl. II. b.):

$$c = 0;\quad \lambda = 1;\quad a = 0{,}1;\quad r = 3;\quad \mathfrak{f} = -0{,}02;$$

also

$$h = -0{,}1;\quad p = \frac{-0{,}02 \,.\, 0{,}2}{(0{,}7)^3} = -\frac{4}{(7)^3};\quad z = \frac{\sqrt[3]{347}}{7};$$

$$x = 0{,}1\,(\sqrt[3]{347} - 1) = 0{,}6027.$$

Die Wurzel u ist $= 0{,}618\ldots$

Beispiel II.

Eine untere Grenze x der positiven Wurzeln der vorigen Gleichung zu berechnen.

Mittelst der obigen Werte finden wir

$$p = \frac{-0{,}02 \,.\, f(0)}{(0{,}1)^3} = -100;\quad z = \sqrt[3]{101};\quad x = 0{,}1\,(\sqrt[3]{101} - 1) =$$

$$x = 0{,}3657.$$

Die Wurzel selbst ist 0,618...

Problem II. Aus einer $\left\{\begin{matrix}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{matrix}\right\}$ Grenze x_1 einer Wurzel w einen Näherungswert x auf der $\left\{\begin{matrix}\text{neg.}\\ \text{pos.}\end{matrix}\right\}$ Seite zu bestimmen.

Löse wiederholt Problem I., das gefundene x jedesmal als neues x_1 betrachtend.

In Betreff der Wahl von c, r, ... gilt Analoges wie in § 10., Problem II. nach Bspl. I. bemerkt.

Bei der Annäherung von einer oberen*) Grenze aus können wir uns des sehr einfachen Näherungswertes:

*) Eine untere Grenze einer Wurzel w kann durch die Substitution $x = \frac{1}{x}$ in eine obere Grenze von $\frac{1}{w}$ verwandelt werden.

$$x = x_1 - \frac{\mathfrak{l}f(x_1)}{F'(x_1)} \overline{>} c$$

bedienen, worin die Constanten nach der 2. algebr. Lösung von Problem I. ($\mathfrak{l}f(x_1) > 0$) zu berechnen sind; $F'(x_1) = \lambda r(x_1 - h)^{r-1}$; $h = c - a$.

(Vergl. diesen Wert mit dem sogenannten Euler'schen „Näherungswert", § 3. Anmerkung, 2.)

Wir wiederholen, dass x_1 beliebig ist, während die Euler'sche Formel voraussetzt, dass x_1 bereits ein Näherungswert ist.

Ist $x = F(x_1)$ eine Lösung des Problems I. dieses § in der angegebenen Weise, so kann die Wurzel w dargestellt werden durch die in's Unendliche fortiterirte Function

$$x = \underset{1}{F}(\underset{2}{F}(\underset{3}{F}(\ldots\ldots\underset{r=\infty}{(x_1)}\ldots\ldots)\underset{3}{)}\underset{2}{)}\underset{1}{)}.$$

Je grösser r, desto kleiner $w - x$.

§ 12.

I. Nach § 10., Problem II. lässt sich die Trennung der reellen Wurzeln, d. h. die Bestimmung einer $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenze aus einer $\left\{\begin{matrix}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{matrix}\right\}$ auf die wiederholte Auflösung der Formel:

$$\varphi_r(z) = (r-1)z^r - r.z^{r-1} + 1 \overset{=}{<} p \tag{1}$$

wo r eine ganze Zahl und $p (> 0)$ variirt; oder auch von

$$\log \varphi_r(z) \overset{=}{<} \log p \tag{2}$$

zurückführen ($z > 0$).

Es ist, zur Abkürzung statt $\varphi_r(z) : \varphi(z)$ gesetzt:

$$\varphi'(z) = r(r-1)(z-1)z^{r-2},$$

$$\varphi''(z) = r(r-1)\{(r-1)z - (r-2)\}z^{r-3},$$

$$\frac{d \log \varphi(z)}{dz} = \frac{\varphi'(z)}{\overset{e}{\log} 10 . \varphi(z)},$$

$$\frac{d^2 \log \varphi(z)}{dz^2} =$$

$$-\frac{r(r-1)}{\overset{e}{\log} 10} \frac{[(r-1)z^{r+1} - 2(r-1)z^r + rz^{r-1} - (r-1)z + (r-2)]z^{r-3}}{(\varphi z)^2}$$

Diese Differentialquotienten lassen den Verlauf der Curven:

$$y = \varphi_r(z) \quad \text{und} \quad y = \log \varphi_r z\,,$$

bezogen auf rechtw. Achsen, erkennen.

Eine vollständige Discussion würde uns zu weit führen. Wir bemerken nur, dass die Function im Zähler von $\frac{d^2 \log \varphi(z)}{dz^2}$ gleich 0 gesetzt ausser der 2fachen Wurzel $z = 1$ keine positive Wurzel besitzt. (Ist r ungrade so auch keine negative, ist r grade so eine solche).

In Fig. III. haben wir die obigen Functionen für $r = 6$ graphisch dargestellt. Wir heben hervor, dass die erste Curve in W einen Wendepunkt, die zweite in der Geraden $z = 1$ eine Asymptote hat (für beide Zweige).

II. Die Annäherung an die reellen Wurzeln nach § 11., Problem II. besteht in der Lösung von:

$$\psi_r(z) = -\cdot z^r + z^{r-1} \gtreqless q \tag{1}$$

wo $r =$ gz. Zahl für verschiedene Werte von q; oder auch von:

$$\pm \log \pm \psi_r z \gtreqless \pm \log \pm q.$$

Zur Beurteilung des Verlaufs der Functionen resp. der Curven:

$$y = \psi_r(z) \quad \text{und} \quad y = \pm \log \pm \psi_r(z)$$

haben wir:

$$\psi'(z) = ((r-1) - rz)z^{r-2},$$

$$\psi''(z) = (r-1)((r-2) - rz)z^{r-3},$$

$$\frac{d \log \psi z}{dz} = \frac{\psi'(z)}{\overset{e}{\log} 10 \,.\, \psi(z)},$$

$$\frac{d^2 \log \psi z}{dz^2} = -\frac{1}{r \overset{e}{\log} 10} \cdot \frac{[r^2 z^2 - 2(r-1)rz + r(r-1)]\, z^{2r-4}}{(\psi z)^2}.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist stets positiv, also der letzte Differentialquotient negativ für $0 < z < 1$, entsprechend $\psi(z) > 0$; dagegen ist für $\psi(z) < 0 : \frac{d^2\{-\log - \psi z\}}{dz^2} > 0$.

In Fig. IV. sind obige Functionen für $r = 6$ zur Darstellung gebracht. Die erstere Curve hat in W einen Wendepunkt; die logarithmische in den Geraden $x = 0$ und $x = 1$ Asymptoten; sie besteht aus drei unendlichen Zweigen.

III. Aus I. und II. ist ersichtlich, dass im Falle eine numerische Gleichung vorliegt, z (§ 10., Problem I., und § 11., Problem I., 1. Algebr. Lösung 3)) leicht durch Probiren gefunden werden kann.

Durch Anwendung der Regula falsi oder der Euler'schen Näherungsmethode lässt sich z berechnen oder darstellen.

Wie sich die Trennung auf die Lösung von Gleichungen 1. und 2. Grades zurückführen lässt — die Annäherung linear oder durch die Bestimmung der positiven Wurzeln reiner Gleichungen $x^r = a$, wo $r \leqq n$, bewirkt werden kann: haben wir bezüglich in § 10., Problem II., § 11., Problem II. und Problem I., 2. algebr. Lösung, gezeigt.

Wir verweisen auch auf das „modificirte Verfahren" in § 10. zur Trennung in pos. Sinne.

Andere Darstellungen von z ergeben sich geom., wenn wir beachten, dass die Wurzeln von $\varphi_r(z) = p$ Abscissen der Berührungspunkte der Tangenten von Punkt $(1, 1-p)$ an die Curve $y = x^r$, also nach § 8. II. die Abscissen der Durchschnitte der Curve K und $\mathfrak{K}$, dargestellt durch:

$$y = x \quad \text{und} \quad y = \frac{(p-1)x}{(r-1)x-r}$$

sind und auf dieses System die Kriterien § 6., 1. anwenden, indem wir $\mathfrak{L}'\mathfrak{L} \parallel X'X$ wählen oder durch 0 gehen lassen oder auch die Kriterien § 6., 5.

Auf letztere Weise finden wir z. B. das z in § 10., Problem II. (2), als Näherungswert.

Auch können wir nach Gauss mit Hülfe von Tafeln für Logarithmen von Summen und Differenzen oder auch der log. trig. Tafeln (Beiträge z. Theorie d. algebr. Glg. II. Abth., Göttingen, Dieterich'sche Buchhandlung, 1849.) z berechnen.

Am rationellsten möchte die Trennung und Annäherung an die reellen Wurzeln numerischer Gleichungen sich bewirken lassen mittelst Tabellen über die Functionen in I. und II., indem wir dann z nur abzulesen brauchen.

Im folgenden Artikel werden wir das Problem der Trennung der Wurzeln als das ungleich wichtigere dieser beiden Probleme specieller behandeln, wobei wir hauptsächlich die praktische Brauchbarkeit der Methode zur Auflösung numerischer Gleichungen im Auge haben.

XXV.

Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems.

Sechster Artikel. Fortsetzung von N. XIV.

Von

R. Hoppe.

14. Allgemeinste Fläche von gemeinsamem ebenen System mit einer Fläche 2. Grades.

Nachdem wir im Vorhergehenden die orthogonalen Flächensysteme untersucht haben, welche 2 ebenen Systemen, hervorgehend aus Lösungen der Differentialgleichung (8) für den Fall der verschwindenden rechten Seite, entsprechen, wollen wir nun den gleichfalls angedeuteten Weg, nämlich von der Mitte des Problems aus nach beiden Seiten, verfolgen, indem wir von einer Fläche ausgehen, deren Krümmungslinien bekannt sind. Als einfachstes Beispiel bietet sich eine Fläche 2. Grades dar, deren Gleichungen in Parametern der Krümmungslinien u, v lauten:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a\frac{c-b}{\varDelta}(u-a)(v-a) \\ y^2 &= b\frac{a-c}{\varDelta}(u-b)(v-b) \\ z^2 &= c\frac{b-a}{\varDelta}(u-c)(v-c) \end{aligned}\right\} \qquad (244)$$

wo

$$\varDelta = (b-c)(c-a)(a-b)$$

Dieselbe Fläche ist ausgedrückt durch

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1 \tag{245}$$

Bezeichnen also, wie anfangs, p, q, r die Richtungscosinus der Normale, so hat man:

$$p:q:r=\frac{x}{a}:\frac{y}{b}:\frac{z}{c}$$

Da nun

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=\frac{1}{abc\Delta}\{bc(c-b)(u-a)(v-a)$$
$$+ca(a-c)(u-b)(v-b)+ab(b-a)(u-c)(v-c)\}=\frac{uv}{abc}$$

ist, so ergiebt sich:

$$p=\frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}};\qquad q=\frac{y}{b}\sqrt{\frac{abc}{uv}};\qquad r=\frac{z}{c}\sqrt{\frac{abc}{uv}} \tag{246}$$

wodurch zugleich die positive Richtung der Normale definirt sein mag. Diese Relationen stellen die Abbildung der Urfläche nebst ihren Krümmungslinien auf der Kugel

$$p^2+q^2+r^2=1$$

dar, wenn man p, q, r als die entsprechenden rechtwinkligen Coordinaten betrachtet. Bildet man sie von dieser wieder nach den Relationen

$$\xi=p\zeta;\qquad \eta=q\zeta;\qquad \zeta=\frac{1}{1+r}=\frac{1+\xi^2+\eta^2}{2} \tag{6}$$

auf der Ebene ab, wo ξ, η die ebenen Coordinaten, ζ eine Abkürzung ist, so erhält man:

$$\xi=\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\frac{uv}{abc}}+\frac{z}{c}};\qquad \eta=\frac{\frac{y}{b}}{\sqrt{\frac{uv}{abc}}+\frac{z}{c}}$$

Eliminirt man beliebig u oder v, und bezeichnet durch k einen beliebigen von beiden Parametern, so findet man:

$$(k-c)\{a(k-b)\xi^2+b(k-a)\eta^2\}(1+\xi^2+\eta^2)^2$$
$$+k\{a-c)(k-b)\xi^2+(b-c)(k-a)\eta^2\}(1-\xi^2-\eta^2)^2=0$$

als gemeinsame Gleichung aller Curven des ebenen Systems. Die sich rechtwinklig schneidenden 2 Scharen können sich demnach nur durch die Werte von k unterscheiden.

Es sind nun ferner die Differentialgleichungen für die Hauptkrümmungen nach (8) herzuleiten. Differentiirt man die Werte (246), so findet man:

$$\frac{\partial p}{\partial u}=p\left(\frac{\partial x}{x\partial u}-\frac{1}{2u}\right)=\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u-a}-\frac{1}{u}\right)=\frac{ap}{2u(u-a)}$$

und analoge Ausdrücke, woraus nach (7):

$$M^2=\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2=\frac{1}{4u^2}\left\{\frac{a^2p^2}{(u-a)^2}+\frac{b^2q^2}{(u-b)^2}+\frac{c^2r^2}{(u-c)^2}\right\}$$

$$=\frac{abc}{4u^3v}\left\{\frac{x^2}{(u-a)^2}+\frac{y^2}{(u-b)^2}+\frac{z^2}{(u-c)^2}\right\}$$

$$=\frac{abc}{4u^3v\Delta}\left\{a(c-b)\frac{v-a}{u-a}+b(a-c)\frac{v-b}{u-b}+c(b-a)\frac{v-c}{u-c}\right\}$$

$$=\frac{abc(v-u)}{4u^2v(u-a)(u-b)(u-c)}$$

also, wenn man zur Abkürzung

$$U=(u-a)(u-b)(u-c); \qquad V=(v-a)(v-b)(v-c)$$

setzt:

$$M=\frac{\sqrt{abc}}{2u}\sqrt{\frac{v-u}{vU}}; \qquad N=\frac{\sqrt{abc}}{2v}\sqrt{\frac{u-v}{uV}}$$

Die neue Differentiation ergiebt:

$$\frac{\partial \log M}{\partial v}=\frac{u}{2v(v-u)}; \qquad \frac{\partial \log N}{\partial u}=\frac{v}{2u(u-v)}$$

woraus:

$$\frac{\partial M}{MN\partial v}=-\sqrt{\frac{abc}{V}}\left(\frac{u}{u-v}\right)^{\frac{3}{2}}; \qquad \frac{\partial N}{MN\partial u}=-\sqrt{\frac{abc}{U}}\left(\frac{v}{v-u}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und die nochmalige Differentiation:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial M}{MN\partial v}=-\frac{3v}{2u(u-v)}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial N}{MN\partial u}=-\frac{3u}{2v(v-u)}$$

Demnach lauten für unsern Fall die Gl. (8):

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u\partial v}-\frac{u}{2v(u-v)}\frac{\partial m}{\partial u}+\frac{3v}{2u(u-v)}\frac{\partial m}{\partial v}=0 \qquad (248)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial u\partial v}+\frac{v}{2u(u-v)}\frac{\partial n}{\partial v}-\frac{3u}{2v(u-v)}\frac{\partial n}{\partial u}=0$$

und zu jeder Lösung einer von beiden Gleichungen findet man die zugehörige Lösung der andern mittelst der Relationen:

$$n = m - 2v\frac{u-v}{u}\frac{\partial m}{\partial v}; \qquad m = n + 2u\frac{u-v}{v}\frac{\partial n}{\partial u} \tag{249}$$

Zur Vorbereitung der Integration setzen wir

$$\mu = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}; \qquad \nu = \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$$

dann geht Gl. (248) über in

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial m}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 m}{\partial \nu^2} + \frac{2}{\nu}\frac{\partial m}{\partial \nu} \tag{250}$$

In dieser Form wollen wir ihr durch den speciellen Wert

$$m = e^{\sigma\mu}.\frac{\nu_1}{\nu} \tag{251}$$

zu genügen suchen, wo σ constant, ν_1 Function von ν ist. Dies giebt nach Einsetzung:

$$\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial \nu^2} = \sigma\left(\sigma + \frac{1}{\nu}\right)\nu_1 \tag{252}$$

Ein Integral dieser Gleichung ist:

$$\nu_1 = \nu\int_0^\pi e^{\sigma\nu\cos\vartheta}(1+\cos\vartheta)\partial\vartheta$$

woraus:

$$m = \int_0^\pi e^{\sigma(\mu+\nu\cos\vartheta)}(1+\cos\vartheta)\partial\vartheta \tag{253}$$

Hiernach muss die Gl. (248) als lineare auch befriedigt werden durch

$$m = \int_0^\pi \varphi'(\mu+\nu\cos\vartheta)(1+\cos\vartheta)\partial\vartheta \tag{254}$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet; denn betrachtet man $\varphi' x$ als Function von e^x und entwickelt diese in die taylorsche Reihe, so ist jeder Term des Integrals enthalten in (253).

Differentiirt man, zur Darstellung des zugehörigen n, den Wert mit Beachtung, dass

$$\frac{\partial m}{\partial v} = \frac{1}{v^2}\left(-\frac{\partial m}{\partial \mu} + \frac{\partial m}{\partial \nu}\right)$$

ist, so findet man:

$$\frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{1}{v^2}\int_0^\pi \varphi''(\mu+\nu\cos\vartheta)\sin^2\vartheta\,\partial\vartheta$$

und nach teilweiser Integration:

$$\frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{1}{\nu v^2}\int_0^\pi \varphi'(\mu+\nu\cos\vartheta)\cos\vartheta\,\partial\vartheta$$

Dies in Gl. (249) in der Form

$$n = m + 2\nu v^2 \frac{\partial m}{\partial v}$$

eingeführt giebt:

$$n = \int_0^\pi \varphi'(\mu+\nu\cos\vartheta)(1-\cos\vartheta)\,\partial\vartheta \tag{255}$$

Um aus den Hauptkrümmungen m, n die Gleichungen der Fläche abzuleiten, wenden wir statt u, v und μ, ν ein drittes System Unabhängiger $\varkappa$, λ an, mit jenen verbunden durch die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{u-a}{u} &= 1 - a\frac{\mu+\nu}{2} = \varkappa\lambda \\ \frac{v-a}{v} &= 1 - a\frac{\mu-\nu}{2} = \frac{\varkappa}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{256}$$

Zur Abkürzung sei überdies

$$\Theta = \mu + \nu\cos\vartheta = \frac{2}{a}\left\{1 - \varkappa\left(\lambda\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right\} \tag{257}$$

Dann wird nach (246) (244)

$$p = \pm\sqrt{\frac{bc(c-b)}{\varDelta}}\,.\,\varkappa = D\varkappa \tag{258}$$

Multiplicirt man die Gl. (256), so kommt:

$$\varkappa^2 = \frac{u-a}{u}\,\frac{v-a}{v} \tag{259}$$

Hiernach ist

$$2\varkappa\frac{\partial\varkappa}{\partial u}\partial u = \frac{v-a}{v}\,\partial\frac{u-a}{u} = \frac{\varkappa}{\lambda}\,\partial(\varkappa\lambda)$$

$$2\varkappa\frac{\partial\varkappa}{\partial v}\partial v = \frac{u-a}{u}\,\partial\frac{v-a}{v} = \varkappa\lambda\,\partial\frac{\varkappa}{\lambda}$$

folglich nach (258)

$$\frac{\partial p}{\partial u}\partial u = \frac{D}{2\lambda}\,\partial(\varkappa\lambda); \qquad \frac{\partial p}{\partial v}\partial v = \frac{D\lambda}{2}\,\partial\frac{\varkappa}{\lambda}$$

Es war aber (s. Gl. (10))

$$\partial x = m\frac{\partial p}{\partial u}\partial u + n\frac{\partial p}{\partial v}\partial v \tag{260}$$

daher hat man:

$$\partial x = \frac{D}{2}\left\{\frac{m}{\lambda}\partial(\varkappa\lambda) + n\lambda\partial\frac{\varkappa}{\lambda}\right\}$$
$$= \frac{D}{2}\left\{(m+n)\partial\varkappa + (m-n)\frac{\varkappa}{\lambda}\partial\lambda\right\}$$

das ist nach (254) (255) (257):

$$\partial x = D\int_0^\pi \varphi'(\Theta)\left(\partial\varkappa + \frac{\varkappa\cos\vartheta}{\lambda}\partial\lambda\right)\partial\vartheta \tag{261}$$

Zur Transformation entwickeln wir:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\varphi(\Theta)\sin\vartheta}{\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\varkappa}{a}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\varphi'(\Theta)\sin^2\vartheta}{\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$
$$+\varphi(\Theta)\frac{\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\left(\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\varphi(\Theta)}{\lambda\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = -\frac{2\varkappa}{a\lambda}\varphi'(\Theta)\frac{\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$
$$-\varphi(\Theta)\frac{\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\left(\lambda^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}$$

Beides addirt und zwischen 0 und π nach ϑ integrirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\pi\frac{\varphi(\Theta)\partial\vartheta}{\lambda\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = -\frac{2\varkappa}{a\lambda}\int_0^\pi\varphi'(\Theta)\cos\vartheta\,\partial\vartheta$$

Unmittelbar erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial\varkappa}\int_0^\pi\frac{\varphi(\Theta)\partial\vartheta}{\lambda\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = -\frac{2}{a}\int_0^\pi\varphi'(\Theta)\,\partial\vartheta$$

woraus:

$$\partial\int_0^\pi\frac{\varphi(\Theta)\partial\vartheta}{\lambda\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = -\frac{2}{a}\int_0^\pi\varphi'(\Theta)\left(\partial\varkappa+\frac{\varkappa\cos\vartheta}{\lambda}\partial\lambda\right)\partial\vartheta$$

Integrirt man nach dieser Formel die Gl. (261), so kommt:

$$x = -\tfrac{1}{2} a D p \int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)\,\partial\vartheta}{\lambda \cos^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \tag{262}$$

Nun ist nach (257) (258)

$$\lambda \cos^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\varkappa}(1 - \tfrac{1}{2} a\Theta) = -\frac{D}{2p}(a\Theta - 2)$$

folglich, mit Anwendung der Analogie,

$$x = ap \int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)\,\partial\vartheta}{a\Theta - 2}$$

$$y = bq \int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)\,\partial\vartheta}{b\Theta - 2}$$

$$z = cr \int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)\,\partial\vartheta}{c\Theta - 2}$$

Hier ist die Grösse

$$\Theta = 2\left(\frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{u} + \frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{v}\right) \tag{263}$$

unabhängig von a, b, c, und bleibt daher bei Substitution der Analogen zum Ausdruck der beiden andern Coordinaten unverändert. Das gleiche gilt von der Function $\varphi'(\Theta)$, nicht aber von der Integrationsconstante in $\varphi(\Theta)$, welche für jede Coordinate einen andern Wert haben kann. Ueber diese 3 Constanten ist nun derart zu verfügen, dass die 3 Functionen unter dem Integralzeichen im ganzen Intervall der ϑ stetig werden. Es ist leicht zu beobachten, dass immer einer der 3 Nenner für einen Wert von ϑ verschwindet. Da nämlich $\varkappa\lambda$ reell ist, so hat λ^2 gleiches Vorzeichen mit $\varkappa^2$, also nach (258) auch mit

$$D^2 = \frac{bc(c-b)}{\varDelta} = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{c}\right)}$$

Wie aus (262) zu ersehen, findet im Ausdruck von x die Stetigkeitsunterbrechung statt oder nicht, jenachdem λ^2, also D^2 negativ oder positiv ist. Die Bedingung eines negativen D^2 ist

$$\frac{a}{b} \gtrless 1 \gtrless \frac{a}{c}$$

mit Beziehung der Zeichen. Um sie zu erfüllen, muss, jenachdem unter den Grössen a, b, c keine, eine oder zwei negative existiren, a die mittlere, grösste oder kleinste von ihnen sein. Daraus folgt, dass b oder c für a gesetzt in allen 3 Fällen ein positives D^2 ergeben, dass also, wenn in x die Unstetigkeit eintritt, y und z davon frei sind. Setzen wir die soeben bezeichnete Anordnung voraus, so lauten die von jeder Unstetigkeit befreiten Gleichungen der Fläche:

$$\left.\begin{aligned} x &= ap\int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)-\varphi\left(\frac{2}{a}\right)}{a\Theta-2}\,\partial\vartheta \\ y &= bq\int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)+B}{b\Theta-2}\,\partial\vartheta \\ z &= cr\int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)+C}{c\Theta-2}\,\partial\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{264}$$

Was die Bedeutung der Constanten B, C betrifft, so findet man:

$$\int_0^\pi \frac{\partial\vartheta}{b\Theta-2} = -\tfrac{1}{2}uv\int_0^\pi \frac{\partial\vartheta}{v(u-b)\cos^2\frac{\vartheta}{2}+u(v-b)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$
$$= \mp\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{u}{u-b}\,\frac{v}{v-b}}$$

Da nun

$$q = \pm\sqrt{\frac{ca(c-a)}{\varDelta}\,\frac{u-b}{u}\,\frac{v-b}{v}}$$

ist, so heben sich in (264) die variabeln Factoren weg, und B ist einem constanten Increment von y, ebenso C einem solchen von z proportional, welche beide nur eine Verschiebung der ganzen Fläche ausdrücken, daher als gleichgültig unberücksichtigt bleiben können.

Für rationale Functionen φ ist die Fläche stets algebraisch. Ist φ zunächst eine ganze Function, so kann man sie, wegen des über den constanten Term Bemerkten, in der Form darstellen:

$$\varphi(\Theta) = \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k(\Theta^{k+1}-d^{k+1}) \tag{265}$$

und nach einander

$$d = \frac{2}{a},\ \frac{2}{b},\ \frac{2}{c}$$

setzen. Dann ist eine beliebige der 3 Grössen $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{q}$, $\frac{z}{r}$ ausgedrückt durch

$$\int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta)\partial\vartheta}{\Theta - d} = \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k \sum_{h=0}^{h=k} d^{k-h} \int_0^\pi \Theta^h \partial\vartheta$$

und man findet nach (263):

$$\int_0^\pi \Theta^h \partial\vartheta = 2^h \sum_{g=0}^{g=h} (h)_g u^{g-h} v^{-g} \int_0^\pi \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{2g} \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2h-2g} \partial\vartheta$$

$$= 2^h \sum_{g=0}^{g=h} (h)_g u^{g-h} v^{-g} \frac{\Gamma(g+\frac{1}{2})\,\Gamma(h-g+\frac{1}{2})}{\Gamma(h+1)}$$

$$= (-2)^h \pi \sum_{g=0}^{g=h} (-\tfrac{1}{2})_g (-\tfrac{1}{2})_{h-g} u^{g-h} v^{-g}$$

Führt man dies ein und vertauscht die Summationen, so wird die gesuchte Grösse

$$\pi \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k d^k \sum_{g=0}^{g=k} (-\tfrac{1}{2})_g \left(\frac{u}{v}\right)^g \sum_{h=g}^{h=k} (-\tfrac{1}{2})_{h-g} \left(-\frac{2}{du}\right)^h =$$

$$\pi \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k d^k \sum_{g=0}^{g=k} (-\tfrac{1}{2})_g \left(-\frac{2}{dv}\right)^g \sum_{h=0}^{h=k-g} (-\tfrac{1}{2})_h \left(-\frac{2}{du}\right)^h$$

Dies lässt sich symbolisch ausdrücken durch

$$\pi \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k d^k \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{2}{du}\right)\left(1-\frac{2}{dv}\right)}}\right]_k$$

mit der Bestimmung, dass die Grösse in eckigen Klammern nach Potenzen von $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ entwickelt werden, und die Reihe da abbrechen soll, wo die Summe der Exponenten den Wert k erreicht. In dieser Schreibweise lauten die Gleichungen der Fläche:

$$x = \pi \sqrt{\frac{bc(c-b)}{\varDelta} \frac{u-a}{u} \frac{v-a}{v}} \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k \left(\frac{2}{a}\right)^k \left[\sqrt{\frac{u}{u-a} \frac{v}{v-a}}\right]_k$$

$$y = \pi \sqrt{\frac{ca(a-c)}{\varDelta} \frac{u-b}{u} \frac{v-b}{v}} \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k \left(\frac{2}{b}\right)^k \left[\sqrt{\frac{u}{u-b} \frac{v}{v-b}}\right]_k$$

$$z = \pi \sqrt{\frac{ab(b-a)}{\varDelta} \frac{u-c}{u} \frac{v-c}{v}} \sum_{k=0}^{k=k_1} A_k \left(\frac{2}{c}\right)^k \left[\sqrt{\frac{u}{u-c} \frac{v}{v-c}}\right]_k$$

Die ersten Particularlösungen sind hiernach:

$$x=\sqrt{\frac{bc(c-b)}{\varDelta}\,\frac{u-a}{u}\,\frac{v-a}{v}} \tag{266}$$

$$x=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\sqrt{\frac{bc(c-b)}{\varDelta}\,\frac{u-a}{u}\,\frac{v-a}{v}}$$

$$x=\left(\frac{4}{a^2}+\frac{2}{au}+\frac{2}{av}+\frac{3}{2u^2}+\frac{1}{uv}+\frac{3}{2v^2}\right)\sqrt{\frac{bc(c-b)}{\varDelta}\,\frac{u-a}{u}\,\frac{v-a}{v}}$$

etc. die y und z analog.

Die erste Lösung stellt nur eine Kugel dar. Die zweite giebt zunächst:

$$x^2+y^2+z^2=4\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\gamma^2}-3\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^2+\frac{4}{uv}$$

$$ax^2+by^2+cz^2=\frac{4\beta}{\gamma}+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^2\frac{\gamma}{uv}$$

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=4-\gamma\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^2+\alpha\gamma\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^2\frac{1}{uv}$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha=a+b+c;\quad \beta=bc+ca+ab;\quad \gamma=abc$$

gesetzt ist. Eliminirt man u, v, so erhält man folgende Gleichung 10ten Grades:

$$2\gamma\left(ax^2+by^2+cz^2-\frac{4\beta}{\gamma}\right)\left\{\gamma\left(x^2+y^2+z^2-4\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\gamma^2}\right)^2\right.$$
$$\left.-8\left(ax^2+by^2+cz^2-\frac{4\beta}{\gamma}\right)\right\}^2=\left\{\gamma\left[\gamma\left(x^2+y^2+z^2-4\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\gamma^2}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-72\left(ax^2+by^2+cz^2-\frac{4\beta}{\gamma}\right)\right]+27\left[a(a-\alpha)x^2+b(b-\beta)y^2+c(c-\gamma)z^2\right]^2\right\}$$
$$\times\{a(a-\alpha)x^2+b(b-\beta)y^2+c(c-\gamma)z^2\}^2$$

Die Krümmungslinien dieser Fläche erhält man durch Elimination von u oder v zwischen 2 beliebigen derselben Gleichungen. Aus den beiden ersten findet man, wenn k einen beliebigen der Parameter u, v bezeichnet:

$$4\gamma^2\left\{3+k^2\left(x^2+y^2+z^2-4\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\gamma^2}\right)\right\}\left\{4+k^2\left(x^2+y^2+z^2-4\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\gamma^2}\right)\right\}^2$$

$$+4\gamma k^4\left\{28+9k^2\left(x^2+y^2+z^2-4\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\gamma^2}\right)\right\}\left(ax^2+by^2+cz^2-\frac{4\beta}{\gamma}\right)$$

$$+27k^8\left(ax^2+by^2+cz^2-\frac{4\beta}{\gamma}\right)^2=0$$

Die Hauptkrümmungen sind bei der Annahme (265)

$$\left.\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}=\sum_{k=0}^{k=k_1}(k+1)A_k\int_0^\pi\Theta^k(1\pm\cos\vartheta)\,\partial\vartheta$$

das ist nach der oben ausgeführten Entwickelung:

$$m=-2\pi\sum_{k=0}^{k=k_1}(-2)^k(k+1)A_k\sum_{g=0}^{g=k}(-\tfrac{1}{2})_g(-\tfrac{1}{2})_{k-g+1}u^{g-k}v^{-g}$$

$$n=-2\pi\sum_{k=0}^{k=k_1}(-2)^k(k+1)A_k\sum_{g=0}^{g=k}(-\tfrac{1}{2})_{g+1}(-\tfrac{1}{2})_{k-g}u^{g-k}v^{-g}$$

Der vorstehenden Particularlösung entspricht $A_1=\frac{1}{\pi}$, daher ist hier

$$m=\frac{3}{u}+\frac{2}{v};\qquad n=\frac{2}{u}+\frac{3}{v}$$

Für die dritte Particularlösung $A_2=\frac{1}{\pi}$ hat man:

$$m=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{u^2}+\frac{6}{uv}+\frac{6}{v^2}\right);\qquad n=\frac{3}{2}\left(\frac{6}{u^2}+\frac{6}{uv}+\frac{5}{v^2}\right)$$

Ist ferner φ ein rationaler Bruch, so kann man diesen zerlegt denken in eine ganze Function und Terme von der Form

$$B(\Theta+e)^{-k}$$

Sei zuerst

$$\varphi_0(\Theta)=\frac{1}{\Theta+e}-\frac{1}{d+e}$$

dann wird eine beliebige der Grössen

$$\frac{x}{p},\quad\frac{y}{q},\quad\frac{z}{r}$$

$$=-\frac{1}{d+e}\int_0^\pi\frac{\partial\vartheta}{\Theta+e}=-\frac{1}{d+e}\int_0^\pi\frac{\partial\vartheta}{\left(\frac{2}{u}+e\right)\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\left(\frac{2}{v}+e\right)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$=\mp\tfrac{1}{2}\frac{\pi}{d+e}\sqrt{\frac{u}{eu+2}\,\frac{v}{ev+2}}$$

wo d die Werte $\frac{2}{a}$, $\frac{2}{b}$, $\frac{2}{c}$ hat. Daher ist im einzelnen

$$\left.\begin{aligned} x &= \mp\frac{\pi}{2}\frac{a}{2+ae}\sqrt{\frac{bc(c-b)}{\Delta}\frac{u-a}{eu+2}\frac{v-a}{ev+2}} \\ y &= \mp\frac{\pi}{2}\frac{b}{2+be}\sqrt{\frac{ca(a-c)}{\Delta}\frac{u-b}{eu+2}\frac{v-b}{ev+2}} \\ z &= \mp\frac{\pi}{2}\frac{c}{2+ce}\sqrt{\frac{ab(b-a)}{\Delta}\frac{u-c}{eu+2}\frac{v-c}{ev+2}} \end{aligned}\right\} \tag{267}$$

Hieraus erhält man durch Differentiation nach e für

$$\varphi(\Theta) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k\varphi_0(\Theta)}{\partial e^k} = (\Theta+e)^{-k-1} - (d+e)^{-k-1}$$

den Wert:

$$\mp(-1)^k\frac{\pi}{2k!}\frac{\partial^k}{\partial e^k}\left\{(d+e)^{-1}\left(e+\frac{2}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e+\frac{2}{v}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$\mp\frac{\pi}{2}\sum_{h=0}^{h=k}\frac{(-1)^h}{(d+e)^{k-h+1}}\sum_{g=0}^{g=h}(-\tfrac{1}{2})_g(-\tfrac{1}{2})_{h-g}\left(\frac{u}{eu+2}\right)^{g+\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{ev+2}\right)^{h-g+\frac{1}{2}}$$

gemeinsam für $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{q}$, $\frac{z}{r}$. Sei z. B. $k=1$; dann wird

$$\begin{aligned} x &= \mp\frac{\pi}{4}\frac{a}{2+ae}\sqrt{\frac{bc(c-b)}{\Delta}\frac{u-a}{eu+2}\frac{v-a}{ev+2}}\left(\frac{2a}{2+ae}+\frac{u}{eu+2}+\frac{v}{ev+2}\right) \\ y &= \mp\frac{\pi}{4}\frac{b}{2+be}\sqrt{\frac{ca(a-c)}{\Delta}\frac{u-b}{eu+2}\frac{v-b}{ev+2}}\left(\frac{2b}{2+be}+\frac{u}{eu+2}+\frac{v}{ev+2}\right) \\ z &= \mp\frac{\pi}{4}\frac{c}{2+ce}\sqrt{\frac{ab(b-a)}{\Delta}\frac{u-c}{eu+2}\frac{v-c}{ev+2}}\left(\frac{2c}{2+ce}+\frac{u}{eu+2}+\frac{v}{ev+2}\right) \end{aligned} \tag{268}$$

Die Gl. (267) geben nach Elimination von u, v:

$$x^2\left(\frac{2}{a}+e\right)+y^2\left(\frac{2}{b}+e\right)+z^2\left(\frac{2}{c}+e\right) = \frac{\pi^2 abc}{4(2+ae)(2+be)(2+ce)}$$

das ist eine Fläche 2. Grades, welche einer homofocalen der Urfläche (245) ähnlich ist, und für $e=0$ nach Division der Lineardimensionen durch $-\frac{1}{4}\pi\sqrt{abc}$ in die Urfläche übergeht. Der Urfläche entspricht also der Wert

$$\varphi(\Theta) = \frac{4}{\pi\sqrt{abc}}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\Theta}\right)$$

woraus nach (254) (255):

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \frac{4}{\pi\sqrt{abc}} \int_0^\pi \frac{1 \pm \cos\vartheta}{\Theta^2} \partial\vartheta$$

das ist

$$m = u\sqrt{\frac{uv}{abc}}; \quad n = v\sqrt{\frac{uv}{abc}} \tag{269}$$

Von dieser Speciallösung der Gl. (248) ausgehend kann man nun leicht eine allgemeinere Lösung ableiten. Gl. (250) zeigt nämlich, sofern sie bei einem constanten Increment zu μ unverändert bleibt, dass man in jeder Lösung zu $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ dieselbe Constante $\frac{1}{\sigma}$ addiren kann. Es gehen dann u, v über in

$$\frac{\sigma u}{u+\sigma}, \quad \frac{\sigma v}{v+\sigma}$$

Nach Substitution dieser Grössen und Division durch σ^3 erhält man zunächst aus (269):

$$m = \left(\frac{u}{u+\sigma}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{v}{abc(v+\sigma)}}; \quad n = \left(\frac{v}{v+\sigma}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{u}{abc(u+\sigma)}} \tag{270}$$

dann allgemeiner

$$m = u\sqrt{\frac{uv}{abc}} \int \frac{\psi(\sigma)\partial\sigma}{(u+\sigma)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v+\sigma}}; \quad n = v\sqrt{\frac{uv}{abc}} \int \frac{\chi(\sigma)\partial\sigma}{(v+\sigma)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u+\sigma}}$$

wo die willkürlichen Functionen ψ, χ, und die ebenso willkürlichen Grenzen der Integrale unabhängig von u, v sein müssen. Leitet man aus m nach (249) n ab, so ergiebt sich der vorstehende Ausdruck für $\chi(\sigma) = \psi(\sigma)$, also enthalten m und n nur **eine** willkürliche Function.

Nach Einsetzung der Werte von m und n in (260) erhält man:

$$\partial x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a(c-b)}{\Delta}} \int \psi(\sigma)\partial\sigma \frac{(v-a)(v+\sigma)\partial u + (u-a)(u-\sigma)\partial\sigma}{\sqrt{(u-a)(v-a)}\,\{(u+\sigma)(v+\sigma)\}^{\frac{3}{2}}}$$

oder, wenn $u_1 = \sqrt{\frac{u-a}{u+\sigma}}$, $v_1 = \sqrt{\frac{v-a}{v+\sigma}}$ gesetzt wird:

$$\partial x = \sqrt{\frac{a(c-b)}{\Delta}} \int \frac{\psi(\sigma)\partial\sigma}{a+\sigma}(v_1\partial u_1 + u_1\partial v_1)$$

also nach Integration:

$$x = \sqrt{\frac{a(c-b)(u-a)(v-a)}{\varDelta}} \int \frac{\psi(\sigma)\,\partial\sigma}{(a+\sigma)\sqrt{(u+\sigma)(v+\sigma)}}$$

$$y = \sqrt{\frac{b(a-c)(u-b)(v-b)}{\varDelta}} \int \frac{\psi(\sigma)\,\partial\sigma}{(b+\sigma)\sqrt{(u+\sigma)(v+\sigma)}}$$

$$z = \sqrt{\frac{c(b-a)(u-c)(v-c)}{\varDelta}} \int \frac{\psi(\sigma)\,\partial\sigma}{(c+\sigma)\sqrt{(u+\sigma)(v+\sigma)}}$$

Hier entsprechen jedoch rationale Functionen ψ logarithmischen Ausdrücken der Coordinaten. Um statt dessen eine unendliche Reihe algebraischer Lösungen zu erhalten, kann man von den Werten (270) aus, denen

$$x = \frac{1}{a+\sigma} \sqrt{\frac{a(c-b)(u-a)(v-a)}{\varDelta(u+\sigma)(v+\sigma)}}; \text{ etc.}$$

entspricht, durch Differentiation partiell nach σ neue Werte ableiten. Dies giebt successive:

$$x = \frac{1}{a+\sigma} \sqrt{\frac{a(c-b)(u-a)(v-a)}{\varDelta(u+\sigma)(v+\sigma)}} \left(\frac{2}{a+\sigma} + \frac{1}{u+\sigma} + \frac{1}{v+\sigma}\right); \text{ etc.}$$

$$x = \frac{1}{a+\sigma} \sqrt{\frac{a(c-b)(u-a)(v-a)}{\varDelta(u+\sigma)(v+\sigma)}} \left\{\frac{8}{(a+\sigma)^2} + \frac{4}{a+\sigma}\left(\frac{1}{u+\sigma} + \frac{1}{v+\sigma}\right) + \frac{3}{(u+\sigma)^2} + \frac{2}{(u+\sigma)(v+\sigma)} + \frac{3}{(v+\sigma)^2}\right\}; \text{ etc.}$$

In diesen Formeln trägt σ nichts zur Allgemeinheit bei, man kann es daher nach den Operationen null setzen, und einfach schreiben:

$$x = \sqrt{\frac{(c-b)(u-a)(v-a)}{a\varDelta uv}} \left\{A + A_1\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) + A_2\left[\frac{8}{a^2} + \frac{4}{a}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) + \frac{3}{u^2} + \frac{2}{uv} + \frac{3}{v^2}\right] + \ldots\right\}$$

So gelangt man auf ganz verschiedenem Wege wieder zu den Lösungen (266).

Die allgemeinste Lösung der Gl. (248) würde 2 willkürliche Functionen einer Variabeln enthalten müssen. Diese Bedingung lässt sich erfüllen, indem man vom vollständigen Integrale der Gl. (252)

$$\nu_2 = \nu_1 \left\{\varphi(\sigma) + \psi(\sigma) \int \frac{\partial\nu}{\nu_1^{\,2}}\right\}$$

ausgeht, dieses in (251) für ν_1 einführt, dann nach σ zwischen den weitest möglichen constanten Grenzen integrirt. So erhält man:

$$m = \int \partial\sigma \int_0^\pi e^{\sigma(\mu+\nu\cos\vartheta)} (1+\cos\vartheta) \left\{ \varphi(\sigma) + \psi(\sigma) \int \frac{\partial\nu}{\nu_1^2} \right\} \partial\vartheta$$

wo

$$\nu_1 = \nu \int_0^\pi e^{\sigma\nu\cos\vartheta} (1+\cos\vartheta)\, \partial\vartheta$$

und würde daraus n und die Coordinaten in der beschriebenen Weise berechnen können; doch lässt sich davon schwerlich eine Anwendung machen.

15. Allgemeinstes orthogonales Flächensystem, dessen eine Schar aus coaxialen Flächen 2. Grades besteht.

Bei der folgenden Untersuchung will ich die bis hierher angestrebte Allgemeinheit der Urfläche ganz fallen lassen und von einer Fläche 2. Grades ausgehen, die sogar in Bezug auf Mittelpunkt und Axenrichtungen nicht variiren soll. Allein die Bedingung fester Brennpunkte fällt hier weg; dies ist der einzige Schritt der Verallgemeinerung vom confocalen System aus. Doch schon in diesem einfachen Falle zeigen sich einige neue bemerkenswerte Beziehungen, die bei grösserer Variabilität sich der Beobachtung entziehen würden.

Es werde die eine Flächenschar gebildet von der variabeln Fläche 2. Grades

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a\frac{c-b}{\varDelta}(k-a)(l-a) \\ y^2 &= b\frac{a-c}{\varDelta}(k-b)(l-b) \\ z^2 &= c\frac{b-a}{\varDelta}(k-c)(l-c) \\ \varDelta &= (b-c)(c-a)(a-b) \end{aligned}\right\} \tag{271}$$

wo a, b, c Functionen eines dritten Parameters w, k Function von (u, w), und l Function von (v, w) ist. Diese Functionen sind so zu bestimmen, dass

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

wird; dann wird die Fläche $w =$ const. von den Flächen $u =$ const. und $v =$ const., welche einander bedingungslos rechtwinklig schneiden,

gleichfalls rechtwinklig geschnitten. Dividirt man sie bzhw. durch $\frac{\partial k}{\partial u}$, $\frac{\partial l}{\partial v}$, so gehen sie über in

$$\frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial k}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial k}\frac{\partial z}{\partial w}=0 \tag{272}$$

$$\frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial w}=0$$

Ausserdem ist, identisch,

$$\frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial y}{\partial k}\frac{\partial y}{\partial l}+\frac{\partial z}{\partial k}\frac{\partial z}{\partial l}=0$$

Setzt man

$$x_1=a\frac{c-b}{\varDelta}(l-a)=\frac{a}{a-b}\frac{l-a}{a-c}$$

so wird

$$x^2=x_1(k-a)$$

und giebt nach Differentiation:

$$2x\frac{\partial x}{\partial k}=x_1;\quad \frac{2}{x}\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w}+\frac{1}{k-a}\left(\frac{\partial k}{\partial w}-a'\right)$$

also nach Multiplication:

$$4\frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{\partial x_1}{\partial w}+\frac{x_1}{k-a}\left(\frac{\partial k}{\partial w}-a'\right)$$

Bezeichnen y_1, z_1 die analogen Ausdrücke für x_1, so erhält man nach Einführung in (272):

$$\frac{\partial}{\partial w}(x_1+y_1+z_1)+x_1\frac{\frac{\partial k}{\partial w}-a'}{k-a}+y_1\frac{\frac{\partial k}{\partial w}-b'}{k-b}+z_1\frac{\frac{\partial k}{\partial w}-c'}{k-c}=0$$

Nun ist

$$x_1+y_1+z_1=\frac{a(c-b)(l-a)+b(a-c)(l-b)+c(b-a)(l-c)}{\varDelta}=-1$$

daher fällt der erste Teil der Linken weg, und nach Multiplication mit $(k-a)(k-b)(k-c)$ bleibt:

$$\begin{aligned}&a(c-b)(l-a)(k-b)(k-c)\left(\frac{\partial k}{\partial w}-a'\right)\\&+b(a-c)(l-b)(k-c)(k-a)\left(\frac{\partial k}{\partial w}-b'\right)\\&+c(b-a)(l-c)(k-a)(k-b)\left(\frac{\partial k}{\partial w}-c'\right)=0\end{aligned}$$

das ist, entwickelt:

$$(k-l)\left(\varDelta k\frac{\partial k}{\partial w}+Pk^2-P_1k+P_2\right)=P(k-a)(k-b)(k-c) \quad (273)$$

und analog:

$$(l-k)\left(\varDelta l\frac{\partial l}{\partial w}+Pl^2-P_1l+P_2\right)=P(l-a)(l-b)(l-c) \quad (274)$$

wo zur Abkürzung

$$P = a(b-c)a'+b(c-a)b'+c(a-b)c' \quad (275)$$

$$P_1 = a(b^2-c^2)a'+b(c^2-a^2)b'+c(a^2-b^2)c' \quad (276)$$

$$P_2 = abc\{(b-c)a'+(c-a)b'+(a-b)c'\} \quad (277)$$

gesetzt ist.

Soll nun Gl. (273) unabhängig von l, soll ebenso Gl. (274) unabhängig von k erfüllt werden, so müssen zur Linken die beiden Klammern, zur Rechten P verschwinden, und die gesammten Bedingungen sind jetzt:

$$P=0$$

$$\varDelta k\frac{\partial k}{\partial w}=P_1k-P_2$$

$$\varDelta l\frac{\partial l}{\partial w}=P_1l-P_2$$

Die erste Gleichung reducirt die 3 Functionen von w, nämlich a, b, c, auf zwei. Da sie nun sichtlich durch

$$a'=b'=c'=1$$

und durch

$$aa'=bb'=cc'=1$$

erfüllt wird, so ist ihre allgemeinste Lösung:

$$a\partial a=a\partial Q+\partial R;\quad b\partial b=b\partial Q+\partial R;\quad c\partial c=cQ+R$$

wodurch die Gl. (276) (277) übergehen in

$$P_1=\varDelta Q';\quad P_2=-\varDelta R' \quad (278)$$

und die Gl. (273) (274) in

$$k\frac{\partial k}{\partial w}=kQ'+R';\quad l\frac{\partial l}{\partial w}=lQ'+R'$$

Hiernach sind a, b, c, k, l sämmtlich Lösungen einer Gleichung

$$t\frac{\partial t}{\partial w}=tQ'+R' \quad (279)$$

wo Q, R willkürliche Functionen von w bezeichnen. Ist

$$t = f(w, \text{const.})$$

das Integral derselben, so hat man:

$$a = f(w, A); \quad b = f(w, B); \quad c = f(w, C)$$
$$k = f(w, u); \quad l = f(w, v)$$

wo A, B, C willkürliche Constanten bezeichnen, und u, v zur Vereinfachung statt beliebiger Functionen bzhw. von u und von v geschrieben sind.

Ist beispielsweise $R' = 0$, so giebt Gl. (279):

$$t = Q + \text{const.}$$

daher ist hier

$$a = Q + A; \quad b = Q + B; \quad c = Q + C$$
$$k = Q + u; \quad l = Q + v$$

und, wenn man $Q = -w$ setzt, so gehen die Gl. (271) über in

$$x^2 = \frac{B-C}{\Delta}(u-A)(v-A)(w-A)$$

$$y^2 = \frac{C-A}{\Delta}(u-B)(v-B)(w-B)$$

$$z^2 = \frac{A-B}{\Delta}(u-C)(v-C)(w-C)$$

demnach entspricht der Fall $R' = 0$ dem confocalen Flächensystem 2. Grades.

Umgekehrt geht aus der Annahme fester Brennpunkte der Urfläche hervor:

$$a - b = \text{const.}; \quad a - c = \text{const.} \quad \text{also}$$
$$a' = b' = c'$$

daher nach (277) und (279):

$$P_2 = 0; \quad R' = 0$$

Folglich brauchen wir, um den Fall confocaler Flächen auszuschliessen, nur festzusetzen, dass R' nicht constant null sei.

Ein zweites Beispiel der Integrabilität ist

$$Q' = 0$$

Wir setzen der Einfachheit wegen $R' = \frac{1}{2}$, dann wird

$$t^2 = w + \text{const.}$$

daher

$$a^2 = w + A; \quad b^2 = w + B; \quad c^2 = w = C$$
$$k^2 = u + w; \quad l^2 = v + w$$

und man hat das orthogonale Flächensystem:

$$x^2 = \frac{\sqrt{w+u} - \sqrt{w+A}}{\sqrt{w+B} - \sqrt{w+A}} \, \frac{\sqrt{w+v} - \sqrt{w+A}}{\sqrt{w+C} - \sqrt{w+A}} \sqrt{w+A}$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{w+u} - \sqrt{w+B}}{\sqrt{w+C} - \sqrt{w+B}} \, \frac{\sqrt{w+v} - \sqrt{w+B}}{\sqrt{w+A} - \sqrt{w+B}} \sqrt{w+B}$$

$$z^2 = \frac{\sqrt{w+u} - \sqrt{w+C}}{\sqrt{w+A} - \sqrt{w+C}} \, \frac{\sqrt{w+v} - \sqrt{w+C}}{\sqrt{w+B} - \sqrt{w+C}} \sqrt{w+C}$$

Der Ausdruck enthält 5 Quadratwurzeln, deren jede unabhängig von der andern durchgängig positiv oder durchgängig negativ zu nehmen ist. Die Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{w+A}$, $\sqrt{w+B}$, $\sqrt{w+C}$ sind beliebig, nur nicht sämmtlich negativ, weil

$$\frac{x^2}{\sqrt{w+A}} + \frac{y^2}{\sqrt{w+B}} + \frac{z^2}{\sqrt{w+C}} = 1$$

ist. Von diesen Vorzeichen sind die der Wurzeln $\sqrt{w+u}$, $\sqrt{w+v}$ nach dem Gesetze abhängig, dass, wenn man alle 5 Wurzeln sammt 0 und $+\infty$ nach Grössenfolge ordnet, zwischen die 2 letztern und 0 und ∞ je eine der 3 erstern fällt. Das Flächensystem umfasst dann sämmtliche hiernach gestattete Combinationen von Vorzeichen und ist nach dieser Bestimmung identisch mit demjenigen, welches resultirt, wenn man die Gleichungen in rationale transformirt.

Die Gl. (279) ist auch leicht zu integriren, wenn R linear in Q ist. Sei also $Q = w$, $R = hw$, dann wird

$$\partial w = \frac{t\partial t}{t+h}$$

integrirt:

$$w = t - h \log \frac{t+h}{\text{const.}} \quad \text{oder} \quad t + h = \text{const.}\, e^{\frac{t-w}{h}}$$

Dies giebt:

$$a + h = A e^{\frac{a-w}{h}}; \quad b + h = B e^{\frac{b-w}{h}}; \quad c + h = C e^{\frac{c-w}{h}}$$
$$k + h = u e^{\frac{k-w}{h}}; \quad l + h = v e^{\frac{l-w}{h}}$$

Das orthogonale Flächensystem lässt sich dann noch durch ein System von 8 Gleichungen darstellen, indem man die 5 vorstehenden zu den 3 Gl. (244) hinzufügt.

XXVI.

Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Krümmungsmaass der Flächen.

Von

Herrn Dr. *G. Escherich*,

Privatdocent an der Universität Graz.

Gauss entwickelt in seinen Disquisitiones generales circa superficies curvas zuerst den Ausdruck für das Krümmungsmaass unter der Voraussetzung, die Gleichung der Fläche habe die Form $z = f(x, y)$ — wobei sich zugleich der Satz ergibt, dass das Krümmungsmaass gleich dem reciproken Producte der beiden Hauptradien ist — und transformirt dann den so erhaltenen Ausdruck in die Variablen p, q. Bei dieser Transformation sind die schleppenden Rechnungen des Art. 10. nicht zu umgehen und ich versuche daher die Formel für das Krümmungsmaass direct für die Variablen p, q zu entwickeln.

A, B, C, E, F, G haben die von Gauss gegebene Bedeutung; p, q seien die Variablen der Fläche F; p', q' die einer Kugelfläche vom Radius 1, deren Centrum im Coordinatenursprung 0 liegt. Zieht man längs dem Contour des Elementes ds der Fläche alle Normalen, so werden die durch 0 zu ihnen parallel gezogenen Geraden auf der Kugelfläche ein bestimmtes Element $d\sigma$ umgrenzen. Da nur diese Parallelen Normalen der Kugelfläche sind, so hängen die den Elementen ds und $d\sigma$ zugehörigen Variablen durch die Gleichungen von einander ab:

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$

Es wird also dem Punkte:

p,	q	auf F der Punkt	p',	q'
$p+dp$,	q	- - - -	$p'+\frac{\partial p'}{\partial p}dp$,	$q'+\frac{\partial q'}{\partial p}dp$
$p+dp$,	$q+dq$	- - - -	$p'+\frac{\partial p'}{\partial p}dp+\frac{\partial p'}{\partial q}dq$,	$q'+\frac{\partial q'}{\partial p}dp+\frac{\partial q'}{\partial q}dq$

auf der Kugel entsprechen. Daher ist

$$d\sigma = \left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right)\sqrt{E'G'-F'^2}\,dp\,dq$$
$$= \left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right)\sqrt{EG-F^2}\,dp\,dq$$

also:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}$$

Differentiirt man $A = A'$, $B = B'$ sowol nach p als q, so erhält man:

$$\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} = \left(\frac{\partial A'}{\partial p'}\frac{\partial B'}{\partial q'}-\frac{\partial A'}{\partial q'}\frac{\partial B'}{\partial p'}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right)$$

woraus man bildet:

$$\frac{\partial B}{\partial p}\frac{\partial C}{\partial q}-\frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial C}{\partial p} = \left(\frac{\partial B'}{\partial p'}\frac{\partial C'}{\partial q'}-\frac{\partial B'}{\partial q'}\frac{\partial C'}{\partial p'}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right)$$
$$\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial q}-\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} = \left(\frac{\partial C'}{\partial p'}\frac{\partial A'}{\partial q'}-\frac{\partial C'}{\partial q'}\frac{\partial A'}{\partial p'}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right)$$

Die rechts stehenden aus den Differentialquotienten von A', B', C' gebildeten Ausdrücke lassen sich durch die Bemerkung transformiren, dass für jeden Punkt x, y, z der Kugel ist:

$$A' = xW', \quad B' = yW', \quad C' = zW'$$

wo

$$W' = \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}$$

Multiplicirt man die so umgewandelten Gleichungen der Reihe nach mit A, B, C und berücksichtigt, dass für die in Rechnung stehenden Elemente $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ ist, so erhält man durch Addition der drei Gleichungen:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial p}\frac{\partial C}{\partial q}-\frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial C}{\partial p}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial q}-\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}\right)$$
$$=(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right)$$

und daraus

$$k = \frac{d\sigma}{ds} = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \frac{\partial A}{\partial p}, & \frac{\partial B}{\partial p} & \frac{\partial C}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q}, & \frac{\partial B}{\partial q}, & \frac{\partial C}{\partial q} \end{vmatrix} : (A^2+B^2+C^2)^2$$

Da nun

$$A\frac{\partial x}{\partial p} + B\frac{\partial y}{\partial p} + C\frac{\partial z}{\partial p} = 0, \quad A\frac{\partial x}{\partial q} + B\frac{\partial y}{\partial q} + C\frac{\partial z}{\partial q} = 0$$

ist, so ist das Product der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \frac{\partial A}{\partial p}, & \frac{\partial B}{\partial p}, & \frac{\partial C}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q}, & \frac{\partial B}{\partial q} & \frac{\partial C}{\partial q} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial z}{\partial q} \\ A, & B, & C \end{vmatrix}$$

$$= (A^2+B^2+C^2)\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial B}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial B}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante zweiten Grades lässt sich durch Substitution der aus den Gl.

$$A\frac{\partial x}{\partial p} + B\frac{\partial y}{\partial p} + C\frac{\partial z}{\partial p} = 0 \text{ und } A\frac{\partial x}{\partial q} + B\frac{\partial y}{\partial q} + C\frac{\partial z}{\partial q} = 0$$

mittelst Differentiation nach p und q erhaltenen Resultate in

$$(A^2+B^2+C^2)\begin{vmatrix} A\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} & A\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+C\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q} \\ A\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+C\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}, & A\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \end{vmatrix}$$

umwandeln. Da die früher als Multiplicator fungirende Determinante selbst $= A^2+B^2+C^2$ ist, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \frac{\partial A}{\partial p}, & \frac{\partial B}{\partial p}, & \frac{\partial C}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q}, & \frac{\partial B}{\partial q}, & \frac{\partial C}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}. & A\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+C\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q} \\ A\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+C\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}, & A\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \end{vmatrix}$$

Nun sind in der Determinante zweiten Grades die Glieder der ersten Zeile selbst die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}, & \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, & \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q} \end{vmatrix}$$

Die Glieder der zweiten Zeile sind dieselben Determinanten nur in umgekehrter Anordnung. Da also je zwei in derselben Zeile stehende Determinanten immer zwei Colonnen von Gliedern gemeinsam haben, so erhält man nach dem La Place'schen Determinanten-Satz:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \frac{\partial A}{\partial p}, & \frac{\partial B}{\partial p}, & \frac{\partial C}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q}, & \frac{\partial B}{\partial q}, & \frac{\partial C}{\partial q} \end{vmatrix} = k(A^2+B^2+C^2)^2 = k(EG-F^2)^2$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}, & \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q} \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q} \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}, & \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante multiplicire man mit:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} & 0, & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} & -\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} & -\frac{\partial x}{\partial p} & -\frac{\partial x}{\partial q} \\ 0, & 0, & -\frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q}, & -\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, & -\frac{\partial y}{\partial p}, & -\frac{\partial y}{\partial q} \\ 0, & 0, & -\frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q}, & -\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, & -\frac{\partial z}{\partial p}, & -\frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} = -k(EG-F^2)^2$$

Beachtet man bei der Multiplication, dass

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}, \quad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\frac{\partial F}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\frac{\partial F}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p};$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}. \quad \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2$$

$$=\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2};$$

so findet man als Resultat dieser Multiplication:

$$-[k(EG-F^2)]^2 = \begin{vmatrix} E, & F, & \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right), \\ F, & G, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}, & \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\right), & \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}. \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}, & 0, \\ 0, & 0, & -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, \\ 0, & 0, & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}. \end{vmatrix}$$

durch Vertauschung der Reihen gewinnt man hieraus:

$$[k(EG-F^2)]^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}. \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q} & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, & 0, \\ -\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right). & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}. & -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right), \\ -F, & -G, & -\left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\right). \\ -E, & -F, & -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}. \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist eine Determinante gauche; sie ist also selbst ein Quadrat und zwar ist nach Jacobi's Bezeichnung:

$$k(EG-F^2) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

woraus man nach den Regeln zur Berechnung von (1, 2, 3, 4, 5, 6) k selbst, ausgedrückt durch die Grössen E, F, G, findet.

Dass dieses k auch gleich dem reciproken Produkte der Hauptradien der Krümmung ist, erhellt, sobald man p und q in die orthogonalen Coordinaten x, y specialisirt. Man erhält dann

$$\begin{array}{ccc|}
\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, & 0, & 0 \\[2ex]
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, & 0, & 0 \\[2ex]
0, & -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p} \\[2ex]
-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right), & -\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right), & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p} \\[2ex]
-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}, & -E, & -F \\[2ex]
-\left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\right), & -F, & -G
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|}
\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right) & F, & E \\[2ex]
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}, & G, & F \\[2ex]
\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right), & \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\right), & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p} \\[2ex]
0, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q} \\[2ex]
-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, & 0, & 0 \\[2ex]
-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, & 0, & 0
\end{array}$$

$$k = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

wo p, q, r, s, t die bekannten Bedeutungen haben.

XXVII.

Ueber die regulären und Poinsot'schen Körper und ihre Inhaltsbestimmung vermittelst Determinanten.

Von

Herrn Dr. *O. Löwe*
in Marburg.

Die vorliegende Untersuchung hat den Zweck, die Inhalte der fünf regulären und der Poinsot'schen Körper durch Determinanten zu bestimmen. Da sich indessen diese Aufgabe in Beziehung auf das Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder fast allzu einfach gestaltet, so möge die darauf gerichtete Untersuchung gleichsam nur als Einleitung angesehen werden, während die Betrachtung des Dodekaeders, Ikosaeders und der Poinsot'schen Polyeder den hauptsächlichsten Inhalt bildet.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, dass bei rechtwinkligem Coordinatensystem das sechsfache Volumen eines beliebigen Tetraeders durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \\ x^{IV}, & y^{IV}, & z^{IV}, & 1 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt werden kann, worin die mit den Indices versehenen Grössen, die Coordinaten der vier Eckpunkte des Tetraeders bezeichnen. Diese Determinante reducirt sich jedoch auf eine des dritten Grades,

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}$$

sobald eine Ecke des Tetraeders mit dem Anfangspunkt des Coordinatensystems zusammenfällt.

Bezeichnen wir die halbe Achse mit a, so erhalten wir beim Hexaeder, wenn wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde legen, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des Körpers ist und dessen Achsen senkrecht auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen stehen, die Coordinaten der 8 Eckpunkte

$$\begin{array}{llll} x_1 = a & x_2 = a & x_3 = -a & x_4 = -a \\ y_1 = a & y_2 = -a & y_3 = -a & y_4 = a \\ z_1 = a & z_2 = a & z_3 = a & z_4 = a \\ x_5 = a & x_6 = a & x_7 = -a & x_8 = -a \\ y_5 = a & y_6 = -a & y_7 = -a & y_8 = a \\ z_5 = -a & z_6 = -a & z_7 = -a & z_8 = -a \end{array}$$

wobei $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$ die Gleichungen der Würfelflächen sind.

Der Inhalt des Hexaeders ergiebt sich aus einem Tetraeder, dessen Ebenen durch 3 benachbarte Eckpunkte und den Mittelpunkt gehen, für welchen wir nach Obigem die Determinante

$$6\varDelta = \begin{vmatrix} a & & \\ a & & \\ a & & \end{vmatrix} \quad a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

haben. Wir erhalten $\varDelta = \frac{2a^3}{3}$, welches mit 12 multiplicirt $= 8a^3$, den Inhalt des Würfels giebt.

In Beziehung auf das reguläre Tetraeder sehen wir, dass die mit den Indices 2, 4, 5 und 7 versehenen Coordinaten Eckpunkte eines solchen bezeichnen, dessen Inhalt wir aus der Determinante

$$6\varDelta = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a^3$$

finden können. Der ganze Inhalt des angenommenen Tetraeders ist demnach $4 \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{8a^3}{3}$.

Für das Oktaeder, dessen Ecken die Mitten der Flächen vom obigen Würfel sind, erhalten wir alsdann die Coordinaten

$$\begin{array}{llllll} x_1 = a & x_2 = 0 & x_3 = 0 & x_4 = -a & x_5 = 0 & x_6 = 0 \\ y_1 = 0 & y_2 = a & y_3 = 0 & y_4 = 0 & y_5 = -a & y_6 = 0 \\ z_1 \quad 0 & z_2 = 0 & z_3 = a & z_4 = 0 & z_5 = 0 & z_6 = -a \end{array}$$

Der Inhalt ergiebt sich gleich dem achtfachen Inhalt des Tetraeders, welcher durch die Determinante

$$6\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$$

bestimmt ist, woraus für den Inhalt des Oktaeders $= \frac{4a^3}{3}$ folgt.

Gehen wir nun zur Entstehung des Ikosaeders aus dem Oktaeder über, so ist bekannt, dass sich die 12 Eckpunkte desselben durch eine nach stetiger Proportion vorgenommene Teilung der Oktaederkanten erhalten lassen. Wir wollen hier diese Entstehung durch eine zweimalige Abstumpfung der Ecken des Oktaeders bewirken. Die Gleichungen der 8 Oktaederflächen sind

$$\begin{array}{ll} x+y+z-a=0 & x+y-z-a=0 \\ x-y+z-a=0 & x-y-z-a=0 \\ -x-y+z-a=0 & -x-y-z-a=0 \\ -x+y+z-a=0 & -x+y-z-a=0 \end{array}$$

Legen wir senkrecht zu den Achsen, in der Entfernung am $(m < 1)$ vom Mittelpunkt des Coordinatensystems, Ebenen, so werden die Ecken des Oktaeders durch quadratische Flächen abgestumpft. Bezeichnen wir die Ecken des nun entstandenen Körpers mit $Q_1 Q_2 Q_3$ u. s. w., so berechnen sich aus Fig. 1. die Coordinaten

$$\begin{array}{llll}
\text{für } Q_1: & x=0 & \text{für } Q_2: & x=-a(1-m) \\
 & y=a(1-m) & & y=0 \\
 & z=am & & z=am \\
\text{,, } Q_3: & x=0 & \text{,, } Q_4: & x=a(1-m) \\
 & y=-a(1-m) & & y=0 \\
 & z=am & & z=am \\
\text{,, } Q_5: & x=am & \text{,, } Q_6: & x=am \\
 & y=0 & & y=a(1-m) \\
 & z=a(1-m) & & z=0 \\
\text{,, } Q_7: & x=am & \text{,, } Q_8: & x=am \\
 & y=0 & & y=-a(1-m) \\
 & z=-a(1-m) & & z=0
\end{array}$$

für Q_9: $x = a(1-m)$ für Q_{10}: $x = 0$

$y = am$ $y = am$

$z = 0$ $z = a(1-m)$

u. s. w.

Die 6 Punkte $Q_1 Q_4 Q_5 Q_6 Q_9 Q_{10}$ bilden ein Sechseck mit abwechselnd gleichen Seiten. Sämmtliche Ecken dieses Körpers liegen auf einer Kugel mit dem Radius

$$r = a\sqrt{m^2+(1-m)^2}.$$

Jetzt stumpfen wir ferner die Ecken Q_2, Q_4, Q_6, Q_8 u. s. w. derart ab, dass von jeder quadratischen Fläche nur eine Diagonale als Kante übrig bleibt. Der Körper hat alsdann nur noch 12 Ecken und wird, wie Fig. 1. zeigt, von 20 Dreiecksflächen begrenzt, von denen 8 (Oktaederflächen) gleichseitige, die 12 übrigen (die Abstumpfungsflächen) gleichschenklige Dreiecke bilden, und es leuchtet sofort ein, dass, wenn jene gleichschenkligen Dreiecke ebenfalls gleichseitige werden, unser Körper in das reguläre Ikosaeder übergeht.

Um diese Bedingung zu erfüllen, betrachten wir die Fläche $Q_1 Q_3 Q_5$, deren Gleichung wir aus folgender Determinante erhalten

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & a(1-m) & am & 1 \\ 0 & -a(1-m) & am & 1 \\ am & 0 & a(1-m) & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a(1-m) & am & 1 \\ -a(1-m) & am & 1 \\ 0 & a(1-m) & 1 \end{vmatrix}$$

$$- y \begin{vmatrix} 0 & am & 1 \\ 0 & am & 1 \\ am & a(1-m) & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & a(1-m) & 1 \\ 0 & -a(1-m) & 1 \\ am & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & a(1-m) & am \\ 0 & -a(1-m) & am \\ am & 0 & a(1-m) \end{vmatrix}$$

d. h. $(2m-1)x+mz-am^2 = 0.$

Ganz analog ergeben sich als Gleichungen der übrigen gleichschenkligen Dreiecksflächen

$$-(2m-1)x+mz-am^2 = 0$$
$$mx+(2m-1)y-am^2 = 0$$
$$mx-(2m-1)y-am^2 = 0$$
$$my+(2m-1)z-am^2 = 0$$
$$my-(2m-1)z-am^2 = 0$$

und die anderen sechs durch Umkehrung der Vorzeichen der Glieder mx, my und mz.

Die Grösse m ist jedoch in diesen Gleichungen noch unbestimmt. Sie liegt, wie schon oben gesagt, zwischen $m = 0$ und $m = \pm 1$ und bestimmt sich, für den Fall des Ikosaeders, aus einer Relation, die man für $Q_1 Q_3 = Q_1 Q_5$ erhält, nämlich aus der Bedingungsgleichung

$$4a^2(1-m)^2 = a^2m^2 + a^2(1-m)^2 + a^2(1-2m)^2 \quad \text{d. i.}$$

$$m^2 + m - 1 = 0 \quad \text{woraus}$$

$$m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803 = 2 \sin 18^0$$

welche Zahl bekanntlich den grösseren Abschnitt einer in stetige Proportion geteilten Linie misst. Dieser Wert in obige Gleichungen und Coordinaten eingesetzt, giebt als Gleichungen der eben betrachteten Begrenzungsflächen

$$2(\sqrt{5}-2)x + (\sqrt{5}-1)z - a(3-\sqrt{5}) = 0$$
$$-(\sqrt{5}-2)x + (\sqrt{5}-1)z - a(3-\sqrt{5}) = 0$$
$$(\sqrt{5}-1)x + 2(\sqrt{5}-2)y - a(3-\sqrt{5}) = 0$$
$$(\sqrt{5}-1)x - 2(\sqrt{5}-2)y - a(3-\sqrt{5}) = 0$$
$$(\sqrt{5}-1)y + 2(\sqrt{5}-2)z - a(3-\sqrt{5}) = 0$$
$$(\sqrt{5}-1)y - 2(\sqrt{5}-2)z - a(3-\sqrt{5}) = 0$$

oder

$$\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$-\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + \frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} - \frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

$$\frac{y}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} + \frac{z}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} - 1 = 0$$

worin $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1+m$ ist.

Der senkrechte Abstand dieser 12 Dreiecke wird jetzt gleich dem senkrechten Abstand der 8 Oktaederflächen vom Mittelpunkt $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$, da

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1+m)^2}}} = a\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad \text{ist.}$$

Die Coordinaten der 12 Eckpunkte des Ikosaeders sind alsdann, wenn dieselben (s. Fig. 2.) durch $P_1 P_2 P_3 \ldots . P_{12}$ bezeichnet werden, wobei die Punkte $P_1 P_2 P_3 \ldots . P_{12}$ resp. $Q_8 Q_1 Q_5 \ldots . Q_{21}$ entsprechen, folgende

für P_1: $x = 0$, $y = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $z = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

für P_2: $x = 0$, $y = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $z = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

„ P_3: $x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

„ P_4: $x = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $y = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $z = 0$

„ P_5: $x = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $y = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $z = 0$

„ P_6: $x = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

„ P_7: $x = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $y = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $z = 0$

„ P_8: $x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

„ P_9: $x = 0$, $y = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $z = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

„ P_{10}: $x = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y = 0$, $z = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

P_{11} $x = -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ $\quad$ P_{12} $x = 0$

$y = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ $\quad$ $y = a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

$z = 0$ $\quad$ $z = -a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Mit Hülfe dieser Coordinaten ergiebt sich der Inhalt eines Tetraeders, welches durch drei, einer Seitenfläche angehörige Eckpunkte und den Mittelpunkt gebildet wird, durch die Determinante

$$6\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a(1-m) & am \\ 0 & -a(1-m) & am \\ am & 0 & a(1-m) \end{vmatrix} = 2a^3m^2(1-m)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) & a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ 0 & -a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) & a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) & 0 & a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{vmatrix} = a^3(7-3\sqrt{5})$$

$\Delta = \frac{a^3}{6}(7-3\sqrt{5})$; demnach wird der Inhalt des Ikosaeders

$$= \frac{10a^3}{3}(7-3\sqrt{5}).$$

Bezeichnen wir mit φ den Winkel, welchen eine der Coordinatenachsen, mit der nach der benachbarten Ecke gezogenen Geraden bildet, so dass

$$r\cos\varphi = am, \qquad r\sin\varphi = a(1-m)$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{2}\,\text{Kante}}{r} = \frac{y}{r} = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2r}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2r} \quad \text{u. s. w.}$$

wird, so erhalten wir für die Eckpunkte $P_1 P_2 P_3 \ldots. P_{12}$ des Ikosaeders die Coordinaten

für P_1: $x = 0$ $\quad$ für P_2: $x = 0$,

$y = -r\sin\varphi$ $\quad$ $y = r\sin\varphi$

$z = r\cos\varphi$ $\quad$ $z = r\cos\varphi$

für P_3: $x = r\cos\varphi$, $y = 0$, $z = r\sin\varphi$ — für P_4: $x = r\sin\varphi$, $y = -r\cos\varphi$, $z = 0$

„ P_5: $x = -r\sin\varphi$, $y = -r\cos\varphi$, $z = 0$ — „ P_6: $x = -r\cos\varphi$, $y = 0$, $z = r\sin\varphi$

„ P_7: $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $z = 0$ — „ P_8: $x = r\cos\varphi$, $y = 0$, $z = -r\sin\varphi$

„ P_9: $x = 0$, $y = -r\sin\varphi$, $z = -r\cos\varphi$ — „ P_{10}: $x = -r\cos\varphi$, $y = 0$, $z = -r\sin\varphi$

„ P_{11}: $x = -r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $z = 0$ — „ P_{12}: $x = 0$, $y = r\sin\varphi$, $z = -r\cos\varphi$

Den Inhalt des Tetraeders, welches von den Eckpunkten $P_1 P_2 P_3$ und dem Mittelpunkt des Körpers gebildet wird, finden wir aus der Determinante

$$6\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ 0 & r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ r\cos\varphi & 0 & r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^3(\sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi)$$

Hieraus der Inhalt des Ikosaeders

$$= \frac{10}{3} r^3(\sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi)$$

Der Radius r lässt sich leicht durch a ausdrücken, da stets $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Wir erhalten, wie schon oben erwähnt, $r = a\sqrt{1-2m+m^2} = a\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Die Gruppirung der Flächen des Ikosaeders in ihrer Anordnung zu fünf wird anschaulicher, wenn wir zu einer Coordinatenachse, z. B. der z Achse eine Eckenachse wählen, das Coordinatensystem also um die x Achse in der yz Ebene um den eben besprochenen Winkel φ drehen. (s. Fig. 3.)

Alsdann geht die z Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Körpers, die in der Projection auf der xy Ebene als

Mittelpunkt eines gleichseitigen Zehnecks auftreten. Die neuen Coordinaten der Punkte $P_1 P_2 P_3$ u. s. w. erhalten wir durch Substitution der alten Coordinaten in die Gleichungen

$$X' = x$$
$$Y' = y\cos\varphi + z\sin\varphi$$
$$Z' = -y\sin\varphi + z\cos\varphi$$

Dieses giebt

für P_1: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = r$

für P_2: $x_1 = 0$, $y_1 = r\sin 2\varphi$, $z_1 = r\cos 2\varphi$

„ P_3: $x_1 = r\cos\varphi$, $y_1 = r\sin\varphi^2$, $z_1 = r\frac{\sin 2\varphi}{2} = r\cos 2\varphi$

„ P_4: $x_1 = r\sin\varphi$, $y_1 = -r\cos\varphi^2$, $z_1 = r\frac{\sin 2\varphi}{2} = r\cos 2\varphi$

„ P_5: $x_1 = -r\sin\varphi$, $y_1 = -r\cos\varphi^2$, $z_1 = r\frac{\sin 2\varphi}{2} = r\cos 2\varphi$

„ P_6: $x_1 = -r\cos\varphi$, $y_1 = r\sin\varphi^2$, $z_1 = r\cos 2\varphi$

„ P_7: $x_1 = r\sin\varphi$, $y_1 = r\cos\varphi^2$, $z_1 = -r\frac{\sin 2\varphi}{2} = -r\cos 2\varphi$

„ P_8: $x_1 = r\cos\varphi$, $y_1 = -r\sin\varphi^2$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_9: $x_1 = 0$, $y_1 = -r\sin 2\varphi$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_{10}: $x_1 = -r\cos\varphi$, $y_1 = -r\sin\varphi^2$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_{11}: $x_1 = -r\sin\varphi$, $y_1 = r\cos\varphi^2$, $z_1 = -r\cos 2\varphi$

„ P_{12}: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = -r$

Hiernach ist es nun leicht, die Gleichungen der verschiedenen Ikosaederflächen aufzustellen. Ordnen wir dieselben zu 5 zusammen, so erhalten wir zuerst 5 Flächen, die sich um den Punkt P_1 lagern. Es resultirt für die Gl. der Fl. $P_1 P_2 P_3$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2y\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & \cos 2\varphi & 1\\ \cos\varphi & \cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}+r^2\sin\varphi z\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2\cos\varphi & 1\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1\end{vmatrix}$$

$$-r^3\sin\varphi\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2\cos\varphi & \cos 2\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi & \cos 2\varphi\end{vmatrix}$$

d. h. $\sin\varphi^2(2\cos\varphi-\sin\varphi)x+\frac{\sin 2\varphi}{2}y+\cos\varphi^2 z-r\cos\varphi^2=0.$

Um jedoch sofort die Abschnitte erkennen zu können, welche die bis zum Durchschnitt mit den Achsen verlängerten Flächen auf denselben hervorbringen, ist es ratsam diese Gleichungen auf die Form

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}-1=0$$

zu bringen. Wir erhalten alsdann für die Fläche $P_1P_2P_3$ die Gleichung

$$\frac{x}{\frac{r\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2(2\cos\varphi-\sin\varphi)}}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{z}{r}-1=0$$

Aus der Bedingungsgleichung

$$m^2+m-1=0,$$

sowie aus dem System überhaupt, können wir uns jedoch verschiedene Relationen herleiten, die zur Vereinfachung unserer Coefficienten bedeutend beitragen. Es ist

$$r\cos\varphi=am,\qquad r\sin\varphi=a(1-m)$$

$$\sin\varphi=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}},\qquad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{1-m}{m}=m$$

$$\sin 2\varphi=\frac{2m}{1+m^2}=\frac{2(1-m^2)}{1+m^2}$$

$$\cos 2\varphi=\frac{1-m^2}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

$$2\cos\varphi-\sin\varphi=\frac{1}{\cos\varphi},\qquad \cos\varphi-\sin\varphi=\sin\varphi\,.\operatorname{tg}\varphi$$

$$\sin\varphi^3+\cos\varphi^3=2\sin\varphi\cos\varphi^2$$

$$\cos\varphi^3-\sin\varphi^3=2\sin\varphi^2\cos\varphi$$

u. s. w.

Nach Anwendung dieser Formen finden wir endlich für die Fläche $P_1 P_2 P_3$ die Gleichung

$$\frac{x}{r\cos\varphi\,.\operatorname{cotg}\varphi^2}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{z}{r}-1=0$$

Für die Fläche $P_1 P_3 P_4$ erhalten wir

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \\ -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2 y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{\frac{r(\sin\varphi^3+\cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2}}+\frac{y}{\frac{r(\sin\varphi^3+\cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2(\sin\varphi-\cos\varphi)}}+\frac{z}{r}-1=0$$

Der Coefficient von x ist hier gleich der Halbachse $a=r\cos\varphi\,.\operatorname{cotg}\varphi$. Die Gleichung gehörig reducirt liefert

$$\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}+\frac{z}{r}-1=0$$

Für die Fläche $P_1 P_4 P_5$ ist

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & r \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi \\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi \end{vmatrix} = -r^2\sin\varphi\,.\,y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ -1 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^2\sin\varphi\cos\varphi^2 z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - r^3\sin\varphi\cos\varphi^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \cos 2\varphi \\ -1 & -1 & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi^2}+\frac{z}{r}-1=0$$

$P_1 P_5 P_6$ liefert die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2 y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ -\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi^2 & \cos 2\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{\dfrac{r(\sin\varphi^3+\cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2}}+\frac{y}{\dfrac{r(\sin\varphi^3+\cos\varphi^3)}{2\sin\varphi^2(\sin\varphi-\cos\varphi)}}+\frac{z}{r}-1$$

$$=-\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2}+\frac{z}{r}-1=0$$

$P_1 P_6 P_2$ liefert

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ 2\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \cos 2\varphi & 1 \\ 0 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2\frac{\sin 2\varphi}{2} . z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & \sin\varphi & 1 \\ 0 & 2\cos\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & \sin\varphi & \cos 2\varphi \\ 0 & 2\cos\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{\dfrac{r\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2(2\cos\varphi-\sin\varphi)}}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{z}{r}-1$$

$$=-\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi^2}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{z}{r}-1=0$$

Die nächsten Flächen, deren Gleichungen bestimmt werden müssen, sind diejenigen, welche sich mit ihren Seiten an die soeben bestimmten anlehnen. Wir erhalten für die Fläche $P_2P_3P_7$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos 2\varphi . x \begin{vmatrix} \sin 2\varphi & 1 & 1 \\ \sin\varphi^2 & 1 & 1 \\ \cos\varphi^2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos 2\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & 1 & 1 \\ \sin\varphi & -1 & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -1 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\cos\varphi\,\mathrm{cotg}\,\varphi} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r\,\mathrm{cotg}\,\varphi^3} - 1 = 0$$

$P_3P_4P_8$ giebt

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos 2\varphi . x \begin{vmatrix} \sin\varphi^2 & 1 & 1 \\ -\cos\varphi^2 & 1 & 1 \\ -\sin\varphi^2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos 2\varphi . y \begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 1 \\ \sin\varphi & 1 & 1 \\ \cos\varphi & -1 & 1 \end{vmatrix} + r^2 z \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi^2 & -1 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\cos\varphi} - \frac{y}{r\,\mathrm{cotg}\,\varphi^2} + \frac{z}{r\,\mathrm{cotg}\,\varphi^3} - 1 = 0$$

$P_4P_5P_9$ liefert

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ -r\sin\varphi^2 & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & -r\sin 2\varphi & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = -r^2\sin\varphi\cos 2\varphi . y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\begin{vmatrix}1 & \cos\varphi & 1\\ -1 & \cos\varphi & 1\\ 0 & 2\sin\varphi & 1\end{vmatrix}+r^3\frac{\sin 2\varphi}{2}\cos 2\varphi\begin{vmatrix}1 & \cos\varphi & 1\\ -1 & \cos\varphi & 1\\ 0 & 2\sin\varphi & -1\end{vmatrix}$$

also

$$-\frac{y}{\frac{r\cos\varphi}{2\sin\varphi}}+\frac{z}{\frac{r\cos 2\varphi}{(2\sin\varphi-\cos\varphi)\sin\varphi}}-1$$

$$=-\frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0\ .$$

da für unsere Bedingungen

$$2\sin\varphi+\cos\varphi=\frac{1}{\sin\varphi}\quad\text{und}\quad\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi-\cos\varphi}=\operatorname{cotg}\varphi^3\ \text{ ist.}$$

Die Fläche $P_5P_6P_{10}$ liegt in Beziehung zur yz Ebene symmetrisch zu $P_3P_4P_8$. Wir erhalten die Determinante

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1\\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1\\ -r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}=r^2\cos 2\varphi\,.\,x\begin{vmatrix}-\cos\varphi^2 & 1 & 1\\ \sin\varphi^2 & 1 & 1\\ -\sin\varphi^2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$+r^2\cos 2\varphi\,.\,y\begin{vmatrix}\sin\varphi & 1 & 1\\ \cos\varphi & 1 & 1\\ \cos\varphi & -1 & 1\end{vmatrix}-r^2z\begin{vmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1\\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1\\ \cos\varphi & -\sin\varphi^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$+r^3\cos 2\varphi\begin{vmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1\\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1\\ \cos\varphi & -\sin\varphi^2 & -1\end{vmatrix}$$

also

$$-\frac{x}{r\cos\varphi}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2}+\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$P_6P_2P_{11}$, welche in Beziehung zur yz Ebene symmetrisch zu $P_2P_3P_7$ liegt, giebt die Determinante

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1\\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}=r^2\cos 2\varphi\,.\,x\begin{vmatrix}\sin\varphi^2 & 1 & 1\\ \sin 2\varphi & 1 & 1\\ \cos\varphi^2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$+r^2\cos 2\varphi . y \begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sin\varphi & -1 & 1 \end{vmatrix} - r^2 z \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -1 \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{y}{r}+\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

Da jede der übrigen Ikosaederflächen einer der soeben Abgeleiteten parallel ist, so ist es sehr einfach, ohne weitere Rechnungen die Gleichungen dieser Flächen aufzustellen. Wir erhalten durch Umkehrung der Vorzeichen für die Glieder mit x, y, z

$$P_6\ P_{10} P_{12} = -\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_{10} P_{11} P_{12} = -\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_7\ P_{11} P_{12} = \frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_7\ P_8\ P_{12} = \frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_6\ P_8\ P_{12} = \frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$P_5\ P_9\ P_{10} = -\frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{y}{r}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_6\ P_{10} P_{11} = -\frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_2\ P_7\ P_{11} = \frac{y}{\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_3\ P_7\ P_8 = \frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi^2}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

$$P_4\ P_8\ P_9 = \frac{x}{r\cos\varphi\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{y}{r}-\frac{z}{r\operatorname{cotg}\varphi^3}-1=0$$

Aus dem regulären Ikosaeder können jedoch noch zwei neue, sternförmige Körper abgeleitet werden, die nach ihrem Entdecker Poinsot, die Poinsot'schen Körper genannt werden. Denken wir uns am Ikosaeder durch je 5 Ecken, welche einer Ecke anliegen und für sich ein reguläres Fünfeck bilden, Ebenen gelegt, so erhalten wir den ersten Poinsot'schen Körper, dessen Ecken die des Ikosaeders sind und dessen 12 Flächengleichungen leicht aus folgenden Determinanten hergeleitet werden können.

Für die Fläche $P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ erhalten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 z \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\cos 2\varphi \begin{vmatrix} 0 & \sin 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

d. h.

$$\frac{z}{r\cos 2\varphi} - 1 = 0$$

da wir nur die Coordinaten von 3 Punkten aufzustellen brauchen, um die Ebene zu bestimmen.

Für die Gleichung der Fläche $P_1 P_2 P_7 P_3 P_4$ haben wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi \,.\, x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ \cos\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\sin\varphi \,.\, y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cos 2\varphi & 1 \\ 1 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \,.\, z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & 1 \\ 1 & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & \cos 2\varphi \\ 1 & \cos\varphi & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\sin\varphi} + \frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

$P_1 P_3 P_8 P_9 P_5$ liefert

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2 \sin\varphi^2 . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ -1 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\cos\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ 1 & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2\sin\varphi^2\cos\varphi . z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\sin\varphi^2\cos\varphi \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cos 2\varphi \\ 1 & -1 & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$\frac{x}{r\cos\varphi} - \frac{y}{r\operatorname{tang}\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Die Gleichung der Fläche $P_1 P_4 P_9 P_{10} P_6$ erhalten wir

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & -r\sin 2\varphi & -r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = -r^2\cos\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ 2\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\sin\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cos 2\varphi & 1 \\ 0 & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} - r^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} . z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & 1 \\ 0 & 2\sin\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & \cos 2\varphi \\ 0 & 2\sin\varphi & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{r\cos\varphi} - \frac{y}{r\operatorname{tang}\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

da sie zur vorhergehenden Fläche symmetrisch liegt.

Die Fläche $P_1 P_5 P_{10} P_{11} P_2$ liegt symmetrisch zu $P_1 P_2 P_7 P_8 P_4$. Ihre Determinante ist

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ -r\sin\varphi & -r\cos\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1 \\ 0 & r\sin 2\varphi & r\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\cos\varphi & \cos 2\varphi & 1 \\ 2\sin\varphi & \cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$+r^2\sin\varphi . y\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \cos 2\varphi & 1\\ 0 & \cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}+r^2\frac{\sin 2\varphi}{2}.z\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -\cos\varphi & 1\\ 0 & 2\sin\varphi & 1\end{vmatrix}$$

$$-r^3\frac{\sin 2\varphi}{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -\cos\varphi & \cos 2\varphi\\ 0 & 2\sin\varphi & \cos 2\varphi\end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{x}{r\sin\varphi}+\frac{y}{r\cotg\varphi}+\frac{z}{r}-1=0$$

$P_1P_6P_{11}P_7P_8$ liefert die Determinante

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ 0 & 0 & r & 1\\ -r\cos\varphi & r\sin\varphi^2 & r\cos 2\varphi & 1\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}=r^2x\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi & 1\\ \cos\varphi^2 & -\cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}$$

$$+r^2y\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ \cos\varphi & \cos 2\varphi & 1\\ \sin\varphi & -\cos 2\varphi & 1\end{vmatrix}-r^2z\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & 1\\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$+r^3\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -\cos 2\varphi\end{vmatrix}$$

d. h.

$$-\frac{y}{\frac{r}{2}}+\frac{z}{r}-1=0$$

Die Gleichungen der 6 anderen Ebenen ergeben sich gleichfalls aus diesen, durch Multiplication der x, y und z mit -1, da diese wieder einzeln denselben parallel laufen.

Wir erhalten alsdann als Gleichungen

$$\frac{z}{r\cos 2\varphi}+1=0$$

$$-\frac{x}{r\sin\varphi}-\frac{y}{r\cotg\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$-\frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\tang\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$+\frac{x}{r\cos\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{tang}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$+\frac{x}{r\sin\varphi}-\frac{y}{r\operatorname{cotg}\varphi}-\frac{z}{r}-1=0$$

$$-\frac{y}{\frac{r}{2}}-\frac{z}{r}-1=0$$

Der Inhalt eines solchen Körpers besteht aus 12 congruenten Pyramiden und kann derselbe ebenfalls durch Determinanten bestimmt werden, wenn man dieselben durch 2 Ebenen jedesmal in 3 Tetraeder zerlegt, wovon immer 2 ebenfalls congruent sind. Einfacher resultirt jedoch noch der Inhalt aus den Coordinaten des Mittelpunkts vom Körper, des Mittelpunkts der 5seitigen Grundfläche und zweier aneinander liegenden Eckpunkte. Die Pyramide wird dadurch in 5 gleiche Tetraeder zerlegt und das mit 12 multiplicirte Resultat liefert den Inhalt dieses Körpers. Bezeichnen wir denselben im Folgenden kurz mit „Poinsot I." und stellen für seinen Inhalt die Determinante aus den eben erwähnten Coordinaten auf, so erhalten wir

$$6\varDelta = r^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos 2\varphi \\ 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi^2 & \cos 2\varphi \end{vmatrix} = r^3 \cos 2\varphi \sin 2\varphi \cos\varphi$$

d. i. Poinsot I. $= 10 r^3 \cos 2\varphi \sin 2\varphi \cos\varphi$.

Vergleichen wir hiermit den Inhalt des Ikosaeders, für welchen wir früher

$$\text{Ikos.} = \frac{10}{r} r^3 \sin 2\varphi \cos\varphi$$

fanden, so erhalten wir die Proportion

$$\text{Ikos.} : \text{Poinsot I.} = 1 : 3\cos 2\varphi.$$

Den zweiten Poinsot'schen Körper (Poinsot II.) erhalten wir, wenn wir jedesmal durch 3 Eckpunkte eine Ebene so legen, dass sie einer Ikosaederfläche parallel läuft. Der neu entstandene Körper besitzt alsdann 20 Flächen, während die Anzahl der Ecken dieselbe geblieben ist.

Betrachten wir hier die Fläche $P_1 P_7 P_9$, so gehört diese dem Poinsot II. an, und kann die Richtigkeit ihrer Gleichung leicht aus der Bedingungsgleichung für zwei parallele Ebenen nachgewiesen werden.

(Sollen z. B. zwei Ebenen, deren Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

sind, parallel sein, so sind

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{A_2}{C_2}, \quad \frac{B_1}{C_1} = \frac{B_2}{C_2}$$

Bedingungen ihrer Parallelität.)

Bilden wir hier diese Gleichungen durch Determinanten, so ergiebt sich für die Fläche $P_1 P_7 P_9$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos2\varphi & 1 \\ 0 & -r\sin2\varphi & -r\cos2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi . x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & -\cos2\varphi & 1 \\ -2\sin\varphi & -\cos2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2\sin\varphi . y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\cos2\varphi & 1 \\ 0 & -\cos2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2\frac{\sin2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & 1 \\ 0 & -2\sin\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\frac{\sin2\varphi}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cos\varphi & -\cos2\varphi \\ 0 & -2\sin\varphi & -\cos2\varphi \end{vmatrix}$$

also

$$\frac{x}{r\sin\varphi\,\text{tang}\,\varphi^2} - \frac{y}{r\,\text{tang}\,\varphi} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann dadurch leicht erwiesen werden, dass, da sie mit der Fläche $P_3 P_4 P_8$ parallel läuft, nach obigen Bedingungsgleichungen

$$\frac{\text{cotg}\,\varphi^3}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi\,\text{tang}\,\varphi^2} \quad \text{und} \quad \text{cotg}\,\varphi = \frac{1}{\text{tang}\,\varphi}$$

sein muss, was auch der Fall ist.

Die Gleichung der Ebene $P_1 P_7 P_{10}$ giebt die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi^2 & -r\cos2\varphi & 1 \\ -r\cos\varphi & -r\sin\varphi^2 & -r\cos2\varphi & 1 \end{vmatrix} = r^2x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi^2 & -\cos2\varphi & 1 \\ -\sin\varphi^2 & -\cos2\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^2y\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \\ -\cos\varphi & -\cos 2\varphi & 1 \end{vmatrix} + r^2z\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & 1 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-r^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -\cos 2\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi^2 & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

folglich

$$\frac{x}{r\sin\varphi\operatorname{tang}\varphi}+\frac{y}{r\operatorname{tang}\varphi^3}+\frac{z}{r}-1=0$$

deren Richtigkeit gleichfalls sofort nachzuweisen ist, da diese Fläche der Fläche $P_2P_6P_{11}$ parallel ist.

Den Inhalt dieses Körpers finden wir durch Addition der 20 Tetraeder, welche, wie schon erwähnt, von dem Mittelpunkt des Körpers und diesen mit den Seitenflächen des Ikosaeders parallelen Flächen gebildet werden. Es ergiebt sich für diese die Determinante

$$6\varDelta=-r^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi^2 & -\cos 2\varphi \\ 0 & -\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

$$=r^3\sin\varphi\sin 2\varphi$$

Folglich: Poinsot II. $=\frac{10}{r}r^3\sin\varphi\sin 2\varphi$.

Stellen wir nun den Inhalt des Ikosaeders mit demjenigen des Poinsot I. und Poinsot II. zusammen, so erhalten wir folgende Proportionen:

Ikosaed.: Poinsot II. $=1:\operatorname{tang}\varphi=1:m$
Poinsot I.: Poinsot II. $=3\cos\varphi^2:1$
Ikosaed.: Poinsot I.: Poinsot II. $=1:3\cos 2\varphi:\operatorname{tg}\varphi$.

Gehen wir jetzt zum Pentagonal-Dodekaeder (Fig. 4.) über, so ist klar, dass dasselbe durch 12 Ebenen gebildet wird, welche durch die Ecken des Ikosaeders senkrecht zum Radius der umschriebenen Kugel gelegt werden. Die allgemeine Form der Gleichung einer Berührungsebene, welche in einem Punkte $x_1y_1z_1$ an die Kugel gelegt wird, ist

$$xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0$$

Hiernach ist es sehr einfach mit Hülfe unserer früheren Coordinaten die Gleichungen der 12 Ebenen des Dodekaeders aufzustellen. Bezeichnen wir die den Ecken P_1, P_2 etc. des Ikosaeders entsprechenden Ebenen mit den römischen Ziffern I., II.,..., so erhalten wir als Gleichung der Ebene

I. $z-r=0$

II. $y\sin 2\varphi+z\cos 2\varphi-r=0$

III. $x\cos\varphi+y\sin\varphi^2+z\cos 2\varphi-r=0$

IV. $x\sin\varphi-y\cos\varphi^2+z\cos 2\varphi-r=0$

V. $-x\sin\varphi-y\cos\varphi^2+z\cos 2\varphi-r=0$

VI. $-x\cos\varphi+y\sin\varphi^2+z\cos 2\varphi-r=0$

VII. $x\sin\varphi+y\cos\varphi^2-z\cos 2\varphi-r=0$

VIII. $x\cos\varphi-y\sin\varphi^2-z\cos 2\varphi-r=0$

IX. $-y\sin 2\varphi-z\cos 2\varphi-r=0$

X. $-x\cos\varphi-y\sin\varphi^2-z\cos 2\varphi-r=0$

XI. $-x\sin\varphi+y\cos\varphi^2-z\cos 2\varphi-r=0$

XII. $z+r=0$

Wir sehen aus diesen Gleichungen, dass die Ebenen II.—VI. ein Stück $\frac{r}{\cos 2\varphi}$ in der positiven Richtung auf der z Achse abschneiden, während von den Ebenen VII.—XI. ein gleiches Stück in negativer Richtung abgeschnitten wird. Dieser Punkt mit den Coordinaten $x=0$, $y=0$, $z=\frac{r}{\cos 2\varphi}$ ist der Pol zur Ebene $P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$. Ebenso ist jede Ecke des Dodekaeders Pol zu einer Ikosaederebene, was uns ein Mittel an die Hand giebt, die Coordinaten der Dodekaederecken aufzustellen.

Es ist also beim Dodekaeder das Verhältniss der Flächen und Ecken ein umgekehrtes, wie beim Ikosaeder, indem hier 20 Ecken in derselben Gruppirung auftreten, wie beim Ikosaeder die Flächen und gleichfalls die 12 Ecken desselben hier 12 Flächen entsprechen. Wollen wir demnach die Coordinaten der Eckpunkte auf gewöhnliche Weise ableiten, so finden wir diese stets durch den Durchschnitt dreier Ebenen bestimmt, welche nach den Unbekannten aufgelöst, die verlangten Coordinaten geben. Die Coordinaten von E_1 entstehen beispielsweise aus dem Durchschnitt der Ebenen I., II. und III. Wir erhalten sie durch Auflösung der Gleichungen

$$z-r=0$$
$$y\sin 2\varphi+z\cos 2\varphi-r=0$$
$$x\cos\varphi+y\sin\varphi^2+z\cos 2\varphi-r=0$$

nämlich

$$x = \frac{r \tan\varphi^2}{\cos\varphi}, \qquad y = r \tan\varphi$$

$$z = r$$

u. s. w.

Anstatt also durch Auflösung je dreier Gleichungen die Coordinaten zu berechnen, können wir dieselben aus den Gleichungen der Polarebenen finden.

Beobachten wir hier dieselbe Gruppirung wie beim Ikosaeder und bringen wir alle Gleichungen der Ikosaederflächen $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, ... auf die Form

$$ax + by + cz - r^2 = 0$$

so sind hier die Coefficienten der Variablen die Coordinaten des betreffenden Eckpunktes. Stellen wir daraus diese Coordinaten zusammen, so erhalten wir, wie eben, für

$E_1(P_1P_2P_3)$: dann $E_2(P_1P_3P_4)$:

$$x = \frac{r \tan\varphi^2}{\cos\varphi} \qquad x = \frac{r \tan\varphi}{\cos\varphi}$$

$$y = r \tan\varphi \qquad y = -r \tan\varphi^3$$

$$z = r \qquad z = r$$

$E_3(P_1P_4P_5)$: $E_4(P_1P_5P_6)$:

$$x = 0 \qquad x = -\frac{r \tan\varphi}{\cos\varphi}$$

$$y = -\frac{r}{2}\tan\varphi^2 \qquad y = -r \tan\varphi^3$$

$$z = r \qquad z = r$$

$E_5(P_1P_6P_2)$:

$$x = -\frac{r \tan\varphi^2}{\cos\varphi}$$

$$y = r \tan\varphi$$

$$z = r$$

Die zweite Gruppe hat von der XY Ebene den Abstand

$$z = r \tan\varphi^3$$

Es resultirt für

$E_6(P_2 P_3 P_7)$:

$$x = \frac{r \operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi}$$
$$y = r$$
$$z = r \operatorname{tang} \varphi^3$$

$E_7(P_3 P_4 P_8)$:

$$x = \frac{r}{\cos \varphi}$$
$$y = -r \operatorname{tang} \varphi^2$$
$$z = r \operatorname{tang} \varphi^3$$

$E_8(P_4 P_5 P_9)$:

$$x = 0$$
$$y = -\frac{r}{2} \operatorname{tang} \varphi$$
$$z = r \operatorname{tang} \varphi^3$$

$E_9(P_5 P_6 P_{10})$:

$$x = -\frac{x}{\cos \varphi}$$
$$y = -r \operatorname{tang} \varphi^2$$
$$z = r \operatorname{tang} \varphi^3$$

$E_{10}(P_6 P_2 P_{11})$:

$$x = -\frac{r \operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi}$$
$$y = r$$
$$z = r \operatorname{tang} \varphi^3$$

Die übrigen 10 Coordinaten ergeben sich, wie die Gleichungen, ebenfalls durch Umkehrung der Vorzeichen von x, y und z.

Für den Inhalt des Dodekaeders berechnen wir uns zuerst den Inhalt eines Tetraeders, dessen Ecken der Mittelpunkt des Körpers, 2 benachbarte Ecken und der Mittelpunkt der Seitenfläche sind. Die Coordinaten dieser Punkte seien

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{r \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi} \qquad x_3 = \frac{r \operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi}$$
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = r \operatorname{tang} \varphi \qquad y_3 = -r \operatorname{tang} \varphi^3$$
$$z_1 = r \qquad z_2 = r \qquad z_3 = r$$

so dass für den Inhalt desselben die Determinante

$$6\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & r \\ \frac{r \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi} & r \operatorname{tang} \varphi & r \\ \frac{r \operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi} & -r \operatorname{tang} \varphi^3 & r \end{vmatrix} = \frac{r^3 \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \operatorname{tg} \varphi & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{tg} \varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r^3 \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi} \{\operatorname{tang} \varphi^3 + 1\} = \frac{2 r^3 \operatorname{tang} \varphi^3}{\cos \varphi}$$

entsteht. Multipliciren wir das Resultat mit $\frac{5}{6} \cdot 12 = 10$, so erhalten wir den Inhalt des Dodekaeders

$$= \frac{20 r^3 \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi}.$$

Wie schon erwähnt, bedeutet r der Radius der dem Dodekaeder eingeschriebenen, resp. der dem Ikosaeder umschriebenen Kugel. Offenbar erhalten wir jedoch den Radius der dem Dodekaeder umschriebenen Kugel aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

wo x, y, z die Coordinaten irgend eines Eckpunktes des Dodekaeders bezeichnen, eine Gleichung, die zu gleicher Zeit zur Prüfung unserer Rechnung dienen kann, da für alle Coordinaten R denselben Wert haben muss. Wir erhalten die Gleichung

$$R^2 = r^2 \left\{ 1 + \operatorname{tang} \varphi^2 + \frac{\operatorname{tang} \varphi^4}{\cos \varphi^2} \right\}$$

hieraus

$$R = \frac{r}{\cos \varphi} \sqrt{1 + \operatorname{tang} \varphi^4}.$$

Wir erhalten den dritten Poinsot'schen Körper (Poinsot III.), wenn wir jedesmal die 5 Ebenen erweitert denken, welche um eine Dodekaederfläche liegen. Er hat 12 Ecken und 12 Flächen. Die 12 Ecken desselben sind die Pole zu den Ebenen des ersten Poinsot-schen Körpers als Polarebene, während hier die Flächen dieselben sind, wie bei dem Dodekaeder. Die Coordinaten dieser Ecken ergeben sich sofort aus den Gleichungen der 12 Ebenen des ersten Poinsot'schen Körpers.

Die Gleichung der Fläche $P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ war

$$\frac{z}{r \cos 2\varphi} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{rz}{\cos 2\varphi} - r^2 = 0$$

Hieraus die Coordinaten

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{r}{\cos 2\varphi}$$

Aus der Gleichung der Fläche $P_1 P_2 P_7 P_8 P_4$

$$\frac{rx}{\sin \varphi} + \frac{ry}{\operatorname{cotg} \varphi} + rz - r^2 = 0$$

resultirt

$$x = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{r}{\operatorname{cotg} \varphi}, \quad z = r$$

$P_1 P_3 P_8 P_9 P_5$ liefert die Coordinaten

$$x = \frac{r}{\cos\varphi}, \quad y = -\frac{r}{\mathrm{tg}\,\varphi}, \quad z = r$$

$P_1 P_4 P_9 P_{10} P_6$ die Coordinaten

$$x = -\frac{r}{\cos\varphi}, \quad y = -\frac{r}{\mathrm{tang}\,\varphi}, \quad z = r$$

u. s. w.

Für die Inhaltsentwickelung ist es am zweckmässigsten, von den 5 Punkten eines sternförmigen Fünfecks zwei zu wählen, welche eine Kante desselben begrenzen und diese mit dem Mittelpunkt dieses Fünfecks und dem Mittelpunkt des Körpers zu einem Tetraeder zu vereinigen. Es entsteht alsdann ein Tetraeder, dessen Inhalt mit 5 multiplicirt den Inhalt der Sternpyramide, als den 12ten Teil des Körpers, giebt.

Nehmen wir hier das Fünfeck, dessen Ebene

$$z = r$$

ist, so sind die Coordinaten aus den Ebenen $P_1 P_2 P_7 P_8 P_4$ und $P_1 P_4 P_9 P_{10} P_6$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = \dfrac{r}{\sin\varphi} & x_3 = -\dfrac{r}{\cos\varphi} \\ y_1 = 0 & y_2 = \dfrac{r}{\mathrm{cotg}\,\varphi} & y_3 = -\dfrac{r}{\mathrm{tang}\,\varphi} \\ z_1 = r & z_2 = r & z_3 = r \end{array}$$

wovon $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Mittelpunktes des sternförmigen Fünfecks bezeichnen. Den Inhalt liefert die Determinante

$$6\varDelta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & r \\ \dfrac{r}{\sin\varphi} & \dfrac{r}{\mathrm{cotg}\,\varphi} & r \\ -\dfrac{r}{\cos\varphi} & -r\,\mathrm{cotg}\,\varphi & r \end{vmatrix} = r^3\left(\frac{\cos\varphi^3 - \sin\varphi^3}{\sin\varphi^2\cos\varphi^2}\right)$$

d. i. $\varDelta = \dfrac{r^3}{3\cos\varphi}$

Der Inhalt des Poinsot III. also $= \dfrac{20r^3}{\cos\varphi}$

Wie wir schon bei einem ebenen sternförmigen Fünfeck einen falschen Inhalt finden, wenn die um das Fünfeck herumliegenden

Dreiecke zu demselben addirt werden, so ist auch hier Aehnliches der Fall. Indem wir dort die Dreiecke zum doppelten Fünfeck zu addiren haben, so muss hier der Inhalt sämmtlicher Pyramiden zum 3fachen Dodekaederinhalt addirt werden, wenn der Inhalt des Poinsot III. resultiren soll. Entwickeln wir hier z. B. den Inhalt einer auf den Seitenflächen aufsitzenden fünfseitigen Pyramide, so erhalten wir dafür die Determinante

$$\tfrac{3}{5}\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & \frac{r}{\cos 2\varphi} & 1 \\ \frac{r\operatorname{tang}\varphi^2}{\cos\varphi} & r\operatorname{tang}\varphi & r & 1 \\ \frac{r\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi} & -r\operatorname{tang}\varphi^3 & r & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -r\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{r\operatorname{tang}\varphi^2}{\cos\varphi} & r\operatorname{tang}\varphi & 1 \\ \frac{r\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi} & -r\operatorname{tang}\varphi^3 & 1 \end{vmatrix} + \frac{r}{\cos 2\varphi}\begin{vmatrix} \frac{r\operatorname{tang}\varphi^2}{\cos\varphi} & r\operatorname{tg}\varphi \\ \frac{r\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi} & -r\operatorname{tg}\varphi^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2r^3\operatorname{tang}\varphi^3}{\sin\varphi\cos\varphi^2} - \frac{2r^3\operatorname{tang}\varphi^3}{\cos\varphi}$$

und somit für den Inhalt sämmtlicher Pyramiden

$$= \frac{20r^3\operatorname{tang}\varphi^3}{\sin\varphi\cos\varphi^2} - \frac{20r^3\operatorname{tang}\varphi^3}{\cos\varphi}$$

Für den Inhalt des Dodekaeders hatten wir

$$= \frac{20r^3\operatorname{tang}\varphi^3}{\cos\varphi}$$

Bilden wir aus dem dreifachen Inhalt des Dodekaeders und diesen Pyramiden eine Gleichung mit Poinsot III., so folgt

$$\cos 2\varphi = \operatorname{tang}\varphi^3(1 + 2\cos 2\varphi)$$

welcher Ausdruck sich nach Einsetzung der Zahlenwerte auch als gleich erweist.

Den letzten und vierten Poinsot'schen Körper, Poinsot IV., erhalten wir endlich dadurch, dass 3 Ebenen zum Durchschnitt gebracht

werden, welche den 3 von einer Ecke des Pentagonal-Dodekaeders ausgehenden Kanten anliegen.

Die Coordinaten erhalten wir wieder aus den Gleichungen der Polarebenen und zwar aus der Gleichung der Ebene $P_1 P_7 P_9$

$$x = \frac{r \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi}, \quad y = -r \operatorname{cotg} \varphi, \quad z = r$$

und aus $P_1 P_7 P_{10}$ die Coordinaten

$$x = \frac{r \operatorname{cotg} \varphi}{\sin \varphi}, \quad y = r \operatorname{cotg} \varphi^3, \quad z = r$$

u. s. w.

Den Inhalt finden wir aus einem Tetraeder, dessen Eckpunkte der Mittelpunkt des Körpers, der Mittelpunkt der Seitenfläche und zwei an einer Kante liegende Ecken sind. Seinen Inhalt erhalten wir aus der Determinante

$$6\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & r \\ \frac{r \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi} & -r \operatorname{cotg} \varphi & r \\ \frac{r \operatorname{cotg} \varphi}{\sin \varphi} & r \operatorname{cotg} \varphi^3 & r \end{vmatrix} = \frac{r^3 \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \operatorname{cotg} \varphi & -1 & 1 \\ 1 & \operatorname{cotg} \varphi^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r^3 \operatorname{cotg} \varphi^2}{\sin \varphi} \{\operatorname{cotg} \varphi^3 + 1\} = \frac{2 r^3 \operatorname{cotg} \varphi^4}{\sin \varphi}$$

Der Inhalt des Poinsot IV. ist demnach

$$= \frac{20 r^3 \operatorname{cotg} \varphi^4}{\sin \varphi}$$

Vergleichen wir zum Schluss wieder die Inhalte der zuletzt behandelten drei Körper, so ergiebt sich

$$\text{Dodek.: Poinsot III.} = \operatorname{tang} \varphi^3 : 1$$
$$\text{Dodek.: Poinsot IV.} = \operatorname{tang} \varphi^8 : 1$$
$$\text{Poinsot III.: Poinsot IV.} = \operatorname{tang} \varphi^5 : 1$$

XXVIII.

Miscellen.

1.

Beweis eines Satzes aus der Theorie der formalen Operationen.

In Hankel's „Theorie der complexen Zahlensysteme" S. 32. ist ein wichtiger Satz bewiesen, dass wenn zwei eindeutige und associative Operationen durch das volle distributive Princip mit einander verbunden sind, dann die eine notwendig die commutative Eigenschaft besitzt. Ich will hier einen Beweis dieses Satzes mitteilen, der im Grunde mit dem Hankel'schen übereinstimmt, aber in allgemeinen Operationszeichen geführt wird.

Bedeuten $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ zwei directe (thetische) eindeutige und associative Verknüpfungen, die durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$\varDelta_2[\varDelta_1(a, b), c] = \varDelta_1[\varDelta_2(a, c), \varDelta_2(b, c)] \qquad (1)$$

$$\varDelta_2[a, \varDelta_1(c, d)] = \varDelta_1[\varDelta_2(a, c), \varDelta_2(a, d)] \qquad (2)$$

(a, b, c, d bedeuten hier irgend welche Objecte), die das Distributivgesetz ausdrücken, — so ist die Operation $\varDelta_1$ commutativ.

Um dies zu beweisen, ersetzen wir in der Gleichung (1) c durch $\varDelta(c, d)$ und in der Gleichung (6) a durch $\varDelta(a, b)$, — es wird dann:

$$\varDelta_2[\varDelta_1(a, b), \varDelta_1(c, d)] = \varDelta_1[\varDelta_2\{a, \varDelta_1(c, d)\}, \varDelta_2\{b, \varDelta_1(c, d)\}]$$

$$\varDelta_2[\varDelta_1(a, b), \varDelta_1(c, d)] = \varDelta_1[\varDelta_2\{\varDelta_1(a, b), c\}, \varDelta_2\{\varDelta_1(a, b), d\}]$$

Aus der Gleichheit der ersten Seiten dieser Gleichungen folgt nun:

$$\varDelta_1[\varDelta_2\{a, \varDelta_1(c, d)\}, \varDelta_2\{b, \varDelta_1(c, d)\}]$$
$$= \varDelta_1[\varDelta_2\{\varDelta_1(a, b), c\}, \varDelta_2\{\varDelta_1(a, b), d\}]$$

Wir transformiren die erste Seite der letzten Gleichung mittelst der Gleichung (1) und die zweite mittelst der Gleichung (2); man erhält dann:

$$\Delta_1[\Delta_1\{\Delta_2(a, c), \Delta_2(a, d)\}, \Delta_1\{\Delta_2(b, c), \Delta_2(b, d)\}]$$
$$= \Delta_1[\Delta_1\{\Delta_2(a, c), \Delta_2(b, c)\}, \Delta_1\{\Delta_2(a, d), \Delta_2(b, d)\}]$$

Da der Voraussetzung zufolge die Operation Δ_1 associativ ist, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$\Delta_1\{\Delta_2(a, c), \Delta_2(a, d), \Delta_2(b, c), \Delta_2(b, d)\}$$
$$= \Delta_1\{\Delta_2(a, c), \Delta_2(b, c), \Delta_2(a, d), \Delta_2(b, d)\}$$

Vergleicht man hier die beiden Seiten, so sieht man schon, dass sie sich nur durch die Ordnung ihrer Glieder unterscheiden. Bezeichnet man noch der Kürze wegen:

$$\Delta_2(a, c) = p, \quad \Delta_2(a, d) = q, \quad \Delta_2(b, c) = r, \quad \Delta_2(b, d) = s$$

so hat man:

$$\Delta_1(p, q, r, s) = \Delta_1(p, r, q, s)$$

Nach dem Associativgesetze lässt sich diese Gleichung so darstellen:

$$\Delta_1\{\Delta_1(p, q, r), s\} = \Delta_1\{\Delta_1(p, r, q), s\}$$

woraus vermöge der Eindeutigkeit

$$\Delta_1(p, q, r) = \Delta_1(p, r, q)$$

folgt. Schreibt man noch diese Gleichung so:

$$\Delta_1\{p, \Delta_1(q, r)\} = \Delta_1\{p, \Delta_1(r, q)\}$$

und berücksichtigt man wieder die Eindeutigkeit, so hat man endlich

$$\Delta_1(q, r) = \Delta_1(r, q)$$

welche Gleichung die Commutativität der Operation Δ_1 beweist.

Auf ähnliche Weise könnte man beweisen, dass im Falle, wenn die Gleichungen:

$$\Delta_1[\Delta_2(a, b), c] = \Delta_2[\Delta_1(a, c), \Delta_1(b, c)]$$
$$\Delta_1[a, \Delta_2(c, d)] = \Delta_2[\Delta_1(a, c), \Delta_1(a, d)]$$

bestehen, die Operation Δ_2 commutativ sein muss.

Warschau, den 31. December 1874.

S. Dickstein.

2.

Ueber die Symmetriepunkte des Dreiecks.

Vier Punkte im Dreieck, nämlich der In- und Umkreismittelpunkt, der Schwerpunkt und der Höhenschnitt, finden bekanntermassen besondere Beachtung wegen ihrer symmetrischen Bestimmung. Man kann sie demgemäss Symmetriepunkte des Dreiecks nennen, und es liegt die Frage nahe, wie diese ihre Eigenschaft zu definiren sei, um überhaupt alle Symmetriepunkte von den Nichtsymmetriepunkten unterscheiden zu können. Hierbei ist zunächst auf einen Umstand aufmerksam zu machen, ohne dessen Beachtung die ganze Frage illusorisch sein würde: nicht für ein einzelnes Dreieck, sondern nur für das allgemeine oder variabele Dreieck existirt eine bestimmte Classe von Punkten, welche die in Rede stehende Eigenschaft hat; jeder bestimmte Punkt aus dieser Classe ist dann auch im einzelnen Dreieck zu finden. Solange man daher bei den 4 genannten Symmetriepunkten stehen blieb, und auch wenn man deren Zahl noch vermehrte, trat dieser Umstand nicht ein; denn, war einmal die Bestimmung eines jeden festgesetzt, so passte sie natürlich auch für ein einzelnes Dreieck. Ist hingegen ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck und ein beliebiger Punkt gegeben, und man fragt, ob dieser Symmetriepunkt sei, so zeigt sich, dass jederzeit in ihm unendlich viele Symmetriepunkte und Nichtsymmetriepunkte zusammenfallen, die aber nicht identisch sind, sondern bei jeder Veränderung des Dreiecks auseinander gehen, dass also keine Entscheidung existirt.

Um die Symmetriepunkte so einfach als möglich darzustellen, wird man offenbar eine trimetrische, auf das Dreieck selbst bezügliche Bestimmungsweise wählen; jede andere Methode würde viele willkürliche Elemente in die Rechnung einführen. Doch auch dann bleibt noch eine grosse Auswahl übrig. Die Plücker'schen trimetrischen Coordinaten sind hier wegen Ueberbestimmung nicht gut zu gebrauchen. Dagegen eignet sich die Möbius'sche barycentrische Bestimmung vortrefflich, weil sie nur von den 2 Verhältnissen der 3 analogen Grössen abhängt. Hier können wir den Symmetriepunkt folgendermassen definiren.

Seien die den Seiten a_1, a_2, a_3 gegenüberliegenden Ecken eines Dreiecks mit Gewichten p_1, p_2, p_3 belastet; dann ist durch letzteres System als dessen Schwerpunkt ein Punkt bestimmt. Wir nennen der Kürze wegen p_1, p_2, p_3 die Gewichte dieses Punktes. Ist nun $f(x, y, z)$ eine homogene, für y, z symmetrische Function, d. h. hat man

$$f(x, y, z) = f(x, z, y)$$

so sind die Gewichte eines Symmetriepunktes von der Form

$$f(a_1, a_2, a_3), \quad f(a_2, a_3, a_1), \quad f(a_3, a_1, a_2)$$

und jeder solche Punkt ist ein Symmetriepunkt.

Da die beiden letzten Gewichte aus dem ersten durch Vertauschung der a hervorgehen, so genügt zur Bestimmung eines Symmetriepunkts immer der Ausdruck des ersten Gewichts in a_1, a_2, a_3.

Ehe wir hiervon Anwendung machen, mögen einige Sätze über die barycentrische Rechnung vorausgehen. Ein Punkt, dessen Gewichte p_1, p_2, p_3 sind, sei stets mit demselben Buchstaben p bezeichnet.

Sind $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ die rechtwinkligen Coordinaten der 3 Ecken, xy die des Punkts p, so ist bekanntlich

$$x\Sigma p = \Sigma\alpha p; \quad y\Sigma p = \Sigma\beta p$$

Bestimmt man den willkürlichen gemeinsamen Factor der p so, dass $\Sigma p = 1$ wird, so hat man kürzer:

$$x = \Sigma\alpha p; \quad y = \Sigma\beta p \tag{1}$$

Hat man 2 Punkte p, q mit den Coordinaten $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$, und ist u eine unabhängige Variabele, so ist $p(1-u)+qu$ ein variabeler Punkt, der eine Linie erzeugt, und für $u=0$ durch p, für $u=1$ durch q geht. Seine Coordinaten sind

$$x = \frac{x_0(1-u)\Sigma p + x_1 u\Sigma q}{(1-u)\Sigma p + u\Sigma q}, \quad y = \frac{y_0(1-u)\Sigma p + y_1 u\Sigma q}{(1-u)\Sigma p + u\Sigma q}$$

Eliminirt man u, so erhält man eine lineare Gleichung zwischen x, y; die Linie ist daher stets gerade. Macht man $\Sigma p = \Sigma q = 1$, so wird

$$x = x_0(1-u)+x_1 u; \quad y = y_0(1-u)+y_1 u \tag{2}$$

Hier verhalten sich die Strecken auf der Geraden wie die Differenzen der u, was ohne die specielle Bedingung nicht der Fall ist. Wir stellen daher die 2 Sätze auf, im erstern von beiden $p+q$ für q substituirend:

I. Der Punkt $p+qu$ erzeugt bei variirendem u die gerade Verbindung der Punkte p und q.

II. Ist $\Sigma p = \Sigma q = 1$, so sind die Strecken auf der Geraden $p(1-u)+qu$ proportional den Differenzen der Parameterwerte u, also von p aus gerechnet proportional u selbst.

III. Addirt man zu jedem der 3 Gewichte $p+qu$ eine beliebige Constante, so bekommen x und y zwei constante Incremente, folglich

erleiden alle Punkte der Geraden eine gleiche Verschiebung in gleicher Richtung, d. i. die Gerade verschiebt sich parallel. Soll nun die Parallele durch einen gegebenen Punkt m gehen, so braucht man nur die 3 Gewichte m an die Stelle der 3 constanten Terme der Gewichte der Geraden zu setzen, und erhält

$$m+qu$$

als Ausdruck der Parallelen mit $p+qu$, welche für $u=0$ durch m geht.

Sind p, q, r drei Punkte mit den Coordinaten $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, und man sucht den Ort des variabeln Punkts $p+qu+ru^2$, dessen Coordinaten xy seien, so hat man:

$$x\Sigma(p+qu+ru^2) = \Sigma x(p+qu+ru^2) = x_0\Sigma p + x_1 u\Sigma q + x_2 u^2 \Sigma r$$

oder

$$(x-x_0)\Sigma p+(x-x_1)u\Sigma q+(x-x_2)u^2\Sigma r = 0$$
$$(y-y_0)\Sigma p+(y-y_1)u\Sigma q+(y-y_2)u^2\Sigma r = 0$$

also nach Elimination von u:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x-x_2 \\ y-y_0 & y-y_2 \end{vmatrix}^2 \frac{\Sigma p}{\Sigma q} = \begin{vmatrix} x-x_0 & x-x_1 \\ y-y_0 & y-y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-x_1 & x_1-x_2 \\ y-y_1 & y_1-y_2 \end{vmatrix} \frac{\Sigma q}{\Sigma r}$$

Jede der 3 Determinanten ist linear in x, y, also die Gleichung vom 2ten Grade. Ausserdem sieht man, dass sie durch die 3 festen Punkte erfüllt wird, und man hat den Satz:

IV. Der Ort des Punktes $p+qu+ru^2$ ist im allgemeinen ein Kegelschnitt, der durch die 3 Punkte p, q, r geht. In besondern Fällen kann er in 1 oder 2 Gerade degeneriren.

V. Zieht man durch den Punkt p die 3 Transversalen des Dreiecks, vertauscht die je 2 Stücke, in welche durch sie die Seiten geteilt werden, wobei die Strecke von einer Ecke nach dem jenseit derselben auf der verlängerten Seite liegenden Punkte als negativ zu rechnen ist, und zieht 3 neue Transversalen nach den neuen Teilpunkten, so sind letztere die Gleichgewichtslinien für die Gewichte

$$\frac{1}{p_1},\ \frac{1}{p_2},\ \frac{1}{p_3}$$

und schneiden sich in einem Punkte, dem Schwerpunkt der 3 reciproken Gewichte. Wir nennen den so zu construirenden Punkt $\frac{1}{p}$ den reciproken Punkt des Punktes p. Variirt p, so können ebenso die Bahnen beider Punkte reciproke Linien heissen.

Wenden wir dies auf die gerade Verbindung der Punkte p, q an, wo $\Sigma p = \Sigma q = 1$ sei, und suchen demgemäss die reciproke Linie zu der Geraden

$$p(1-u)+qu \tag{3}$$

Da sich offenbar ein Punkt nicht ändert, wenn man seine 3 Gewichte mit einem gemeinsamen Factor multiplicirt, so ist, das Product der 3 Gewichte (3) zum Multiplicator genommen, das erste Gewicht der reciproken Linie,

$$\{p_2(1-u)+q_2u\}\{p_3(1-u)+q_3u\} = P_1(u)$$

vom 2. Grade in Bezug auf u, folglich nach Satz IV. die reciproke Linie jeder Geraden ein Kegelschnitt.

Eine Gerade schneidet im allgemeinen alle 3 (unbegrenzt verlängerten) Seiten. Der Durchschnitt mit a_1 hat zum ersten Gewicht 0, also der reciproke Punkt die Gewichte 1, 0, 0, er ist mithin die Gegenecke von a_1. Folglich geht die reciproke Linie der Geraden durch alle 3 Ecken; nur der Fall, wo die Gerade einer Seite parallel ist, kann eine Ausnahme machen.

Die Kenntniss dieser 3 Punkte des Kegelschnitts ergänzt sich zur vollständigen Bestimmung, wenn auch der Mittelpunkt bekannt ist. Dieser sei m. Ein Durchmesser vom Punkt $P(u)$ aus gezogen, hat dann nach Satz II. zum ersten Gewicht

$$m_1(1-v)+\frac{P_1(u)}{\Sigma P(u)}v$$

wo v den Parameter bezeichnet. Da dieser für jenen Punkt des Kegelschnitts den Wert 1 hat, so muss er nach Satz II. für den diametralen Punkt den Wert -1 haben. Folglich ist

$$2m_1 - \frac{P_1(u)}{\Sigma P(u)} = \frac{P_1(u')}{\Sigma P(u')} \tag{4}$$

wo u' der entsprechende Wert von u ist. Vorausgesetzt ist $\Sigma m = 1$. Die Summe der 3 analogen Gleichungen giebt $1 = 1$, woraus erhellt, dass u' nur 2 Gleichungen zu erfüllen hat, dass also nach Elimination von u' nur eine Gleichung übrig bleibt. Zur Abkürzung sei

$$t = p(1-u)+qu; \quad t' = p(1-u')+qu'$$

$$T = t_1t_2t_3; \quad T' = t_1't_2't_3'$$

$$r_1 = \begin{vmatrix} p_2 p_3 \\ q_2 q_3 \end{vmatrix}; \quad r_2 = \begin{vmatrix} p_3 p_1 \\ q_3 q_1 \end{vmatrix}; \quad r_3 = \begin{vmatrix} p_1 p_2 \\ q_1 q_2 \end{vmatrix}$$

dann wird

$$P_2(u)P_3(u) = Tt_1; \qquad P_2(u')P_3(u') = T't_1'$$
$$\Sigma rt = 0; \qquad \Sigma rt' = 0 \tag{5}$$

Multiplicirt man also zwei Analoge der Gl. (4), so kommt:

$$4m_2m_3 + 2t_1\frac{m_1t_1 - \Sigma mt}{\Sigma P(u)} + \frac{Tt_1}{(\Sigma P(u))^2} = \frac{T't_1'}{(\Sigma P(u'))^2}$$

Nach Multiplication dieser Gleichung mit r_1 giebt die Summe der 3 Analogen mit Beachtung der Gl. (5):

$$4(r_1m_2m_3 + r_2m_3m_1 + r_3m_1m_2) + 2\frac{\Sigma rmt^2}{\Sigma P(u)} = 0$$

Der erste Teil, welcher von u unabhängig ist, sei $= 4M$; dann hat man die identische Gleichung:

$$\Sigma rmt^2 + 2M\Sigma P(u) = 0$$

oder, da

$$2\Sigma P(u) + \Sigma t^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2(t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2) = (\Sigma t)^2 = 1 \tag{6}$$

ist,

$$\Sigma(rm - M)t^2 + M = 0$$

woraus für $u = 0$ und $u = 1$:

$$\Sigma(rm - M)p^2 + M = 0$$
$$\Sigma(rm - M)q^2 + M = 0$$

und nach Auflösung:

$$-(r_1m_1 - M)\begin{vmatrix} p_1^2 & t_1^2 & q_1^2 \\ p_2^2 & t_2^2 & q_2^2 \\ p_3^2 & t_3^2 & q_3^2 \end{vmatrix} = M\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_2^2 & t_2^2 & q_2^2 \\ p_3^2 & t_3^2 & q_3^2 \end{vmatrix}$$

das ist nach Division durch $u(1-u)$:

$$r_1r_2r_3(r_1m_1 - M) = Mr_1(r_1 - r_2)(r_3 - r_1)$$

oder

$$r_1r_2r_3m_1 = Mr_1(r_2 + r_3 - r_1)$$

Die Summe der Analogen ist

$$r_1r_2r_3 = M\{(\Sigma r)^2 - 2\Sigma r^2\}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$N = (\Sigma r)^2 - 2\Sigma r^2 = 4r_2r_3 - (r_2 + r_3 - r_1)^2 \tag{7}$$

so erhält man durch Division:

$$m_1 = \frac{r_1(r_2 + r_3 - r_1)}{N} \tag{8}$$

und analog die Werte von m_2, m_3.

Nun entscheidet sich leicht, ob der Kegelschnitt Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Ein unendlich entfernter Punkt hat nämlich eine Gewichtsumme $= 0$. Demnach hat der Kegelschnitt unendlich entfernte Punkte, wenn die Gleichung

$$\Sigma \frac{1}{t} = 0 \quad \text{oder} \quad t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2 = 0 \tag{9}$$

für irgend ein reelles u erfüllt ist. Sind alle p und q positiv, so ist für jedes u zwischen 0 und 1 die Linke positiv, weil es alle Terme sind. Nach Gl. (6) ist also

$$\Sigma t^2 < 1 \quad \text{für} \quad 0 < u < 1$$

Da aber keins der t^2 ein Maximum hat, so ist für andere u

$$\Sigma t^2 > 1$$

und da die Linke stetig in u ist, so giebt es ein u, welches die Gleichung $\Sigma t^2 = 1$, mithin auch Gl. (9) erfüllt. Folglich kann für positive p und q der Kegelschnitt keine Ellipse sein. Nun folgt weiter aus den Relationen

$$\Sigma pr = 0; \quad \Sigma qr = 0$$

dass für positive p, sowie für positive q, nicht alle r gleiches Vorzeichen haben können. Bezeichnet man aber zwei r von ungleichem Vorzeichen mit r_2, r_3, so zeigt der letzte Ausdruck (7), dass N negativ ist. Folglich existiren unendlich ausgedehnte Kegelschnitte für negatives N. Eine Parabel ist kenntlich durch unendlich entfernten Mittelpunkt, d. i. nach Gl. (8) durch $N = 0$. Da der Fall der Parabel die Grenze zwischen Ellipse und Hyperbel bildet, so folgt, dass der Kegelschnitt Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem $N > 0$, $= 0$ oder < 0 ist. Ferner weiss man, dass die Gewichte aller Punkte innerhalb des Dreiecks positiv, ausserhalb von ungleichem Vorzeichen sind. Folglich ist die reciproke Linie einer Geraden, die durch das Dreieck geht, stets eine Hyperbel. Die Resultate sind folgende.

VI. Die reciproke Linie einer Geraden ist ein Kegelschnitt, und zwar Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem $N > 0$, $= 0$ oder < 0 ist.

VII. Geht die Gerade durch das Dreieck, so ist die reciproke Linie stets eine Hyperbel.

VIII. Der Kegelschnitt geht durch die 3 Ecken, und sein Mittelpunkt hat die Gewichte (8), wenn nicht die Gerade einer Dreiecksseite parallel ist.

Die ganz ausserhalb des Dreiecks liegenden Geraden können Kegelschnitten von allen 3 Formen reciprok sein. Um die Grenze ihrer Lagen geometrisch darzustellen, suchen wir die Einhüllende aller Geraden, denen Parabeln reciprok sind.

Zur Vereinfachung nehmen wir die Punkte p, q auf den Verlängerungen der Seiten a_1 und a_3. Sei also

$$p_1 = 0; \qquad p_2 = -u; \quad p_3 = 1+u$$
$$q_1 = 1+v; \quad q_2 = -v; \quad q_3 = 0$$

dann wird

$$r_1 = (1+u)v; \quad r_2 = (1+u)(1+v); \quad r_3 = u(1+v)$$

und nach Einsetzung in (7) findet man:

$$N = -4+3(1+uv)^2+4uv(u+v)$$

Die Punkte p, q durchlaufen die Verlängerungen von a_1, a_3 über a_2 hinaus ins Unendliche, wenn u und v von 0 bis ∞ variiren. Setzt man also

$$u = \frac{1}{t(t+2)} \tag{10}$$

so hat auch t nur alle positiven Werte zu durchlaufen. Nach Substitution ergiebt sich:

$$N = \frac{2t+3}{t^3(t+2)^3}\{(2t+1)(2t+3)v+2t^3+9t^2+12t+3\}\{(2t+1)v-t^2\}$$

Alle Factoren der Rechten ausser dem letzten sind allgemein positiv, mithin das Vorzeichen von N gleich dem des letzten Factors. Folglich bildet der Wert

$$v = \frac{t^2}{2t+1} = \frac{1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+2\right)} \tag{11}$$

die Grenze der Formen der reciproken Linie, und zwar ist diese Ellipse, wenn v grösseren, Hyperbel, wenn es kleineren, Parabel, wenn es gerade diesen Wert hat. Demzufolge sind die Gewichte für den erzeugenden Punkt einer Geraden, deren reciproke Linie Parabel ist,

$$\frac{(t+1)^2 w}{2t+1}, \quad -\frac{1-w}{t(t+2)}-\frac{t^2 w}{2t+1}, \quad \frac{(t+1)^2(1-w)}{t(t+2)} \tag{12}$$

ihre Summe ist identisch $=1$. Nach Gl. (1) findet man daraus seine Coordinaten. Differentiirt man deren Ausdrücke partiell nach t, indem man w als Function von t betrachtet, so erhält man für $\frac{\partial x}{\partial t}=0$, $\frac{\partial y}{\partial t}=0$ 2 Gleichungen, welche für den Coincidenzpunkt jener Geraden gelten, und nach Elimination von $\frac{\partial w}{\partial t}$ ergiebt sich:

$$w=\frac{2t+1}{(t+1)(t^2+t+1)};\quad 1-w=\frac{t^2(t+2)}{(t+1)(t^2+t+1)} \tag{13}$$

Führt man diese Werte in die Ausdrücke der Coordinaten x, y ein und ordnet die Gleichungen nach Potenzen von t, so lauten sie:

$$\left.\begin{array}{l} t^2(x-\alpha_3)+t(x-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)+x-\alpha_1=0 \\ t^2(y-\beta_3)+t(y-\beta_1+\beta_2-\beta_3)+y-\beta_1=0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

und nach Elimination von t erhält man als Gleichung der Einhüllenden:

$$\begin{vmatrix} x-\alpha_3 & x-\alpha_1 \\ y-\beta_3 & y-\beta_1 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} x-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 \\ y-\beta_3 & \beta_1-\beta_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-\alpha_1 & \alpha_2-\alpha_3 \\ y-\beta_1 & \beta_2-\beta_3 \end{vmatrix}$$

Sie ist 2ten Grades und wird durch alle 3 Ecken des Dreiecks befriedigt. Für unendlich grosse x, y gehen die Gl. (14) übereinstimmend über in

$$t^2+t+1=0$$

können also nicht durch reelle t erfüllt werden. Folglich ist die Curve stets Ellipse. Die Gewichte des erzeugenden Punkts dieser Ellipse erhält man durch Einsetzung des Wertes (13) in (12), nämlich

$$\frac{t+1}{t^2+t+1},\quad -\frac{t}{t^2+t+1},\quad \frac{t(t+1)}{t^2+t+1} \tag{15}$$

Den Mittelpunkt der Ellipse findet man durch eine sehr einfache Betrachtung. Ist u unendlich klein, so ist nach (10) (11) v unendlich gross, und umgekehrt; daher geht die Gerade $p(1-w)+qw$ d. i. die Tangente der Ellipse von einem Eckpunkt des Dreiecks aus immer parallel der Gegenseite, und die Transversale von diesem Berührungspunkt nach der Mitte der parallelen Sehne, d. i. der Gegenseite, ist ein Durchmesser. Die 3 so bekannten Durchmesser schneiden sich dann im Schwerpunkt, und dieser ist der Mittelpunkt. Hiernach sind von der Ellipse bekannt 3 Punkte, die Ecken des Dreiecks, ferner die den verbindenden Sehnen conjugirten Durchmesser, nämlich die Schwerpunktstransversalen, endlich hierdurch der Mittelpunkt. Es hat sich ergeben:

IX. Beschreibt man um den Schwerpunkt des Dreiecks als Mittelpunkt durch die Ecken eine Ellipse, so ist die Reciproke einer Geraden Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem die Gerade jene Ellipse schneidet, berührt oder meidet.

X. Die Gewichte einer Berührenden haben die Form (12), die des Berührungspunkts sind (13).

Verbindet man letztern mit dem Schwerpunkt nach Satz I. und zieht mit ersterer durch den Schwerpunkt eine Parallele nach Satz III. so erhält man zwei conjugirte Durchmesser. Setzt man den Winkel zwischen beiden gleich einem Rechten, so erhält man für t eine Gleichung 4. Grades, deren Wurzeln den 4 Scheiteln der Ellipse entsprechen. Die Gleichung zerfällt in 2 quadratische, die sich nach einander auflösen lassen. Auch kann man die Gewichte der Scheitel in imaginärer Form so aufstellen, dass sich bei Vertauschung der Dreieckseiten nur die 3 Kubikwurzeln der Einheit vertauschen. Da jedoch eine reine Symmetrie nicht zu erreichen ist, so lässt sich die an sich interessante Untersuchung nicht als zugehörig zur Theorie der Symmetriepunkte betrachten.

Die vorstehenden Sätze wenden wir nun auf die Symmetriepunkte an. Die Gewichte der 4 bekannten sind folgende. Für den Schwerpunkt ist das erste Gewicht $= 1$, für den Inkreismittelpunkt ist es $= a_1$, für den Umkreismittelpunkt

$$= a_1^2(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)$$

für den Höhenschnitt

$$= \frac{1}{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}$$

für den reciproken Punkt des Höhenschnitts

$$= a_2^2 + a_3^2 - a_1^2$$

Diese Ausdrücke führen auf die Einteilung der Symmetriepunkte nach Graden gemäss dem Grade der homogenen Function, welche die Gewichte darstellt. Es ist dabei zu beachten, dass sich der Grad beliebig erhöhen, und ebenso die gebrochne Function zur ganzen machen lässt durch Multiplication mit einer symmetrischen Function aller 3 Seiten. Verstehen wir demnach unter dem Grade eines Symmetriepunkts immer den niedrigsten möglichen des auf ganze Function reducirten Gewichtsausdrucks. Dann sind der Umkreismittelpunkt und Höhenschnitt vom 4. Grade, und fallen ausser Betracht, wenn wir die Untersuchung nur bis zum 2. Grade ausdehnen wollen. Wir behalten dann den Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt und reciproken Höhenschnitt als Beispiele der Grade 0, 1 und 2.

Das erste Gewicht des allgemeinsten Symmetriepunkts 1. Grades ist $a_1 u + a_2 + a_3$. Stellt man es in der Form dar

$$a_1 + u\Sigma a \tag{16}$$

so zeigt sich, dass der Ort dieses Punktes die gerade Verbindung des Schwerpunkts und Inkreismittelpunkts ist. Für diese Gerade ist $p_1 = a_1$; $q_1 = 1$, also

$$r_1 = a_2 - a_3; \quad r_2 + r_3 - r_1 = -2(a_2 - a_3)$$

Nach (8) ist jetzt das erste Gewicht des Mittelpunkts der reciproken Linie, welche nach Satz VII. eine Hyperbel ist,

$$m_1 = (a_2 - a_3)^2$$

Das erste Gewicht des allgemeinsten Symmetriepunktes 2. Grades ist

$$u a_1^2 + v a_1 (a_2 + a_3) + w a_2 a_3 + a_2^2 + a_3^2 \tag{17}$$

Alle darin enthaltenen besondern Symmetriepunkte werden durchlaufen, wenn u, v, w alle Werte von $-\infty$ bis ∞ unabhängig von einander annehmen. Nennt man die 4 besondern Punkte

$$a_1^2, \quad a_1(a_2 + a_3), \quad a_2 a_3, \quad a_2^2 + a_3^2$$

die Grundpunkte des Systems, so kann man den gesammten Umfang sich entfaltet vorstellen, indem man von einem Grundpunkte, z. B. dem 4ten, nach einem andern, z. B. dem ersten, eine Gerade zieht, d. i. $v = w = 0$ setzt und u variiren lässt, dann jeden Punkt der Geraden mit dem zweiten Grundpunkt verbindet, d. i. v bei constantem u variiren lässt, endlich von jedem Punkte des so erhaltenen, bereits die ganze Ebene bedeckenden Strahlenbüschels nach dem dritten Punkte einen Strahl sendet. Das letzte System von Strahlenbüscheln durchkreuzt sich unendlich vielfach in jedem Punkte der Ebene; doch sind die Kreuzungspunkte als Symmetriepunkte nie identisch, sondern schieben sich bei variirendem Dreieck über einander hinweg, weil sie verschiedenen Systemen der u, v, w angehören.

Die 4 Grundpunkte lassen sich leicht construiren. Sei in der Figur S der Schwerpunkt, J der Inkreismittelpunkt, R der reciproke Höhenschnitt, A, B, C, D die 4 Grundpunkte 2. Grades, die Gewichte so reducirt, dass die Summe immer $= 1$ wird, also

$$S_1 = \tfrac{1}{3}; \quad J_1 = \frac{a_1}{\Sigma a}; \quad R_1 = \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{\Sigma a^2}$$

$$A_1 = \frac{a_1^2}{\Sigma a^2}; \quad B_1 = \frac{a_1}{2} \frac{a_2 + a_3}{a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2}; \quad C_1 = \frac{a_2 a_3}{a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2}$$

$$D_1 = \frac{a_2^2 + a_3^2}{2\Sigma a^2} \quad \text{ausserdem} \quad E_1 = \frac{a_2 + a_3 - a_1}{\Sigma a}$$

Dann hat man:

$$E = (1+2)S - 2J \tag{18}$$

$$A = (1+\tfrac{1}{2})S - \tfrac{1}{2}R \tag{19}$$

$$D = (1-\tfrac{1}{4})S + \tfrac{1}{4}R \tag{20}$$

$$C = (1+2)S - 2B \tag{21}$$

Ferner weiss man zufolge der Relationen

$$2a_2a_3 + (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2) = (a_2 + a_3 - a_1)\Sigma a$$

$$a_1^2 + a_1(a_2 + a_3) = a_1 \Sigma a$$

dass CER und AJB je eine Gerade bilden. Hieraus ergiebt sich folgende Construction.

S und J sind bekannt, C als reciproker Punkt von J ist gleichwie R nach Satz V. leicht zu finden. Man ziehe durch R, S die Gerade $ASDR$ und mache nach Gl. (19) (20)

$$AS = \tfrac{1}{2}RS; \quad DS = \tfrac{1}{4}RS$$

Aus A durch J und aus C durch S ziehe man dann die Geraden AJB und CSB; ihr Durchschnitt ist der letzte gesuchte Punkt B. Auch ist seine Lage auf CS nach Gl. (21) durch die Relation

$$CS = 2BS$$

bekannt.

Der Punkt E, der hierbei nicht gebraucht ward, ist zu weiterer Verwendung mit aufgeführt worden. Man findet ihn gemäss Gl. (18), indem man die Gerade JSE zieht, welche CR in E schneidet, und auf welcher überdies

$$ES = 2JS$$

ist. Sei F der reciproke Punkt von E, also

$$F_1 = a_1^2 - (a_2 - a_3)^2 \tag{22}$$

dann ergiebt sich die Construction eines bemerkenswerten Punkts M, dessen erstes Gewicht

$$M_1 = (a_2 - a_3)^2$$

denn erstlich hat man nach (22) die Gerade FAM, und ferner wegen

$$2a_2a_3 + (a_2 - a_3)^2 = a_2^2 + a_3^2$$

die Gerade CDM.

Da in S die 3 hindurchgehenden Geraden im Verhältniss 1 : 2 geteilt werden, so bemerkt man leicht, dass

$$AJB \text{ parallel } CER$$

Um ferner Anwendung von den Sätzen VI. VII. VIII. zu machen, nehmen wir erst die symmetrische Gerade 1. Grades (16). Aus $p_1 = a_1$, $q_1 = 1$ geht hervor:

$$r_1 = a_2 - a_3; \quad r_2 + r_3 - r_1 = -2(a_2 - a_3)$$

folglich nach (8)

$$m_1 = (a_2 - a_3)^2$$

Die reciproke Linie dieser Geraden ist also eine Hyperbel, deren Mittelpunkt der soeben construirte Punkt M ist.

Wir wenden uns nun zu den Linien 2. Grades, und verbinden zwei beliebige Symmetriepunkte des Systems (17), deren erste Gewichte sind

$$p_1 = a_1^2\lambda + a_1(a_2+a_3)\mu + a_2a_3\nu + (a_2^2+a_3^2)\pi$$
$$q_1 = a_1^2\lambda_1 + a_1(a_2+a_3)\mu_1 + a_2a_3\nu_1 + (a_2^2+a_3^2)\pi_1$$

Zur Abkürzung schreiben wir

$$(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda_1 & \mu_1 \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

Da für $a_2 = a_3$ offenbar $p_2 = p_3$, $q_2 = q_3$ wird, also r_1 und $r_2 + r_3$ verschwinden, so folgt, dass letztere 2 Grössen den Factor $(a_2 - a_3)$ haben. Sei also

$$r_1 = (a_2 - a_3) r_1'; \quad r_2 + r_3 - r_1 = (a_2 - a_3) r_1''$$

dann wird das erste Gewicht des Mittelpunkts der reciproken Linie

$$m_1 = (a_2 - a_3)^2 r_1' r_1''$$

Man findet:

$$\begin{aligned}
r_1' = {} & a_1^3\{(\mu\pi) - (\nu\pi)\} + a_1^2(a_2+a_3)\{(\lambda\pi) + (\mu\nu)\} \\
& + a_1a_2a_3\{(\lambda\mu) + (\lambda\nu) + (\mu\nu) + (\mu\pi) + (\nu\pi)\} \\
& + a_1(a_2^2+a_3^2)\{(\lambda\nu) + (\mu\pi)\} \\
& + a_2a_3(a_2+a_3)\{(\lambda\mu) + (\mu\pi)\} + (a_2+a_3)(a_2^2+a_3^2)(\lambda\pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1'' = {} & a_1^3\{-(\lambda\mu) + (\lambda\nu) + (\mu\pi) - (\nu\pi)\} + 2a_1^2(a_2+a_3)\{(\lambda\pi) + (\mu\nu)\} \\
& + a_1a_2a_3\{3(\lambda\mu) + (\lambda\nu) + 2(\mu\nu) + 3(\mu\pi) + (\nu\pi)\} \\
& + a_1(a_2^2+a_3^2)\{(\lambda\mu) + (\lambda\nu) + 3(\mu\pi) - (\nu\pi)\} \\
& + a_2a_3\{(\lambda\mu) + (\lambda\nu) + (\mu\pi) + (\nu\pi)\} + 2(a_2+a_3)(a_2^2+a_3^2)(\lambda\pi) \quad (23)
\end{aligned}$$

Hiernach ist im allgemeinen der Mittelpunkt m vom 8. Grade. Es

wird eine Auszeichnung für besondere Gerade des Systems sein, wenn er sich durch Ausscheidung eines symmetrischen Factors auf niederen Grad reducirt. Ueber die möglichen Fälle, wo dies stattfindet, lässt sich im voraus folgendes sagen.

Hat r_1 einen symmetrischen Factor, so haben r_2 und r_3 denselben, und m_1 hat ihn doppelt. Wir wollen mit A, B, C die Fälle bezeichnen, wo r_1' einen symmetrischen Factor 1., 2., 3. Grades hat. Umgekehrt ist ein symmetrischer Factor von $r_2+r_3-r_1$ auch in r_1 enthalten.

Enthält r_1' einen nicht symmetrischen Factor eines in m_1 steckenden symmetrischen Factors, so müssen auch die 2 analogen Factoren in m_1 stecken, d. i. in r_1' oder in r_1'' oder in $(a_2-a_3)^2$. Das gleiche auch auf r_1'' angewandt giebt zunächst die 2 Fälle:

D, Ein linearer Factor in r_1', die 2 analogen in r_1''.
E, Umgekehrt.

Ein Factor 2. Grades kann nicht in gleichem Falle sein, weil das Product der analogen 4. Grades sein würde.

Endlich ist es denkbar, dass das Product der Analogen von a_2-a_3 in r_1' oder r_1'' enthalten sei. Da jedoch das Product aller drei bei Vertauschung der Seiten sein Vorzeichen wechselt, so sind nur die Quadrate der 3 Factoren zulässig, d. h. das genannte Product muss in r_1' und r_1'' gleichzeitig enthalten sein. Dies sei der Fall F.

Alle sonstigen Fälle sind Combinationen der genannten. Nach Ausscheidung eines symmetrischen Factors ist jedoch stets der Ausdruck schon so durchsichtig, dass man auf Combinationen gar nicht auszugehen braucht.

In allen genannten Fällen, ausgenommen C, muss r_1' einen linearen Factor von der Form

$$a_1+\varepsilon(a_2+a_3) \tag{24}$$

haben. Dividirt man, so wird der Quotient

$$\begin{aligned}&\Sigma a^2(\mu-\nu,\ \pi)+(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)(\mu\nu)\\&+\{\Sigma a^2+\varepsilon(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)+a_2a_3-a_1^2\}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}-\mu+\nu,\ \pi\right)\end{aligned}$$

und der Rest verschwindet unter den 2 Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda\mu)-(1+\varepsilon)(\lambda\pi)-\varepsilon(\mu\nu)+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)(\mu\pi)-\varepsilon(1+\varepsilon)(\nu\pi)=0\\&(\lambda\nu)-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\right)(\lambda\pi)-\varepsilon(\mu\nu)+(1+\varepsilon^2)(\mu\pi)-\varepsilon^2(\nu\pi)=0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Der Quotient wird symmetrisch, wenn

$$\lambda = \varepsilon(\mu - \nu) + \delta\pi; \quad \lambda_1 = \varepsilon(\mu_1 - \nu_1) + \delta\pi_1$$

Dies in die Bedingungsgleichungen (25) gesetzt giebt:

$$(1-\delta)(\mu\pi) = 0; \quad (1-\delta)(\nu\pi) = 0$$

Der Fall $\pi = \pi_1 = 0$ erweist sich als blosse Specialität; ebenso der Fall $\varepsilon = 0$; wären $(\mu\pi)$, $(\nu\pi)$ null, so wären λ, μ, ν, π in beiden Punkten proportional, und diese fielen zusammen. Es bleibt $\delta = 1$, das ist

$$\lambda = \varepsilon(\mu - \nu) + \pi; \quad \lambda_1 = \varepsilon(\mu_1 - \nu_1) + \pi_1$$

als einzige Lösung des Falles B übrig. Hier wird

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1(\varepsilon a_1 + a_2 + a_3)\mu + (a_2 a_3 - \varepsilon a_1^2)\nu + \pi \Sigma a^2 \\ r_1 &= (a_2 - a_3)\{a_1 + \varepsilon(a_2 + a_3)\}L \end{aligned} \tag{26}$$

wo L die symmetrische Function

$$L = \Sigma a^2(\mu - \nu, \pi) + (a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)(\mu\nu)$$

Da demnach $\Sigma r = 0$ ist, so hat man sogleich:

$$r_2 + r_1 - r_1 = -2r_1$$

daher nach Ausscheidung des symmetrischen Factors $-2L^2$:

$$m_1 = (a_2 - a_3)^2\{a_1 + \varepsilon(a_2 + a_3)\}^2 \tag{27}$$

Zwei Punkte des Systems (27) für beliebige Werte von μ, ν, π, aber festen Wert von ε bestimmen also eine Gerade, deren reciproke Linie eine Hyperbel um den von μ, ν, π unabhängigen Mittelpunkt (27) ist. Demnach ist das ganze Hyperbelsystem concentrisch. Mit ε variirt der Mittelpunkt und geht für $\varepsilon = 1$ in den Punkt M über.

Im Falle D soll der Factor $a_1 + \varepsilon(a_2 + a_3)$ in r_1' durch den Factor

$$\{a_2 + \varepsilon(a_3 + a_1)\}\{a_3 + \varepsilon(a_1 + a_2)\} \tag{28}$$

in r_1'' zu einem symmetrischen Product ergänzt werden. Dann hat r_1'' noch einen dritten linearen Factor

$$\gamma a_1 + \delta(a_2 + a_3) \tag{29}$$

Entwickelt man das Product von (28) und (29) in der Form (23) und identificirt die Coefficienten der 6 Terme, so erhält man 6 Glei chungen, denen allein die Werte

$$\gamma = -2\varepsilon\lambda + \frac{1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2}{\varepsilon}\mu; \quad \pi = -\lambda + \mu$$

die analogen ν_1 und π_1, und

$$\gamma = \delta$$

genügen. Hiernach geht der Factor (29) über in $\gamma\Sigma a$, und Σa muss auch in r_1' stecken. So ergiebt sich:

$$p_1 = (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 2\varepsilon a_2 a_3)\lambda + \left\{a_1(a_2+a_3) + \frac{1-\varepsilon+2\varepsilon^2}{\varepsilon} a_2 a_3 + a_2^2 + a_3^2\right\}\mu$$

$$r_1' = \frac{1}{\varepsilon}\{a_1 + \varepsilon(a_2+a_3)\}\,\Sigma a\,\{\Sigma a - 2(1-\varepsilon)a_1\}(\lambda\mu)$$

$$r_1'' = -\frac{2}{\varepsilon}\{a_2 + \varepsilon(a_3+a_1)\}\{a_3 + \varepsilon(a_1+a_2)\}\,\Sigma a(\lambda\mu)$$

daher nach Ausscheidung des symmetrischen Factors

$$-\frac{2}{\varepsilon^2}\{a_1 + \varepsilon(a_2+a_3)\}\{a_2 + \varepsilon(a_3+a_1)\}\{a_3 + \varepsilon(a_1+a_2)\}(\Sigma a)^2(\lambda\mu)^2$$

das erste Gewicht des Mittelpunkts:

$$m_1 = (a_2 - a_3)^2\{\Sigma a - 2(1-\varepsilon)a_1\} \tag{30}$$

Offenbar liegen alle Punkte p, welche beliebigen Werten von λ und μ entsprechen, auf einer Geraden, die durch die beiden Punkte $\lambda = -1$, $\mu = 0$ und $\lambda = 1$, $\mu = 1$ geht. Wir können daher die ersten Gewichte der 2 bestimmenden Punkte schreiben:

$$p_1 = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\varepsilon a_2 a_3$$
$$q_1 = a_1\Sigma a + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} a_2 a_3$$

Die reciproke Linie der geraden Verbindung ist dann ein Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt ein Symmetriepunkt 3. Grades (30), und zwar Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem $\Sigma m < 0$, $= 0$ oder > 0 ist. Sei zur Abkürzung

$$3e = a_1 + a_2 + a_3;\quad 3f = a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2;\quad g = a_1 a_2 a_3$$

dann wird

$$\frac{1}{54}\Sigma m = e(e^2 - f) - \frac{1-\varepsilon}{3}(ef - g) \tag{31}$$

Man kann daher ε den 3 Formen des Kegelschnitts gemäss bestimmen. Will man umgekehrt bei gegebenem ε die entsprechenden Relationen der Seiten suchen, so kann man diese als Wurzeln der kubischen Gleichung

$$a^3 - 3ea^2 + 3fa - g = 0 \tag{32}$$

darstellen, in welcher g der obigen Bedingung gemäss durch e, f aus-

zudrücken ist. Es mag hier das Beispiel $\varepsilon = -\frac{1}{2}$ genügen. Damit der Kegelschnitt eine Parabel sei, wird verlangt:

$$g = 3ef - 2e^3$$

und Gl. (32) geht über in

$$(a-e)^3 - 3(e^2-f)(a-e) = 0$$

Die 3 Wurzeln sind, nach der Grösse geordnet:

$$a_1 = e + h; \quad a_2 = e; \quad a_3 = e - h$$

wo $h = \sqrt{3(e^2-f)}$, so wie e willkürlich innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Demnach tritt bei $\varepsilon = -\frac{1}{2}$, d. i. bei der Verbindung der Punkte

$$p_1 = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3; \quad q_1 = a_1 \Sigma a - 3 a_2 a_3 \tag{33}$$

der Fall der Parabel ein, sobald die Differenzen der nach ihrer Grösse geordneten Seiten einander gleich werden. Um über die 2 andern Fälle zu entscheiden, geben wir den Seiten unendlich kleine Incremente bei constanten e, f; dann zeigt sich, dass

$$2\partial a_1 = 2\partial a_3 = -\partial a_2 = \frac{\partial g}{h^2}$$

ist. Aus (31) sieht man, dass der Uebergang zur Hyperbel oder Ellipse bzhw. bei wachsendem oder abnehmendem g erfolgt. Setzt man also

$$\frac{\partial g}{h^2} = 2\gamma$$

so zeigt sich, dass die Werte

$$a_1 = e + h + \gamma, \quad a_2 = e - 2\gamma, \quad a_3 = e - h + \gamma$$
$$a_1 - a_2 = h + 3\gamma, \quad a_2 - a_3 = h - 3\gamma$$

für positives oder negatives γ bzhw. der Hyperbel oder Ellipse entsprechen; d. h.

Die reciproke Linie der geraden Verbindung der Punkte p, q (33) ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem die grösste Dreieckseite um weniger, ebenso viel oder mehr als die kleinste von der mittleren differirt.

Dies muss ebenso für endliches wie für unendlich kleines γ gelten, weil bei absolut wachsendem γ der Fall der Parabel nicht eintreten kann, solange die Grössenfolge der Seiten dieselbe bleibt.

Die Gewichte des Mittelpunkts sind

$$m_1 = (a_2 - a_3)^2(e - a_1) = -(h - 3\gamma)^2(h + \gamma) = -h^3 + 5\gamma h^2$$
$$m_2 = (a_3 - a_1)^2(e - a_2) = 8\gamma h^2$$
$$m_3 = (a_1 - a_2)^2(e - a_3) = (h + 3\gamma)^2(h - \gamma) = h^3 + 5\gamma h^2$$

oder, nach Division durch $\Sigma m = 18\gamma h^2$:

$$m_1 = \frac{5}{18} - \frac{h}{18\gamma}; \quad m_2 = \frac{4}{9}; \quad m_3 = \frac{5}{18} + \frac{h}{18\gamma}$$

Der Mittelpunkt liegt daher bei unendlich kleinem γ auf einer Parallele mit a_2, im Abstande $= \frac{4}{9}$ der Dreieckshöhe, in unendlicher Entfernung in der Richtung von der Ecke 1 nach der Ecke 3 hin. Denkt man von ihm aus nach der Mitte von a_1 einen Durchmesser gezogen, so würde dieser der Sehne a_2 bei verschwindendem γ parallel. Da eine Parabelsehne nie dem Durchmesser parallel sein kann, so folgt, dass in unserm Falle die Parabel in 2 parallele oder 1 Gerade degenerirt. Die Gewichte der Geraden $p + qu$ sind:

$$-e(1-2u), \quad h(1+u), \quad e(1-2u)$$

also die der reciproken Linie:

$$1, \quad -\frac{e}{h}\frac{1-2u}{1+u}, \quad -1$$

Demzufolge ist die reciproke Linie die Parallele mit der Seite a_2 durch deren Gegenecke. Sie gehört zu den in Satz VIII. genannten Ausnahmen; denn sie geht nicht durch die beiden andern Ecken, und zwar braucht sie es nicht, weil die ursprüngliche Gerade der Seite a_2 parallel ist.

R. Hoppe.

3.

Ueber Paralleltransversalen im Dreieck.

Zieht man durch einen merkwürdigen Punkt O des Dreieckes ABC zu den Seiten abc parallele Gerade und bezeichnet man mit a' das von den Seiten b und c begrenzte Stück der zu a parallelen; so existiren ziemlich einfache Relationen zwischen $a'b'c'$ (welche Längen wir der Kürze halber die Paralleltransversalen des Punktes O nennen) und den andern Dreieckstücken.

Zunächst erhält man für jeden Punkt in der Ebene eines gleich-

seitigen Dreieckes $\Sigma a' = 2a$. Ist hingegen das Dreieck ungleichseitig und bezeichnet p_a die Normale von O auf a, trifft ferner a' die Seite b in dem Punkte A_b: so hat man folgende allgemeine Formeln:

$$a' = \frac{a(bp_b + cp_c)}{2F} = a - \frac{a^2 p_a}{2F}$$

$$\Sigma a' = 2s - \frac{\Sigma a^2 p_a}{2F}$$

$$\frac{a'b'c'}{abc} = \frac{\Sigma ab p_a p_b - 2r p_a p_b p_c}{4F^2}$$

$$\Sigma \frac{a'b'}{ab} = 1 + \frac{\Sigma ab p_a p_b}{4F^2}$$

$$\Sigma \frac{a'}{a} = 2$$

$$\triangle A_b B_c C_a = \frac{\Sigma ab p_a p_b}{2F} = \triangle A_c B_a C_b$$

wo F, r und s Fläche, Umkreisradius und halben Umfang des Dreieckes bezeichnen.

Wird der Punkt O specialisirt, so ergibt sich zunächst für den Schwerpunkt, dass die Dreiecke $A_b B_c C_a$ dem aus den Seitenhalbirenden als Seiten gebildeten Dreieck ähnlich und jedes den Flächeninhalt $\frac{F}{3}$, sowie mit dem Urdreieck denselben Schwerpunkt besitzt. Die übrigen Formeln verlieren an Interesse, da hier $a' = {}^2a$ ist.

Für O als den Höhenpunkt gelten folgende Gleichungen:

$$\Sigma \frac{a'}{a^2} = \frac{r + \varrho}{F}, \qquad \Sigma \frac{a'}{a^3} = \frac{\Sigma a^2}{8F^2}$$

$$\Sigma a'b'c^3 = 4abcr^2, \qquad \Sigma OA_b . OA_c = \Sigma a^2 - 8r^2$$

wo ϱ den Inkreisradius bezeichnet.

Für das Umkreiscentrum hat man:

$$\Sigma \frac{a'}{a^2} = \Sigma \frac{1}{a} - \frac{r + \varrho}{2F}, \qquad \Sigma OA_b . OA_c = r^2$$

$$\Sigma \frac{a'}{a^3} = \Sigma \frac{1}{a^2} - \frac{\Sigma a^2}{16F^2}, \qquad \Sigma \frac{a'}{f_a} = \frac{\Sigma a^2}{2F}$$

$$\frac{a'}{2} + a'' = a$$

wo f_a die Normale ist, welche vom Centrum des Feuerbachschen Kreises auf a gefällt wird, und a'' die Paralleltransversale desselben Punktes für die Seite a.

Hierher gehört auch der Satz, dass $\Sigma OA_b.OA_c$ constant ist, wenn O auf der Peripherie eines mit dem Umkreis concentrischen Kreises liegt.

Für das Inkreiscentrum erhalten wir:

$$\Sigma a' = \frac{\Sigma ab}{s}, \quad \Sigma OA_b.OA_c = 2r\varrho$$

$$\Sigma \frac{a'}{b+c} = 1, \quad \triangle(a'b'c') = \frac{abc}{4s^2}\sqrt{\Sigma ab}$$

wo $\triangle(a'b'c')$ den Flächeninhalt des Dreiekes mit den Seiten $a'b'c'$ bezeichnet.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass man auch nach einem solchen Punkt O fragen kann, bei dem

$$a' = b' = c'$$

Man hat dann wegen

$$a - \frac{a^2 p_a}{2F} = b - \frac{b^2 p_b}{2F} = c - \frac{c^2 p_c}{2F}$$

folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a^2 p_a - b^2 p_b &= (a-b).2F \\ b^2 p_b - c^2 p_c &= (b-c).2F \\ a p_a + b p_b + c p_c &= 2F \end{aligned}$$

woraus:

$$p_a = \frac{2F}{a} \begin{vmatrix} a-b, & -b, & 0 \\ b-c, & +b, & -c \\ 1, & +1, & +1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a, & -b, & 0 \\ 0, & +b, & -c \\ 1, & 1, & +c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2F}{a} \cdot \frac{ab + ac - bc}{\Sigma ab}$$

und

$$a' = b' = c' = \frac{2abc}{\Sigma ab}$$

folgt, womit die Existenz des Punktes der gleichen Paralleltransversalen bewiesen ist.

Wien, den 7. April 1874.

Emil Hain.

4.

Ueber den Punkt der gleichen Paralleltransversalen.

In jedem Dreieck gibt es einen Punkt, durch welchen man zu den Seiten desselben parallele Gerade so ziehen kann, dass die von den Seiten begrenzten Stücke einander gleich sind. Nennt man diesen Punkt den der gleichen Paralleltransversalen und die Länge t einer jeden die Paralleltransversale des Dreieckes mit den Seiten abc, so ist:

$$t = \frac{2abc}{\Sigma ab}$$

Verbindet man nun irgend einen Punkt O in der Ebene des Dreieckes ABC mit den Ecken und nennt die Paralleltransversale des Dreieckes BOC t_a, die des Dreieckes aus den Seiten OA mit t', so ist

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{t'} = \Sigma \frac{1}{t_a}$$

Man findet ferner, dass die Paralleltransversale des aus den Höhen eines Dreieckes als Seiten gebildeten Dreieckes gleich ist dem doppelten Inkreisradius des Urdreieckes.

t_1 Paralleltransversale des aus den Höhen eines Dreieckes als Seiten gebildeten Dreieckes.

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{\frac{2F}{a}} = \frac{1}{2}\Sigma \frac{a}{2F} = \frac{2s}{4F} = \frac{s}{2F} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varrho}$$

$$t_1 = 2\varrho$$

Wien, den 7. Juni 1874.

Emil Hain.

5.

Lehrsätze über Gerade im Raume.

Erklärung. Unter dem Winkel zweier Geraden im Raume verstehe ich, nach Grösse und Stellung, denjenigen, dessen Schenkel mit den Geraden gleiche Richtung haben.

Lehrsatz. Errichtet man auf der Halbirungslinie des Winkels zweier Geraden eine senkrechte Ebene, so hat die Verbindungslinie

ihrer Durchschnittspunkte mit den Geraden gegen diese gleiche Neigung.

Beweis. Nehmen wir die xy Ebene beiden Geraden parallel, so ist ihr auch die Winkelebene, mithin auch die Halbirungslinie parallel. Wir können nun die x Axe letzterer parallel und die auf ihr senkrechte Ebene zur yz Ebene nehmen. Dann sind die Gleichungen beider Geraden:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b; \quad z \text{ constant}$$
$$y = -x \operatorname{tg} \alpha + c; \quad z \text{ constant}$$

die der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte

$$y = z \operatorname{tg} \beta + a; \quad x \text{ constant}$$

folglich der Cosinus des Winkels, den letztere einzeln mit beiden Geraden bildet,

$$= \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha . 0 - 0 . \cos\beta \text{ einerseits,}$$
$$= \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha . 0 - 0 . \cos\beta \text{ andrerseits,}$$

also beiderseits $= \sin\alpha \sin\beta$, w. z. b. w.

I. **Zusatz:** Gleitet eine Gerade an zwei anderen so, dass sie zu beiden stets gleich geneigt ist, so entsteht ein hyperbolisches Paraboloid.

Um die Gleichung desselben in einfachster Form zu erhalten, lege man durch den Halbirungspunkt des kürzesten Abstandes der Geraden G_1 und G_2 eine Ebene, welche mit der Halbirungslinie g_0 des Winkels $(G_1 G_2)$ einen Winkel von 45^0 einschliesst, und mit G_1 und G_2 gleiche Neigung hat; das sei die Ebene XZ. Auf gleiche Weise legt man die Ebenen XY und YZ. Nach dieser Anordnung werden die Geraden die Gleichungen:

$$G_1 \ldots y = Bx + b \quad \text{und} \quad z = Bx - b$$
$$G_2 \ldots y = -Bx - b \quad \text{und} \quad z = -Bx + b$$

und eine auf die Halbirungslinie ihres Winkels senkrechte Ebene die Gleichung haben:

$$(E) \ldots y + z = P$$

Es werden sich somit die Coordinaten der Durchstosspunkte M_1 und M_2 dieser Ebene mit G_1 und G_2 folgends gestalten:

$$M_1 \ldots x = \frac{P}{2B}, \quad y = \frac{P + 2b}{2}, \quad z = \frac{P - 2b}{2}, \quad \text{und}$$

$$M_2 \ldots x = -\frac{P}{2B}, \quad y = \frac{P - 2b}{2}, \quad z = \frac{P + 2b}{2}$$

Lege man durch diese Punkte eine Gerade G, deren Gleichungen folgends aussehen müssen:

$$G \ldots y = \frac{2Bb}{P}x + \frac{P}{2}, \qquad z = -\frac{2Bb}{P} + \frac{P}{2}$$

Setzt man in diese den Wert für P aus Gl. (E), so ist

$$y = \frac{2Bb}{z+y}x + \frac{z+y}{2},$$

$$z = -\frac{2Bb}{z+y}x + \frac{z+y}{2};$$

von den Brüchen befreit:

$$y^2 + zy = 2Bbx + z^2 + 2zy + y^2$$
$$z^2 + zy = -2Bbx + z^2 + 2zy + y^2$$
$$\text{oder} \quad y^2 - z^2 = 4Bbx;$$

$Bb = a$ gesetzt, so ist

$$y^2 - z^2 = 4ax$$

als Gleichung des hyperbolischen Paraboloides.

II. Zusatz: Eine Fläche, deren jeder Punkt von zwei gegebenen Geraden, die in ihren Richtungen um 90° von einander abweichen, gleich weit absteht, ist ein hyperbolisches Paraboloid.

Es seien G_1 und G_2 zwei Geraden mit den Gleichungen:

$$G_1 \ldots x = -a, \quad z = 0 \quad \text{und} \quad G_2 \ldots x = a, \quad y = 0,$$

durch welche man die Fläche bestimmen will, M sei ein willkürlicher Punkt derselben, MS und MR die Abstände desselben von den Geraden G_2 und G_1; also $MR = MS$, nun ist

$$\overline{MR}^2 = \overline{M'R}^2 + \overline{MM'}^2 \quad \text{und}$$
$$\overline{MS}^2 = \overline{M''S}^2 + \overline{MM''}^2$$

Es ist

$$M'R = x + a, \qquad M''S = x - a,$$
$$MM'' = y \quad \text{und} \quad MM' = z,$$

demnach

$$\overline{MR}^2 = (x+a)^2 + z^2, \qquad \overline{MS}^2 = (x-a)^2 + y^2.$$

Diese Werte einander gleichgesetzt und gehörig reducirt ergeben

$$y^2 - z^2 = 4ax$$

als Gleichung des obgenannten hyperbolischen Paraboloides.

III. Zusatz: Eine Fläche, bei welcher die Abstände jedes ihrer Punkte von zwei gegebenen Geraden einander gleich sind, ist ein hyperbolisches Paraboloid.

G_1 und G_2 mit den Gleichungen

$$G_1 \ldots z = By, \quad x = -e$$
$$G_2 \ldots y = Bz, \quad x = e$$

seien die gegebenen Geraden. M sei ein beliebiger Punkt der Fläche, $MR = MS$ seine Radienvectoren. Man ziehe die Geraden MP und MQ und es ergibt sich, wenn G_1, G_2 die x Axe in P, Q schneiden:

$$\overline{MR}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{PR}^2 \quad \text{und}$$
$$\overline{MS}^2 = \overline{MQ}^2 - \overline{QS}^2$$

oder

$$\overline{MR}^2 = (x+e)^2 + y^2 + z^2 - \overline{PR}^2$$
$$\overline{MS}^2 = (x-e)^2 + y^2 + z^2 - \overline{QS}^2$$

Setzt man diese Ausdrücke einander gleich, so ist

$$4ex = \overline{PR}^2 - \overline{SQ}^2$$

Legt man durch M die Ebenen

$$E_1 \ldots y + Bz = y' + Bz' \quad \text{und}$$
$$E_2 \ldots z + By = z' + By'$$

senkrecht auf G_1 und G_2, so haben die Durchschnittspunkte R und S derselben mit den Geraden G_1 und G_2 die Coordinaten:

$$S \begin{cases} x_2 = e \\ y_2 = \dfrac{B(z' + By')}{B^2+1} \\ z_2 = \dfrac{z' + By'}{B^2+1} \end{cases} \qquad R \begin{cases} x_1 = -e \\ y_1 = \dfrac{y' + Bz'}{B^2+1} \\ z_1 = \dfrac{B(y' + Bz')}{B^2+1} \end{cases}$$

wo die mit einem Komma bezeichneten Buchstaben die Coordinaten des Punktes M sind. Und es ist

$$\overline{PR}^2 = y_1^2 + z_1^2 \quad \text{und}$$
$$\overline{SQ}^2 = y_2^2 + z_2^2, \quad \text{demnach}$$
$$4ex(B^2+1) = (y + Bz)^2 - (z + By)^2$$

daraus:
$$y^2 - z^2 = -\frac{4ex(B^2+1)}{B^2-1}$$

Setzt man $e.\frac{B^2+1}{1-B^2} = a$, so ist

$$y^2 - z^2 = 4ax$$

die Gleichung des vorerwähnten hyperbolischen Paraboloides.

IV. Zusatz: Die Geraden G_1 und G_2 sind zwei Lagen der Erzeugenden einer windschiefen Fläche, die vom Ursprunge denselben Abstand haben.

Die Gleichung dieser Fläche wird sein

$$y = z\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad \text{oder} \quad y^2(a+x) = z^2(a-x)$$

Das hier behandelte hyperbolische Paraboloid unterscheidet sich von dem allgemeinen durch folgende Eigenschaften:

1. Sind an demselben zwei Erzeugende, die eine des ersten, die andere des zweiten Systemes, welche sämmtliche Erzeugenden des anderen Systemes rechtwinklig schneiden.

2. Sind die hyperbolischen Schnitte mit aufeinander senkrechten Asymptoten.

3. Hat jeder Punkt desselben von zwei bestimmten Geraden gleiche Abstände.

4. Sind die gleich weit von dem Scheitel geführten ebenen Schnitte congruent.

Das hier zur Sprache gekommene hyperbolische Paraboloid ist uns unter folgender Entstehungsweise bekannt: Eine Gerade bewegt sich längst zwei anderen, wobei sie stets senkrecht auf einer derselben steht.

Lehrsatz. Legt man durch den Halbirungspunkt des kürzesten Abstandes zweier Geraden eine Ebene zu beiden gleich geneigt, so ist die Verbindungslinie ihrer Durchschnittspunkte mit den ersteren Geraden gegen beide gleich geneigt.

Beweis. Es seien G_1 und G_2 die Geraden, deren Gleichungen, nach passender Wahl der rechtwinkligen Coordinaten, folgende Form annehmen

$$G_1 \begin{cases} y = -B_1 x \\ z = c_1 \end{cases} \qquad G_2 \begin{cases} y = B_1 x \\ z = 0 \end{cases}$$

und

$$E \ldots c_1 x + 2az - ac_1 = 0$$

ist die Gleichung einer Ebene μ, ν, ω, welche durch den Halbirungspunkt η des kürzesten Abstandes $0B$ hindurchgeht und zu G_1 und G_2 gleiche Neigung hat. Ihre Durchschnittspunkte M_1 und M_2 mit G_1 und G_2 werden die Coordinaten ergeben:

$$M_1 \begin{cases} x = -a \\ y = aB_1 \\ z = c_1 \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} x = a \\ y = aB_1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Die durch diese Punkte hindurchgehende Gerade G wird die Richtungscoefficienten $B = 0$ und $C = -\frac{c_1}{2a}$ haben.

Dann ist

$$\cos\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+B_1^2)(1+B^2+\left(\frac{c_1}{2a}\right)^2)}}$$

$$\cos\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+B_1^2)(1+B^2+\left(\frac{c_1}{2a}\right)^2)}}$$

$$\text{also} \quad \cos\omega_1 = \cos\omega_2$$

mithin sind auch numerisch gleich:

$$\angle\, \omega_1 = \omega_2$$

was zu beweisen war.

Wien, den 19. December 1869.

Franz Maly',
ord. Hörer am k. k. polytechn. Institute zu Wien

6.

Bemerkungen zur hypergeometrischen Reihe.

Kürzlich teilte ich Herrn Professor Rümker in Hamburg die folgende Relation mit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(\frac{1-(1-k^2)\sin^2\varphi}{k}\right)^{1-a}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(\frac{1-(1-k^2)\sin^2\varphi}{k}\right)^{a}}$$

welche ich bei Gelegenheit von Untersuchungen der Gaussischen hypergeometrischen Reihe als Nebenproduct fand. Eine andere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1+\alpha}{2}}} = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^\alpha\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

entsinne ich mich nicht, irgendwo gefunden zu haben.

Ich suchte die eigentlich von Lagrange herrührende, von Gauss aber weiter durchgeführte Untersuchung über die Grenze, gegen welche die arithmetischen und geometrischen Mittelreihen zweier Zahlen a, b convergiren, weiter auszudehnen und betrachtete die Gleichungen

$$3a_{n+1} = a_n + b_n + c_n$$
$$3b^2_{n+1} = a_n b_n + a_n c_n + b_n c_n$$
$$c^3_{n+1} = a_n b_n c_n$$

wo gleichfalls $a_\infty = b_\infty = c_\infty = M(a_0, b_0, c_0)$.

Besonders interessirte mich der Grenzfall

$$a_0 = 1; \quad b_0 = 1; \quad c_0 = w \text{ sehr klein;}$$

und ich fand als Grenze von $a_\infty = b_\infty = c_\infty$

$$(1) \qquad M(1, 1, w) = \left(\frac{A}{\log\frac{B}{w}}\right)^\lambda$$

wo A, B, λ constante sind und zwar wird

$$\lambda = 1 - \frac{\log(1+k)}{\log 3}$$

wenn k die Wurzel der Gleichung ist

$$k(1+k)^2 = 3$$

Der Wert von λ ist

$$\lambda = 0{,}4333\ 1485$$

Den log in (1) habe ich der Bequemlichkeit wegen briggisch genommen und dann die Werte von A und B näherungsweise erhalten

$$A = 0{,}395\ 1642$$
$$\log\text{brigg}\, B = 0{,}299\ 7049$$

Ich habe die Rechnung durchgeführt für sehr kleine w und fand z. B. direct

$$\text{für } w = \frac{1}{10^{81}}, \qquad M = 0{,}1678\,3257$$

$$\text{für } w = \frac{1}{10^{6561}}, \qquad M = 0{,}0148\,3609$$

Kiel, den 8. April 1874. **E. Meissel.**

7.

Neuer Beweis zu dem Satze T. 55. N. XXVIII. 2.

Werden vom Schwerpunkte eines Dreieckes zu den Ecken Gerade gezogen und die Höhenschnittpunkte der so entstandenen Dreiecke mit einander verbunden: so hat dieses Dreieck der Höhenschnittpunkte mit dem Urdreieck gleichen Flächeninhalt.

Ist O ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreieckes ABC und H_a der Höhenschnittpunkt des Dreieckes BOC, so ist:

$$OH_a = a \cot BOC$$

$$\triangle H_a O H_b = F \cot BOC \cot COA$$

$$\triangle H_a H_b H_c = F \Sigma \cot BOC \cot COA$$

Fällt nun O mit dem Schwerpunkt S zusammen, so ist:

$$\cot BSC = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{12F}$$

$$\Sigma \cot BSC \cot CSA = \frac{18 \Sigma a^2 b^2 - 9 \Sigma a^4}{144 F^2} = 1$$

Somit ist

$$\triangle H_a H_b H_c = F.$$

(Vgl. Archiv LV. S. 332.) **Emil Hain.**

Litterarischer Bericht

CCXXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VII. Roma 1874. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Das Juniheft enthält einen Brief von M. Th. H. Martin, Membre de l'Institut, aus Rennes an D. B. Boncompagni über die Epoche und den Autor des angeblichen 15ten Buchs der Elemente Euklids; ferner einen Auszug aus Kitâb al Mobârek von Abu'l Wafa al Djouelni, ausgeschrieben nach dem Ms. 1912 vom arabischen Supplement von der Pariser Bibliothèque Nationale, und zum erstenmal ins Französische übersetzt von Aristide Marre, Membre de la Société Asiatique in Paris; dann ein Publicationsverzeichniss. — Das Juliheft enthält einen Aufsatz von Cornelio de Simoni über das Leben und die Arbeiten des Genuensischen Mathematikers und Astronomen aus dem 14. Jahrhundert, Andalò di Negro, und anderer Mathematiker und Kosmographen in Genua; dann das Verzeichniss der Arbeiten des Andalò di Negro von B. Boncompagni. — Das Augustheft enthält eine Bemerkung des Ingenieurs Ferdinando Jacoli über 2 Schriften von Raffaele Gualterotti in Florenz bezüglich auf das Erscheinen eines neuen Sterns im Jahr 1604. Dann Mitteilung bisher ungedruckter Briefe des Verfassers; dann ein Publicationsverzeichniss. — Das Septemberheft enthält historische Notizen über die Kettenbrüche vom 13ten bis zum 17ten Jahrhundert, von Antonio Favaro.

H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Abriss der Arithmetik und Algebra. Von Dr. A. Täschner, Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu St. Maria-Magdalena in Breslau. Erster Theil: Die 7 algebraischen Operationen und die Gleichungen ersten Grades. Breslau 1874. Albert Clar. 61 S.

Wenn wir die Bezeichnung als Abriss im Sinne einer kurzen, alle entbehrliche Ausführlichkeit meidenden Darstellung nehmen dürfen, so hat die schon hierdurch motivirte Kürze auch manchen methodischen Vorzug zur Folge gehabt, indem sich in der Ausführung nur der Grundsatz betätigt, das sachlich Einfache auch formell einfach vorzutragen, um nicht den Anschein einer Schwierigkeit hervorzubringen, wo im Grunde keine vorhanden ist. Der Lehrgang ist ein rein arithmetischer; er beginnt mit der absoluten ganzen Zahl und leitet die Begriffe der negativen, gebrochenen und irrationalen Zahl aus den Operationen ab; die Vorzeichen sind Operationszeichen. In diesen Punkten ist das Kurze und Einfache zugleich das Correcte. Zum Teil aber ist die Kürze nichts weiter als Unvollständigkeit: notwendige Lehren sind geradezu vergessen worden. Es wird durchweg verschwiegen, dass Buchstaben auch negative, gebrochene und irrationale Zahlen bezeichnen können; in der ganzen Operationslehre vertreten sie nur ganze absolute Zahlen, $-a$ ist immer negativ, ein Bruch ist nie anders als in der Form $\frac{b}{a}$ geschrieben; bei den Gleichungen muss plötzlich eine Grösse, deren Form man nicht kennt, durch einen Buchstaben bezeichnet werden; ohne dass der Schüler etwas merkt, hat nun derselbe einen andern Sinn. Freilich würde es dem Verfasser etwas unbequem gewesen sein, auf die Complicationen der expliciten und impliciten Vorzeichen einzugehen. Er hat es, wie dies beim Unterricht nicht selten vorkommt, dem Schüler leicht gemacht, dasjenige nicht zu lernen, was er später braucht; und diesem ist gewöhnlich die Einbildung alles begriffen zu haben lieber, als ihm die Belehrung vielleicht gewesen sein würde. Schwerer ist es zu begreifen, wie die ganze Lehre von der Addition, Multiplication und Division der Brüche hat wegbleiben können. Neben diesem Mangel sind andere, damit in Beziehung stehende, die ungenügende Erklärung eines Bruchs, die einseitige Darlegung der algebraischen Division, u. s. w. kaum erwähnungswert. Da indes alles, was noch fehlt, blosse Ergänzung, nicht gerade Umarbeitung fordert, so war es möglich, der Leistung auch in vorliegender Gestalt eine billigende Beurteilung zuteil werden zu lassen.

H.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, k. Studienlehrer am Ludwigs-Gymnasium in München. München 1875. Theodor Ackermann. 162 S.

Das Buch ist ein Leitfaden für den Rechenunterricht; es ist nicht zum kleinsten Teil für wissenschaftliche Ausbildung eingerichtet, worauf wenigstens nach unserm Gebrauch das Wort Arithmetik hindeuten könnte; vielmehr verfolgt es in klarer und entschiedener Weise den ausschliesslichen Zweck des Verständnisses und der Uebung des bürgerlichen Rechnens. Nirgends strebt es die Allgemeinheit an, sondern gebraucht dieselbe nur, soweit sie wirklich die Deutlichkeit fördert. Wie in diesem Punkte, in welchem es das Mass der gewöhnlichen Rechenbücher überschreitet, giebt sich auch im ganzen eine höhere Auffassung der Aufgabe des Rechenunterrichts zu erkennen. Derselbe ist hier durch den sorgfältigen, exacten Ausdruck in allen Begriffserklärungen und Anordnungen mit der Wissenschaft in vollen Einklang gesetzt, was auf die Klarheit des Verständnisses vom besten Einfluss sein muss; es beteiligt sich demnach nicht an der oft gehörten Ansicht, welche bei Verzichtleistung auf wissenschaftlichen Zweck oft ungenauer Fassung um der Bequemlichkeit und Gewohnheit willen den Vorzug giebt. Einige leicht zu verbessernde Ausnahmen seien jedoch erwähnt. Die Subtraction und Division sind erst, wie es sehr zu billigen ist, als inverse Rechnungen erklärt, werden aber dann, statt inverse, indirecte Rechnungen genannt. Dies beruht auf einer Verwechselung: nicht die Rechnung, sondern die Erklärungsmethode ist indirect, und letzteres geht die Schüler nichts an. Ferner ist von Abkürzung der Decimalbrüche, sogar von unendlichen und periodischen Decimalbrüchen die Rede, ehe noch irgend etwas über annähernde Berechnung gesagt ist, ohne welche jenes alles offenbar keinen Sinn hat; erst später kommt eine beiläufige Bemerkung über Annäherung, als ob sie nicht notwendig dazu gehörte. Drittens ist erst die Lehre über gemeinsame Vielfache vorgetragen (wobei man freilich die Darlegung des Algorithmus vermisst); nachher wird aber bei Addition der Brüche kein Gebrauch davon gemacht; wie der Schüler verfahren soll, ist gar nicht angegeben. Zu diesen Ausnahmen incorrecter Abfassung soll nicht gezählt werden der Umstand, dass nicht nur in den Uebungsbeispielen, sondern auch sonst unzählige der Erklärung bedürftige Dinge bloss mit technischem Namen genannt sind; es bleibt dem Lehrer überlassen, das Nötige hinzuzufügen. Nur ist zu erwähnen, dass die Flächen- und Körperberechnung, wenn auch ohne Beweise, erläutert ist. H.

Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und technischen Lehr-

anstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königl. Gymnasium zu Münnerstadt. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. München 1874. Theodor Ackermann. 166 S.

Im Vergleich mit unzähligen Schulbüchern, welche die Mechanik teils in einem besondern Abschnitt, teils ausschliesslich behandeln, ist es eine Auszeichnung, dass man von dem vorliegenden sagen kann, dass es die Grundbegriffe der Mechanik in correcter Fassung giebt. Denn obwol in neuerer Zeit die meisten sich nicht mehr so dreist wie früher dem Tadel grober Unrichtigkeiten aussetzen, so lehnt sich doch gewöhnlich die Methode noch sehr an unklare vulgäre Vorstellungen an, während die Grundprincipien als accidentelle Sätze in Schatten gestellt werden. Das gegenwärtige Lehrbuch beginnt sogleich mit denjenigen Sätzen, welche die richtigen scheidenden Gesichtspunkte in voller Einfachheit enthüllen. Im übrigen ist es jedoch nicht frei von Fehlern. Im Beweise für das Parallelogramm der Kräfte verlegt der Verfasser wiederholt, im Widerspruch mit dem richtig aufgestellten Satze, den Angriff in Punkte ausserhalb der Richtungslinie. Der Beweis ist darum falsch, eine mögliche Berichtigung nicht wol abzusehen. Auch steht der Satz an der unrichtigen Stelle, nämlich bei den starren Systemen, mit denen er nichts zu tun hat. Unrichtig und irreleitend ausgedrückt ist die Behauptung (S. 2.), aus einer Kraft müsse immer als Wirkung eine geradlinige Bewegung erfolgen, „wenn nicht andere Kräfte zugleich tätig seien“ — was sich sofort dadurch widerlegt, dass die auf einen Punkt wirkenden Kräfte sich immer zu einer zusammensetzen. Hier war die correcte Fassung um so wichtiger wegen des vulgären Irrtums, dass die Wurf- und Centralbewegung mehr als eine Kraft erforderten. Unrichtig ist es ferner (S. 3.), dass die Statik den Fall der Ruhe untersuchte; doch folgt hier gleich nachher das richtige Wort. Ferner wird statisches Moment erklärt (S. 25.) in Bezug auf einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene, als wenn es 3 verschiedene Begriffe wären. Die beiden letztern sind nur überbestimmt. Geschwindigkeit ist nur als constante erklärt, gleich nachher aber bei Erklärung der Beschleunigung der Sinn der variabeln als bekannt vorausgesetzt. Soviel über die Fehler. Die Statik ist im wesentlichen theoretisch vollständig, die einfachen praktischen Uebertragungsmittel sind gleichfalls behandelt. Die Dynamik beschränkt sich auf diejenigen Fälle, welche sich mit Hülfe der Schulmathematik wirklich lösen lassen. Dass sie sich, wie angegeben wird, auf constante Beschleunigung beschränkte, trifft, unter andern beim Pendel, nicht zu. Die Aufgaben bestehen in numerischen Datis zu den nach jeder Seite hin aufzulösenden, im Lehrbuch enthaltenen Relationen.

H.

Sammlung der wichtigsten Sätze aus der Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten zusammengestellt von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am k. Gymnasium zu Bayreuth. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Bayreuth 1872. Heinrich Grau. 36 S.

Aufgaben aus der niedern Arithmetik. Zum Gebrauch in den untern Klassen höherer Lehranstalten bearbeitet von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am k. Gymnasium zu Bayreuth. Dritte, mit Rücksicht auf das neue Mass- und Münz-System umgearbeitete Auflage. Bayreuth 1874. Heinrich Grau. 123 S.

Beide Bücher sind Ergänzungen zu der, im 217. litt. Ber. S. 3. besprochenen, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra desselben Verfassers. Das erstere enthält diejenigen Sätze, welche durch die Aufgaben eingeübt werden sollen, einfach in Reihe gestellt. Das letztere soll für die niedern Classen der Gymnasien dieselbe Bestimmung haben, welche die genannte Aufgabensammlung für die höheren erfüllt. Es besteht aus 5 Abteilungen, welche einzeln behandeln unbenannte, einfach benannte, mehrfach benannte ganze Zahlen, unbenannte gemeine und Decimalbrüche. Die erste Abteilung übt besonders die Auflösung der Klammern. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Lehrbuch der Determinantentheorie für Studirende. Von Dr. Siegmund Günther, Privatdocent am kgl. Polytechnikum zu München. Erlangen 1875. Eduard Besold. 236 S.

Um die ausgesprochene Bestimmung des Buches für Studirende, eine Bezeichnung die im Grunde von jeder wissenschaftlichen Darlegung eines bekannten Themas gelten müsste, näher zu erläutern, so hat der Verfasser das Mögliche getan, das Selbststudium des Gegenstandes zu erleichtern und dadurch die Kenntniss der Theorie zu einer allgemeinen und schon in den ersten Semestern zu erreichenden zu machen. Die Anordnung ist eine sachlich systematische, unbeeinflusst durch den Deductionsconnex. Letzterer ist kein ausgedehnter, kunstvoll verwebter; vielmehr sind die Sätze zum grössten Teil durch directe Betrachtung bewiesen. Da Vollständigkeit in Aufstellung des Lehrstoffs nach gegenwärtigem Standpunkt ins Auge gefasst ist, da mithin das Vorzutragende historisch aus den successiven Entdeckungen zufloss, so lag es in der Natur der Sache, dass der organische Kern der Theorie eine Reihe einzelner Theoreme im Gefolge haben musste, die zur Zeit als zufällige Beigabe und ohne sichtliche Verbindung

auftreten. Der Verfasser hat es verstanden, durch die Menge des Accidentellen die Hauptsache nicht in Schatten stellen zu lassen, wozu vor allem die einfache, allgemeine, weitgreifende Schlussfähigkeit der Determinantenlehre gehört. Die Einteilung des Stoffes ist im ganzen gut gewählt und zur Uebersicht vortrefflich geeignet. Nach der Geschichte der Determinantenrechnung folgen zuerst 2 Capitel über allgemeine Eigenschaften der Determinaten und über Determinanten von besonderer Form. Zu den letztern gehören das Differenzenproduct, die Determinanten adjungirter Systeme, die symmetrischen, die orthosymmetrischen und die symmetralen Determinanten und die Halb-Determinanten. Die Sonderung der betreffenden Sätze von der allgemeinen Theorie, welche nicht in allen Bearbeitungen beobachtet worden ist, ist sehr zu billigen. Das folgende Capitel über kubische Determinanten ist kein Glied der Theorie, auch keine Anwendung, sondern bloss ein Anfang einer Erweiterung, und hätte demnach wol am Schluss des Ganzen stehen sollen. Das 5. Capitel über die Eliminationsprobleme schliesst sich der Sache nach an das 2te an, lässt sich sogar mit demselben methodisch unter dem Gesichtspunkt der Reciprocität auffassen. Aus der Theorie der Gleichungssysteme ergeben sich manche elegante Beweise für Determinantensätze, u. a. für die Multiplicaton und Potenzirung der Determinanten. Da jedoch eine vorzeitige Benutzung dieser Reciprocität dem Anfänger das Erlernen sehr erschweren würde, so war die Trennung der Capitel gewiss gerechtfertigt; jedenfalls war der geeignete Platz für die Gleichungen unmittelbar nach dem 2ten Capitel. Es folgen nun noch 3 Capitel, welche Anwendungen enthalten, nämlich auf Kettenbrüche, auf Geometrie, auf Transformation der Integrale (Functionsdeterminanten). Hierin musste Auswahl stattfinden, da das Bereich unbegrenzt ist. Namentlich ist von geometrischen Anwendungen nur eine kleine Anzahl aufgenommen. Das letzte Capitel handelt von den linearen Substitutionen. H.

In meinem „Lehrbuch der Determinantentheorie“ sind ausser den im Drucke angegebenen Unrichtigkeiten noch folgende zu verbessern:

S. 7. Z. 4 v. o. nach Zähler ergänze: und Nenner.
S. 8. Z. 11 v. o. st. §. 2 l. 3.
S. 12. Z. 12 v. u. l. permutirt.
S. 17. Z. 11 v. u. st. *abcd* l. *abdc*.
S. 42. Z. 11 v. o. st. Zahlen l. Zeilen.
S. 52. Z. 16 v. u. st. Weyrauch l. Weihrauch.
S. 89. Z. 4 v. u. ist Factor $(m-p)$ zu streichen.
S. 113. Z. 11 v. u. st. Axen l. Axen-Ebenen.

S. 118. Z. 12 v. o. muss es heissen: für sich m', die zweite m'', die dritte etc.

S. 123. Z. 3 v. u. st. $\frac{x}{y}$ l. $\frac{x}{z}$.

S. 153. Z. 17 v. o. st. $A_{12}x_2$ l. $A_{21}x_1$.

S. 153. Z. 21 v. o. st. $A_{n-1 1}x_n$ l. $A_{n-1 1}x_1$.

S. 196. Z. 6 v. o. fehlt vor b die Klammer.

S. 210. Z. 3 v. o. st. p^2+q^2+1 l. $(p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

S. 214. Z. 8 v. o. st. df l. d^2f.

Durch diese Verbesserungen wird hoffentlich annähernd vollständige Correctheit hergestellt sein. S. Günther.

Ueber Kettenbrüche höherer Ordnung. Von E. Fürstenau. Programm des kgl. Realgymnasiums zu Wiesbaden 1872.

Der Verfasser, welcher sich in der mathematischen Welt durch seine schöne Methode zur Auflösung literaler Gleichungen höherer Grade bereits auf das Vorteilhafteste bekannt gemacht hat, liefert hier eine interessante Abhandlung über eigentümliche neue Gebilde der Analysis, welche er mit dem Namen der „höheren Kettenbrüche" belegt. An sich ist dieser Titel nicht ganz entsprechend, denn offenbar könnte man auf diese Bezeichnung auch gewisse andre Formen Anspruch machen lassen. So kann man mit vollem Rechte sagen: die Methode, mit welcher Reidt (Schlömilch's Zeitschrift, 17. Jahrg.) den irreduciblen Fall löst und die sich leicht auch auf andre trinomische Gleichungen ausdehnen liesse, bedient sich höherer Kettenbrüche; es ist nach ihm, für

$$x^3 = px + q,$$

bekanntlich

$$x = \sqrt{q + \cfrac{p}{\sqrt{q + \cfrac{p}{\sqrt{q + \cdots}}}}}$$

Auch Stern hat in seiner Schrift „Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung" diese Formen in Betracht gezogen. Andrerseits könnte man, entsprechend der independenten Darstellung eines Kettenbruches durch Determinanten, den Quotienten zweier nach einem analogen Gesetze gebildeten cubischen Determinanten herstellen und darunter einen Kettenbruch von höherer Ordnung (besser wohl gesagt: von höherem Range) verstehen. Als Beispiel eines solchen „cubischen" Kettenbruches, welcher bisher noch gar nicht untersucht worden zu sein scheint, möge nachstehender Quotient dienen:

$$M\left\{\begin{array}{ccccc}
a_{222} & a_{223} & 0 & & \\
 & a_{232} & 0 & 0 & \\
 & & 0 & 0 & 0 \\
a_{322} & 0 & 0 & & \\
 & 0 & a_{333} & a_{334} & \\
 & & 0 & a_{343} & 0 \\
0 & 0 & 0 & & \\
 & 0 & a_{433} & 0 & \\
 & & 0 & 0 & a_{444}
\end{array}\right. : \left\{\begin{array}{ccccccc}
a_{111} & a_{112} & 0 & 0 & & & \\
 & a_{121} & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{211} & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & a_{222} & a_{223} & 0 & & \\
 & & 0 & a_{232} & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & a_{322} & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & a_{333} & a_{334} & \\
 & & & 0 & 0 & a_{343} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & a_{433} & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & a_{444}
\end{array}\right.$$

Schliesslich könnte man auch versucht sein, sich unter Kettenbrüchen höherer Ordnung jene eigentümlichen Bildungen zu denken, welche Jacobi als „kettenbruchähnliche Algorithmen" in die Analysis eingeführt hat. Hiermit sind wir denn auch auf das eigentliche Thema des Herrn Fürstenau gekommen; seine Untersuchung knüpft unmittelbar an die erwähnte Arbeit Jacobi's an, wie sie aus seinen Papieren im 69. Bande des Borchardt'schen Journales mitgeteilt wurde.

Jacobi's Grundgedanke in dieser posthumen Schrift ist bekanntlich kein andrer, als eine Erweiterung einer Reihe von Euler zuerst gefundener Sätze zu geben. Derselbe hatte bemerkt und in mehreren Aufsätzen der Acta Petropolitana nachgewiesen, dass ein System trinomischer recurrirender Gleichungen mit den Kettenbrüchen auf's innigste verwandt sei, insoferne jeder Quotient zweier aufeinanderfolgender Unbekannter sich unmittelbar als solcher schreiben lässt. Es lag nun nahe, die Fragestellung auf polynomische Gleichungen auszudehnen und, als ersten Schritt hierzu, zu untersuchen, wie sich die Sache gestaltet, wenn jede neue Unbekannte linear aus drei, statt wie bisher aus zwei, vorhergehenden zusammengesetzt ist. Jacobi hat diese Frage eingehend erörtert und von dem dabei sich ergebenden Analogon der gewöhnlichen Kettenbrüche eine Reihe interessanter Eigenschaften aufgedeckt, er hat jedoch auf eine explicite Darstellung dieses Analogons verzichtet. Dies und der Umstand, dass sich der grosse Meister des Determinantencalculs dieses gerade in unserem Falle so überaus förderlichen Hülfsmittels gänzlich entschlug, machen es uns wahrscheinlich, dass derselbe seine Abhandlung, soweit sie uns jetzt vorliegt, noch durchaus nicht für endgültig abgeschlossen ansah.

Der Ideengang des Verfassers konnte mit Rücksicht auf das Gesagte ein dreifacher sein. Es konnte die Untersuchung Jacobi's in gleicher Weise, nur mit Hülfe der Determinanten, nochmals geführt werden; man konnte aber auch, ganz unabhängig hiervon, allgemein den Quotienten solcher Determinanten hinstellen, welche mit Ausnahme einer willkürlichen Anzahl von einer Diagonale parallel laufenden Serien durch Nullen gebildet sind, und konnte dann zusehen, in welchem Connex diese „Kettenbruchdeterminanten im allgemeinen Sinn" mit Jacobi's Algorithmen stehen. Und drittens war es möglich, den Begriff des gewöhnlichen Kettenbruchs dadurch zu verallgemeinern, dass man jeden einzelnen Teilnenner und Teilzähler wieder als Kettenbruch ansah und nun die Beziehungen zu den erwähnten Determinanten-Quotienten und den kettenbruchähnlichen Algorithmen aufsuchte. Dieser dritte Weg, welcher offenbar zugleich der instructivste ist, wurde von Herrn Fürstenau eingeschlagen.

Durch wirkliche Ausführung der in der folgenden Doppelreihe angedeuteten Substitutionen

$$y_0 = a_0 + \frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 = a_1 + \frac{x_2}{y_2}, \quad y_2 = a_2 + \frac{x_3}{y_3}, \quad y_3 = a_3 + \frac{x_4}{y_4} \ \ldots$$

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{y_1}, \quad x_1 = b_1 + \frac{1}{y_2}, \quad x_2 = b_2 + \frac{1}{y_3}, \quad x_3 = b_3 + \frac{1}{y_4} \ \ldots$$

findet man

$$y_0 = a_0 + \cfrac{b_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \ldots}{a_5 + \ldots}}{a_4 + \cfrac{b_5 + \ldots}{a_5 + \ldots}}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cfrac{1 + \ldots}{a_5 + \ldots}}{a_4 + \cfrac{b_5 + \ldots}{a_5 + \ldots}}}}}{a_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cfrac{1 + \ldots}{a_5 + \ldots}}{a_4 + \cfrac{b_5 + \ldots}{a_5 + \ldots}}}}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{b_5 + \ldots}{a_5 + \ldots}}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ldots}}{a_4 + \cfrac{b_5 + \ldots}{a_5 + \ldots}}}}}$$

und, wenn man den Nenner des durch den stark ausgezogenen Strich charakterisirten Bruches mit N bezeichnet,

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{N}.$$

Unter einem ersten, zweiten . . . $p$ten Näherungswert wird man die Gesammtheit alles desjenigen zu verstehen haben, was durch einen in der angegebenen Weise von der Linken zur Rechten gezählten ersten, zweiten . . . $p$ten Verticalstrich abgeschnitten wird, so dass für die Grösse y_0 sich die successiven Näherungswerte

$$a_0, \quad a_0 + \frac{b_1}{a_1}, \quad a_0 + \frac{b_1 + \frac{1}{a_2}}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}}, \quad a_0 + \frac{b_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}}{a_1 + \frac{b_2 + \frac{1}{a_3}}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}}$$

ergeben, und entsprechende Ausdrücke auch für x. Verwandelt man diese Näherungswerte in gewöhnliche (unechte) Brüche, so ergeben sich für x_0 und y_0 gleiche Näherungsnenner, so dass man allgemein die $p$ten Näherungswerte von x_0 und y_0 gleich

$$\frac{X_p}{N_p}, \quad \frac{Y_p}{N_p}$$

setzen kann. Für diese drei Ausdrücke gilt alsdann das Bildungsgesetz:

$$(X, Y, N)_{p+1} = a_{p+1}(X, Y, N)_p + b_{p+1}(X, Y, N)_{p-1} + (X, Y, N)_{p-2},$$

das heisst, jeder dieser Ausdrücke ist linear aus den drei unmittelbar vorhergehenden derselben Art zusammengesetzt.

Die so entstandenen recurrirenden Gleichungen, welche ersichtlich mit denen, von welchen Jacobi ausgeht, vollkommen identisch sind, werden nun mit Hülfe der Determinanten aufgelöst, und es finden sich für X, Y, N independente, den gewöhnlichen Kettenbruchdeterminanten entsprechende Ausdrücke, z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & b_3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & b_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{p-2} & b_{p-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{p-1} & b_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_p \end{vmatrix} = N_p.$$

Dem bekannten Fundamentalsatz der gewöhnlichen Kettenbrüche, dem zufolge, wenn $\frac{P_p}{Q_p}$ der $p$te Näherungsbruch eines solchen ist, die Relation

$$\begin{vmatrix} Q_{p+1} & Q_p \\ P_{p+1} & P_p \end{vmatrix} = \pm 1$$

stattfindet, entspricht hier die Identität

$$\begin{vmatrix} Y_{p+1} & Y_p & Y_{p-1} \\ X_{p+1} & X_p & X_{p-1} \\ N_{p+1} & N_p & N_{p-1} \end{vmatrix} = 1.$$

Bis hierher hat sich Herr Fürstenau ausschliesslich mit den Kettenbrüchen der zweiten Ordnung beschäftigt; nunmehr fasst er das Problem in erweitertem Sinne auf. Stellen wir die von ihm gewonnenen Resultate übersichtlich zusammen, so können wir sagen:

Suchen wir ganz allgemein n Grössen $x_1, x_2 \dots x_n$ als Brüche der Form

$$x_1 = \frac{X^{(1)}}{N}, \quad x_2 = \frac{X^{(2)}}{N} \dots x_n = \frac{X^{(n)}}{N}$$

zu bestimmen, so kann jeder solche Bruch als Kettenbruch der $(n-1)$ten Ordnung geschrieben werden. Die $p$ten Näherungswerte dieser Kettenbrüche werden die Formen

$$\frac{X_p^{(1)}}{N_p}, \quad \frac{X_p^{(2)}}{N_p} \quad \dots \quad \frac{X_p^{(n)}}{N_p}.$$

besitzen, und es wird, wenn $a_1^{(1)} \dots a_1^{(n+1)}$, $a_2^{(1)} \dots a_2^{(n+1)}$ $\dots a_{n+1}^{(1)} \dots a_{n+1}^{(n+1)}$ die in den Kettenbruch eingegangenen Grössen sind, ganz allgemein

$$\begin{aligned} X_p^{(q)} &= a_1^{(p)} X_{p-1}^{(q)} + a_2^{(p)} X_{p-2}^{(q)} + \dots + a_{n+1}^{(p)} X_{p-n-1}^{(q)} \\ N_p &= a_1^{(p)} N_{p-1} + a_2^{(p)} N_{p-2} + \dots + a_{n+1}^{(p)} N_{p-n-1} \end{aligned}$$

sein. Die Grössen X und N werden durch die stets existirende Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_p^{(1)} & X_{p-1}^{(1)} & X_{p-2}^{(1)} & \dots & X_{p-n-1}^{(1)} \\ X_p^{(2)} & X_{p-1}^{(2)} & X_{p-2}^{(2)} & \dots & X_{p-n-1}^{(2)} \\ X_p^{(3)} & X_{p-1}^{(3)} & X_{p-2}^{(3)} & \dots & X_{p-n-1}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_p^{(n)} & X_{p-1}^{(n)} & X_{p-2}^{(n)} & \dots & X_{p-n-1}^{(n)} \\ N_p & N_{p-1} & N_{p-2} & \dots & N_{p-n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{p(n-1)}$$

in Beziehung zu einander gesetzt.

Soweit ist allerdings unser Verfasser nicht völlig gegangen; es war jedoch leicht, aus seinen Betrachtungen dieses elegante Resultat inductorisch zu erhalten.

Im zweiten Paragraph wird gezeigt, dass und wie die reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen vom $n$ten Grade in periodische Kettenbrüche von $n$ter Ordnung verwandelt werden können. Im Anschluss hieran wird dann in § 3. die für die praktische Anwendung wichtige Frage discutirt, wie das Mass der Annäherung zwischen den einzelnen Näherungsbrüchen und dem wahren Werte zu bestimmen sei. In der Weise, wie dies bei den gewöhnlichen Kettenbrüchen geschieht, ist es im allgemeinen Falle nicht möglich; der Verfasser weiss jedoch durch eine elegante Determinantenbetrachtung auch hier zum Ziele zu gelangen, indem er in § 4. zuerst vorbereitend die Kettenbrüche der zweiten und im nächsten diejenigen von noch höherer Ordnung behandelt. Der Hauptpunkt, auf welchen es hierbei ankam, nämlich die Einschränkung des wahren Wertes zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Näherungswerten, hätte ungleich kürzer erledigt werden können, wenn Herr Fürstenau einen vom Ref. aufgestellten Lehrsatz zu Grunde gelegt hätte (diese Zeitschrift, 55. Teil. S. 397.). Aus demselben geht nämlich hervor, dass unter einer gewissen Bedingung jeder Determinanten-Quotient einem gewöhnlichen Kettenbruche nicht bloss gleich, sondern auch äquivalent sei, wenn wir dieses Wort in dem von Seidel, allerdings bei einer andren Gelegenheit, eingeführten Sinne gebrauchen. Diese Bedingung ist aber bei den einen höheren Kettenbruch repräsentirenden Determinanten-Quotienten von selbst gegeben, und es ergiebt sich sofort die angedeutete Beziehung, wie wir an einem andren Orte (Math. Annalen, 7. Band. S. 267.) ausführlicher dargetan haben.

Die hier charakterisirten Betrachtungen über die Periodicität der höheren Kettenbrüche — beiläufig bemerkt, finden durch dieselben auch die von Bachmann in Borchardt's Journal angestellten Untersuchungen ihren Abschluss — scheinen uns auch noch eine weitere Frage zu provociren, welche erschöpfend zu beantworten wohl niemand so geeignet sein dürfte, wie der Herr Verfasser vorliegender Abhandlung. Für die Wurzeln quadratischer Gleichungen existirt bekanntlich eine doppelte Kettenbruchentwickelung, die von Lagrange entdeckte der Form

$$\sqrt{M} = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\sqrt{M} + \alpha_1}$$

und die bereits aus griechischer Zeit herstammende

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\dots$$

Bei der ersteren ist das Fortschreitungsgesetz ein complicirteres, hingegen sind alle Teilzähler = 1, bei der zweiten ist ersteres so einfach wie möglich, der Kettenbruch selbst aber besitzt nicht mehr die reducirte Form. Offenbar besteht eine Doppel-Entwickelung auch für unsere Algorithmen. Die vom Verfasser angewandte Methode führt ganz allgemein auf eine dem ersten Fall entsprechende Form, auf die zweite würde man hingeleitet werden, wenn man die (kleinste reelle) Wurzel einer Gleichung $n$ten Grades nach der von Herrn Fürstenau selbst in seiner bekannten Schrift „Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen“ gegebenen Vorschrift als Quotienten zweier unendlicher orthosymmetrischer Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_{n-1} & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & . & a_{n-1} & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & a_0 & a_1 & . & . & . & . & . & . & a_{n-1} & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

ausdrücken würde. Es würde hierzu bloss erforderlich sein, sämmtliche in den Entwickelungsschematen auftretenden Einheiten durch willkürliche Grössen zu ersetzen. Möchte es dem Herrn Verfasser gefallen, in diesem Sinne seine Leistung zu ergänzen und den angedeuteten Zusammenhang zwischen seiner früheren Methode und den kettenbruchähnlichen Algorithmen in's Licht zu setzen.

§ 5. bringt eine Reihe instructiver Beispiele zur Erläuterung der vorgetragenen Lehren. Dabei wollen wir nicht unterlassen zu erwähnen, dass nun gewisse Methoden eine neue Seite darbieten, welche man vorgeschlagen hat, um höhere Irrationale mit Hülfe gewöhnlicher Kettenbrüche näherungsweise berechnen zu können. Führt man diese Berechnung durch (vergl. hierüber beispielsweise die Aufsätze von Seeling und Grebe im 8. und 10. Bande von Grunert's Archiv) und verwandelt den betreffenden höheren Kettenbruch vermittelst der vom Ref. mehrfach angewandten Zusammenschiebung ebenfalls in einen gewöhnlichen, so besitzt man eine gute Controle zur Sicherstellung beider Berechnungsweisen.

Vielleicht ist eine Entschuldigung nötig, dass sich das Referat im Vorigen hier und da nicht in strengen Grenzen gehalten, vielmehr zu einem kleinen Commentar ausgebildet hat. Die äusserst concise Darstellung des Verfassers wird dies entschuldigen, wie denn auch seine vorhin erwähnte Erstlingsschrift von Baltzer im 6. Bande der

Schlömilch'schen Zeitschrift weniger recensirt als vielmehr paraphrasirt wurde. Der Zweck dieser Zeilen ist erreicht, wenn durch dieselben zur Lecture der Fürstenau'schen Schrift angeregt wird; insbesondere ist diese all denjenigen Freunden der Analysis zu empfehlen, welche nicht allein geistreiche Reflexionen und Methoden, sondern auch Resultate lieben und in dieser Tendenz auch mühsame Rechnungen nicht a priori verabscheuen.

München. S. Günther.

Démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. Par M. P. Mansion, Professeur à l'Université de Gand. Bruxelles 1874. F. Hayez. 16 S.

Die vorliegende Abhandlung, ein Auszug aus den *Bullétins* de l'Académie de Belgique, t. 38. n⁰ 11., gibt zwei Beweise für den Satz, dass sich jede lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung für die Function y von x, ohne von y freien Term, auf die Form

$$(D-a_1)(D-a_2)\ldots(D-a_n)y=0$$

bringen lässt, wo D die Differentiation nach x, und $a_1, a_2, \ldots a_n$ Functionen von x bezeichnen. Zu beiden Beweisen verwendet der Verfasser eine Hülfsgleichung, linear $(n-1)$ter Ordnung, nur in verschiedener Form entwickelt, welche eine beliebige der gesuchten Functionen a bestimmt, wenn man die linke Seite der gegebenen Gleichung erst in der Form

$$\Sigma B_k D^k (D-a) y$$

darstellt. Diese Hülfsgleichung wird nach verschiedenen Methoden integrirt, und a durch das vollständige Integral der Urgleichung ausgedrückt. H.

Éléments de calcul approximatif. Par Charles Ruchonnet (de Lausanne). Seconde édition augmentée. 1874. Paris, Gauthier-Villars. Lausanne, Georges Bridel. Zurich, Orell Fussli e. C. 65 S.

Das Buch behandelt die Bestimmung des grössten möglichen Fehlers im Resultat der gewöhnlichsten abgekürzten Decimalzahlrechnungen, der Addition, Multiplication, Potenzirung, Division, Quadrat- und Kubikwurzelausziehung. Es enthält weder Neues, noch empfiehlt sich die Darstellung durch einfache Gesichtspunkte und exactes Zuwerkegehen; im Gegenteil werden Dinge, die eine geringe Ueberlegung von selbst ergiebt, durch weitläufige Herleitungen ver-

dunkelt. Ueberdies lässt der Verfasser ganz ausser Acht, dass eine abgekürzte Decimalzahl nur um die halbe Einheit der letzten Ziffer vom genauen Werte differiren darf; denn er nennt stets sowol die nächst kleinere als nächst grössere Zahl die auf soviel Ziffern genaue. Auch die Schlussbemerkung über allgemeine Functionen enthält nur Bekanntes. H.

Vermischte Schriften. Zeitschriften.

Nouvelle correspondance mathématique publicé par Eugène Catalan, ancien élève de l'école polytechnique, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liège, etc. et Paul Mansion, Docteur spécial en sciences mathématiques, Professeur à l'université de Gand. Mons 1874. Hector Manceaux.

Dieses Journal ist Mitte vorigen Jahres gegründet worden mit der Bestimmung, an die Stelle der im Jahr 1825 von Quetelet gegründeten Correspondance mathématique et physique zu treten, welches seit 1839 nicht mehr besteht. Es ist als ein Mangel empfunden worden, dass seitdem in Belgien kein Blatt existirte, welches der Verbreitung mathematischer Kenntnisse gewidmet wäre, da für Mathematik überhaupt nur die Bulletins und Mémoires der Akademie, diese aber nur für wissenschaftliche Originalarbeiten offen waren. Das gegenwärtige Journal soll nun vornehmlich für Zwecke des Unterrichts tätig sein. Es publicirt 1) Originalartikel über Methoden, 2) Lösungen ausgewählter Aufgaben, 3) Analysen, Auszüge, Berichte, und Uebersetzungen von Abhandlungen oder Werken. In Betreff der elementären Artikel soll der Grundsatz aufrecht erhalten werden, dass die Methode einen wesentlichen Fortschritt enthalten muss, Wiederholungen mit gleichgültiger Abänderung nicht gestattet sind. Unter Aufstellung obiger Bedingungen laden die Herausgeber zur Einsendung von Beiträgen ein. Das Journal soll vorläufig alle 2 Monate in Lieferungen zu 32 bis 48 Seiten erscheinen. Man abonnirt auf 6 Lief. für 7 fr. 50. Aus dem Inhalt der bis jetzt erschienenen 3 Lieferungen ist zu ersehen, dass die angekündigten Auszüge nur je einen besondern kurzen Artikel ausmachen. Reichhaltiger sind die Aufgaben und deren Lösungen, welche eine Reihe von Artikeln umfassen. Den grössten Teil aber nehmen die Aufsätze über analytische Geometrie, bestimmte Integrale und andere Zweige der höheren Mathematik ein, in Bezug auf welche kein Unterschied gegen andere

mathematische Journale bemerkbar ist. Den Schluss bilden zwei Artikel 1) die Correspondenz, d. i. Fragen der Einsender beantwortet von der Redaction, 2) die Bibliographie, d. i. Titel mit Inhaltsangabe einzelner Werke, nicht Liste der gesammten Litteratur.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Jahrbuch über die Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 4. Bd. J. 1872. 3. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 3 Mk. 60 Pf.

Suter, H., Gesch. d. mathemat. Wiss. 2. Thl. Vom Anfange d. 17. bis Ende d. 18. Jahrh. 1. Hälfte. 8. Zürich, Orell, Füssli & Co. 7 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., methodisch geordnete Aufgabensammlg., mehr als 800 Aufg. enth., üb. alle Theile der Elementar-Mathematik. 4. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Canitz, F. W., Katechismus d. niederen Arithmetik. 4. Hft. 8. Bautzen, Rühl. 80 Pf.

Herrmann, G., d. graph. Einmaleins od. d. Rechentafel e. Ersatz f. d. Rechenschieber. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk. 20 Pf.

Holfert, H. F., geometr. Aufgaben. II. Stereometrie. 2. Afl. 8. Dresden, Huhle. 90 Pf.

Ott, C. v., fünfstell. Logarithmen-Tafeln. 8. Prag, Calve. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Schrön's, L., Logarithmen-Taf. I. u. II. Siebenstellige gemeine Logarithmen d. Zahlen 1 bis 108000 u. d. Sinus, Cosinus, Tangenten u. Cotangenten aller Winkel d. Quadranten von 10 zu 10 Secunden. 14. Afl. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 20 Pf.

— dass. Taf. III. Interpolationstafel zur Berechng. d. Proportionaltheile. 14. Afl. 8. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.

Schütze, F., stufenweise geordnete Sammlg. algebr. Aufg. m. elementaren Lösgn. 8. Ohrdruff, Stadermann jr. 1 Mk.

Steck, F. N., & J. Bielmayer, Resultate f. d. arithmet. Aufgaben. 8. Kempten, Kösel. 50 Pf.

Studnička, E. J., kapesní logarithm. tabulky. 2. Vyd. 8. Prag, Calve. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Vega's logarithmisch-trigonometr. Handb. 59. Afl. 8. Berlin, Weidmann. 4 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, W., Lehrbuch d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 2. Thl. 8. Neu-Ruppin, Petrenz. 1 Mk. 70 Pf.

Deter, C. G. J., Leitf. f. d. Unterr. in d. allg. Arithmetik u. Algebra. 8. Berlin, Weber. 1 Mk. 60 Pf.

Lorberg, H., Leitf. f. d. Unterr. in d. Elementen d. Algebra. 2. Afl. 8. Strassburg, Astmann. 80 Pf.

Pfenninger, A., Lehrb. d. Arithmetik u. Algebra. 2. Thl. Allg. Arithmetik u. Algebra. 1. Hft. Die Elemente. 8. Zürich, Schulthess. 2 Mk.

Schmidt, J. P., d. Elementar-Arithmetik u. deren Anwendung. 3. Afl. 8. Trier, Lintz. 2 Mk. 50 Pf.

Smolík, J., Algebra pro střední školy. 2. Vyd. 8. Prag, Kober. 3 Mk.

Temme, A. J., Leitf. d. Algebra f. Gymn. 2. Afl. 8. Paderborn, Schöningh. 1 Mk.

Tödter, H., Anfangsgründe d. Arithmetik u. Algebra f. d. oberen Klassen d. Volks- u. Mittelschulen. 1. Thl. 8. Stade, Schaumburg. 90 Pf.

Zirndorfer, H., Leitf. bei d. ersten Unt. in d. Algebra. 3. Afl. 8. Frankfurt a/M., Jäger. Geb. 1 Mk. 40 Pf.

Geometrie.

Battig, G., Leitf. f. d. Unterr. in d. Raumlehre. 4. Afl. 8. Breslau, Morgenstern. 1 Mk. 20 Pf.

Brockmann, F. J., Lehrb. d. elementaren Geometrie. 2. Thl. Die Stereometrie. 8. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Herrmann, F., Katechismus d. Raumberechnung. 2. Afl. 8. Leipzig, Weber. 1 Mk. 20 Pf.

Jarolímek, C., deskriptivní geometrie pro vyšší školy realné. Čast 1. 8. Prag, Grégr & D. 2 Mk. 60 Pf.

Pfaff, W., d. Curven d. ebenen Kegelschnitte u. ihre Projectionen. 4. Cassel, Freyschmidt. 12 Mk.

Pickel, A., die Geometrie d. Volksschule. Asg. I. f. Lehrer u. Seminaristen. 2. Afl. 8. Bielefeld, Bacmeister. 1 Mk. 20 Pf.

— dass. Asg. II. f. Schüler. 8. Ebd. 40 Pf.

Rumpelt, Elemente d. Planimetrie. 8. Breslau, Gosohorsky. 2 Mk.

Spitz, C., Lehrb. d. ebenen Geometrie. 6. Afl. 8. Leipzig, C. F. Winter. 2 Mk. 80 Pf.

— dass. Anhang. 6. Afl. 8. Ebd. 1 Mk. 40 Pf.

— Lehrb. d. Stereometrie. 4. Afl. 8. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.

— dass. Anhang. 4. Afl. 8. Ebd. 60 Pf.

Staudigl, R., d. axonometrische u. schiefe Projection. (Parallel-Perspective). 8. Wien, Seidel & S. 4 Mk.

Trigonometrie.

Spitz, C., Lehrb. d. sphärischen Trigonometrie. 2. Afl. 8. Leipzig, C. F. Winter. 3 Mk. 50 Pf.

Vymazal, F., erster Unterricht in d. Trigonometrie u. d. logarithm. Rechng. 8. Brünn, Karafiat. 1 Mk. 50 Pf.

Geodäsie und practische Geometrie.

Liese, A., angewandte Elementar-Mathematik. 1. Thl. Geometrie. 8. Berlin, W. Schultze. 3 Mk.

Rüdgisch, R. v., Instrumente u. Operationen d. niederen Vermessungskunst. 2. Abth. 8. Cassel, Kay. 3 Mk. 50 Pf.

Schlieben, W. E. A. v., vollst. Hand- u. Lehrb. d. gesammten Feldmesskunst. 7. Afl. 8. Quedlinburg, Ernst. 7 Mk.

Optik.

Hermann, L., üb. schiefen Durchgang v. Strahlenbündeln durch Linsen u. üb. e. darauf bezügl. Eigenschaft d. Krystall-Linse. 4. Zürich, Orell, Füssli & Co. 1 Mk. 50 Pf.

Astronomie und Meteorologie.

Oerter, mittlere, f. 1875. 0 v. 539 Sternen u. scheinbaren Oerter f. d. J. 1875 v. 529 Sternen d. Verzeichnisses I. u. II., welches nach d. Vierteljahrsschrift d. Astronom. Ges. f. d. Beobachtung der Sterne der nördl. Halbkugel bis zur 9. Grösse als Grundlage dienen soll. 8. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Schorr, F., d. Venusmond u. d. Unters. üb. d. früheren Beobachtgn. dieses Mondes. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 5 Mk.

Sirius. Hrsg. v. R. Falb. 8. Bd. J. 1875. 1. Hft. 8. Graz, Cieslar. prcplt. 8 Mk.

Stürmer, C. M., Sonnentafeln nach Le Verrier's Elementen d. Sonnenbahn berechnet. 4. Würzburg, Staudinger. 4 Mk.

Nautik.

Bremiker, C., naut. Jahrb. oder vollst. Ephemeriden u. Tafeln f. d. Jahr 1877 z. Bestimmg. d. Länge, Breite u. Zeit zur See, nach astronom. Beobacht. 8. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Bachmann, O., Leitf. f. d. ersten Unterr. in d. Physik. 8. Nördlingen, Beck. 80 Pf.

Menzel, R., Wandtaf. f. d. physikal. Unt. 3. u. 4. Lfg. Fol. Breslau, Morgenstern. à 3 Mk.

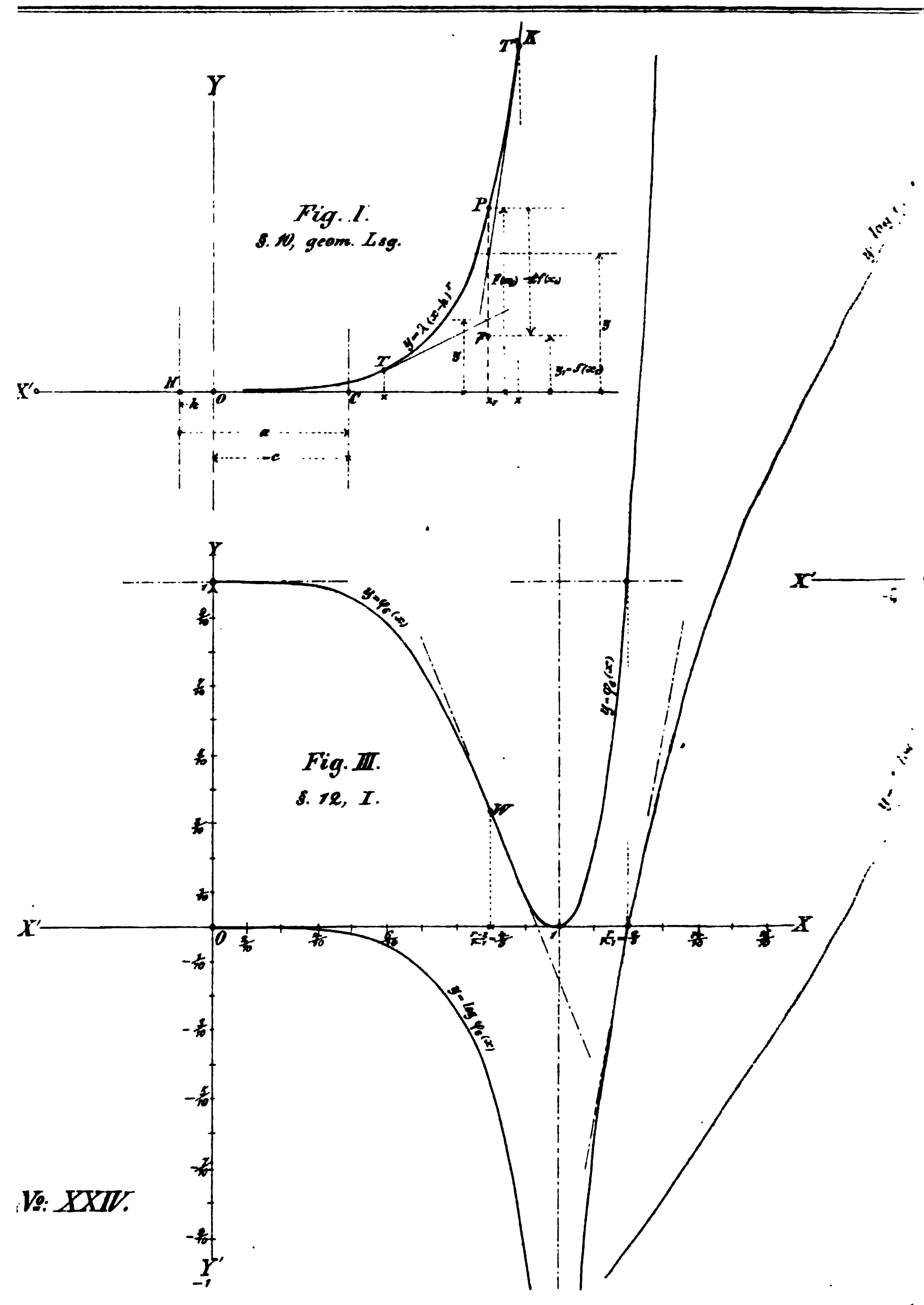
Vermischte Schriften.

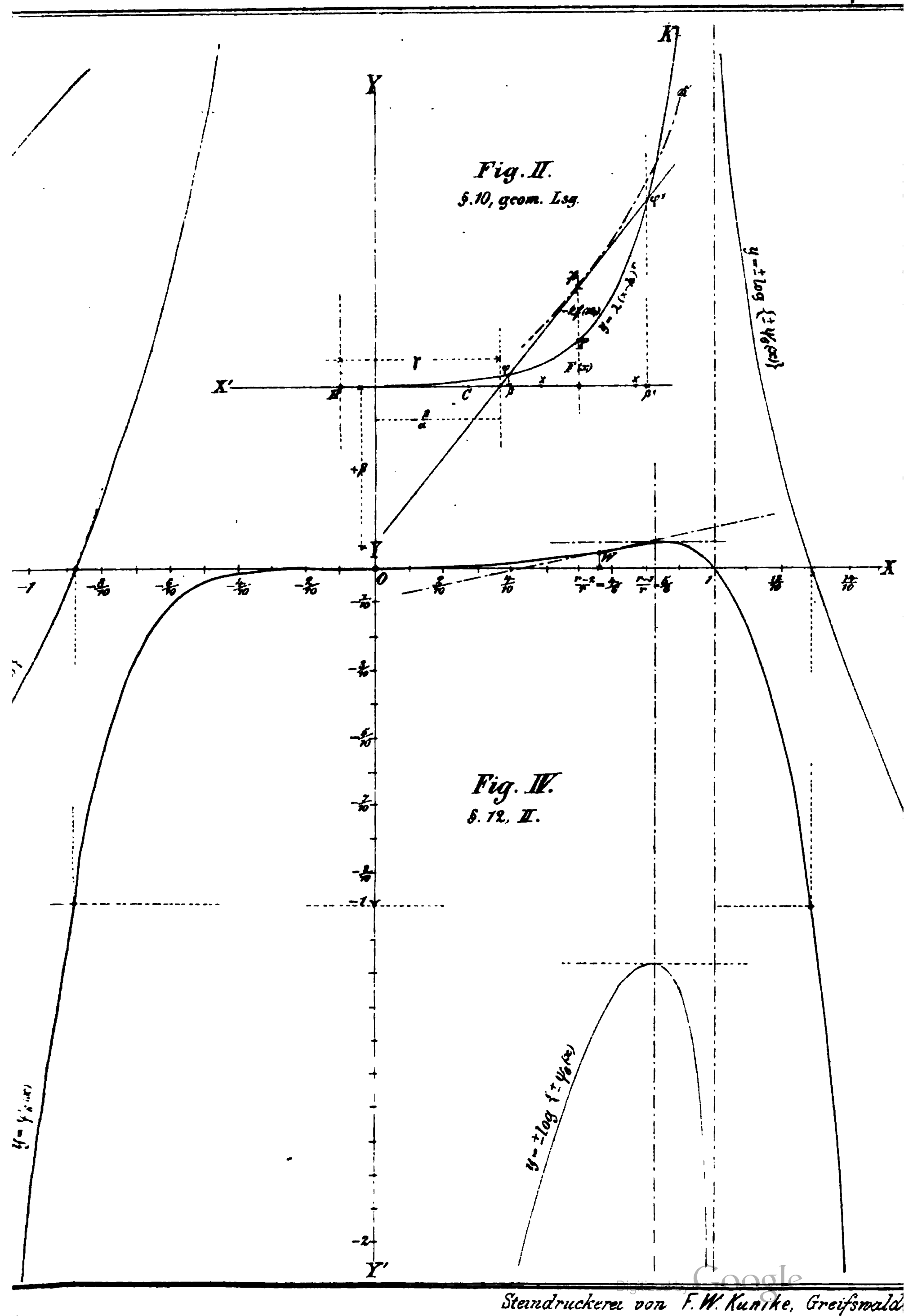
Archiv mathemat. a fysiky. Red.: E. Weyr. So. 1. Cislo 1. 8. Prag, Grégr & D. prcplt. 10 Mk.

Berichte üb. d. Verhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1874. 1. 2. 8. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

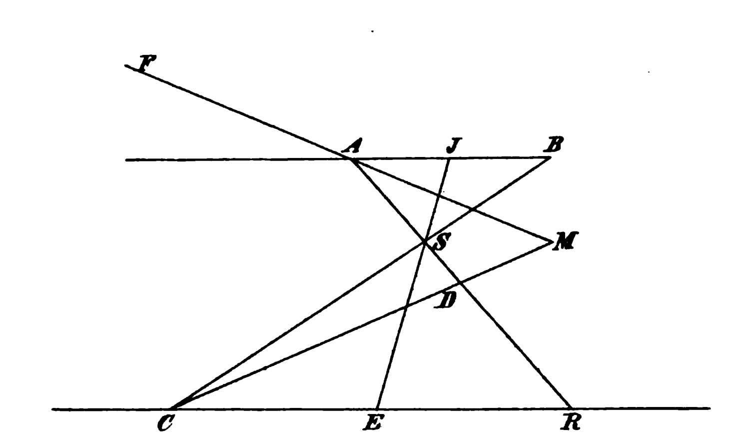
Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. W. Borchardt. 80. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. 4. Berlin, G. Reimer. prcplt. 12 Mk.

Sitzungsberichte der mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akad. d. Wissensch. zu München. 1874. 3. Hft. 8 München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

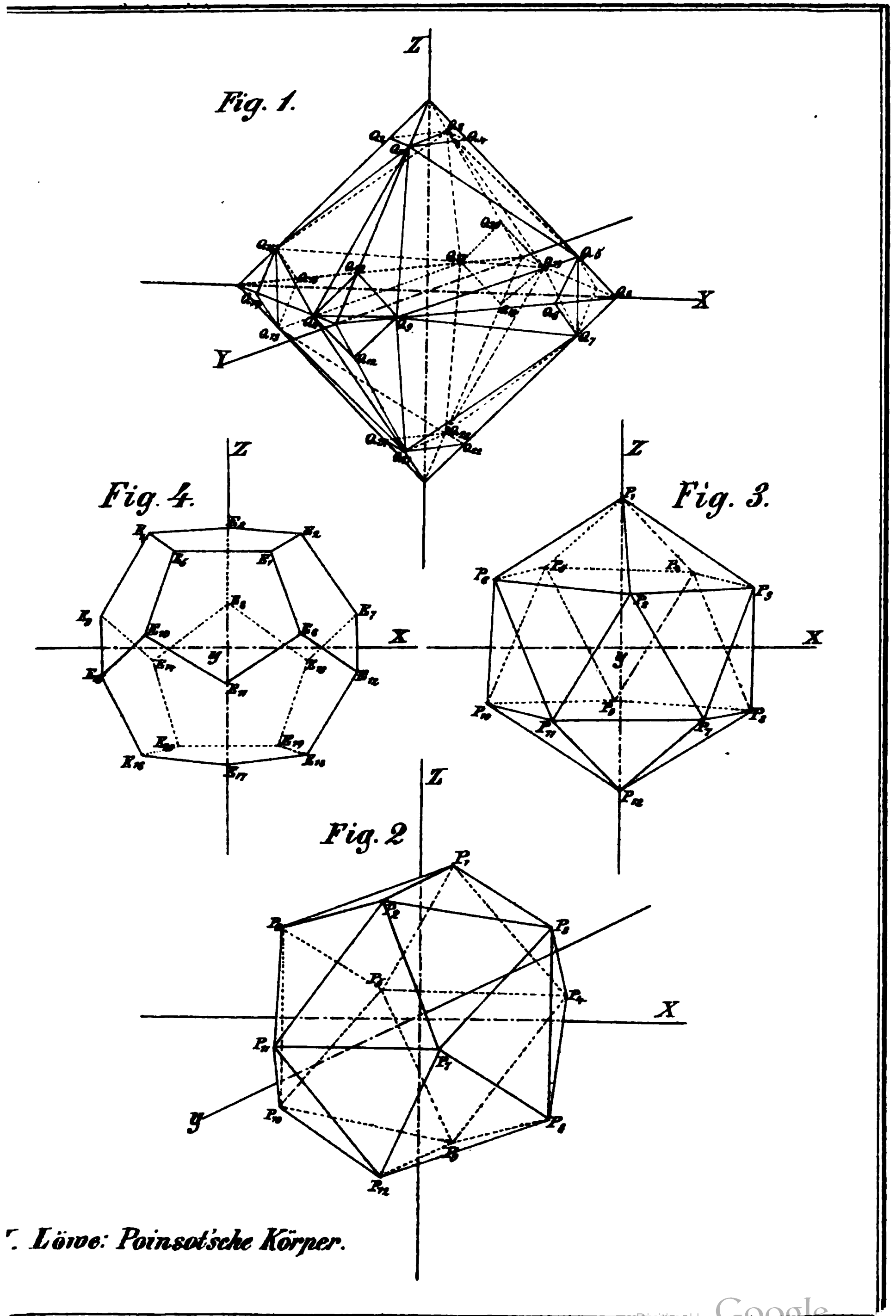

Fig. I.
§. 10, geom. Lsg.
Fig. III.
§. 12, I.
X'
X
Y
Y'
O
y = φ₀(x)
y = lg φ₀(x)
W



Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.



XXVIII. Hoppe: Symmetriepunkte.



. Löwe: Poinsot'sche Körper.

Steindruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.

Für Gymnasien und Realschulen.

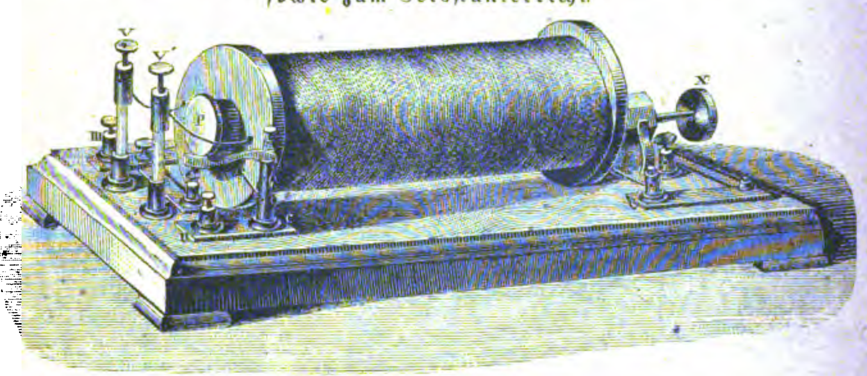
Verlag von G. D. Bädeker in Essen,
durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Karl Koppe,

weil. Professor und Oberlehrer am königl. preuß. Gymnasium zu Soest.

Anfangsgründe der Physik

für den Unterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen,
sowie zum Selbstunterricht.



Mit 345 in den Text eingedruckten Holzschnitten.
12. verbesserte Auflage. — 4 Mk. 20 Pf.

Von Professor **Koppe** ferner:

Der erste Unterricht
in der
Naturlehre
für mittlere Lehranstalten und zum Selbstgebrauch.
Mit 80 in den Text eingedruckten Holzschnitten.
4 verbesserte Auflage. — 1 Mk. 20 Pfg.

Leitfaden
für den Unterricht in der
Naturgeschichte.
5. verbesserte und vermehrte Auflage.
Bearbeitet von
Dr. Fr. Craemer,
Oberlehrer a. d. Realschule in Barmen.
1 Mk. 80 Pfg.

Die
mathematische Geographie
und die
Lehre vom Weltgebäude.
2. vermehrte Auflage.
Bearbeitet von
Dr. W. Dahl,
Oberlehrer a. Realgymn. in Braunschweig.
Mit 45 in den Text eingedruckten Holzschnitten
und einer Sternkarte.
2 Mk.

Kegelschnitte.
Mit 12 Figurentafeln.
2 Mk. 40 Pfg.

Arithmetik und Algebra.
10. Aufl. — 2 Mk. 70 Pfg.

Planimetrie.
Mit 10 Figurentafeln.
12. Auflage. — 2 Mk. 10 Pfg.

Stereometrie.
Mit 8 Figurentafeln.
9. Auflage. — 1 Mk. 60 Pfg.

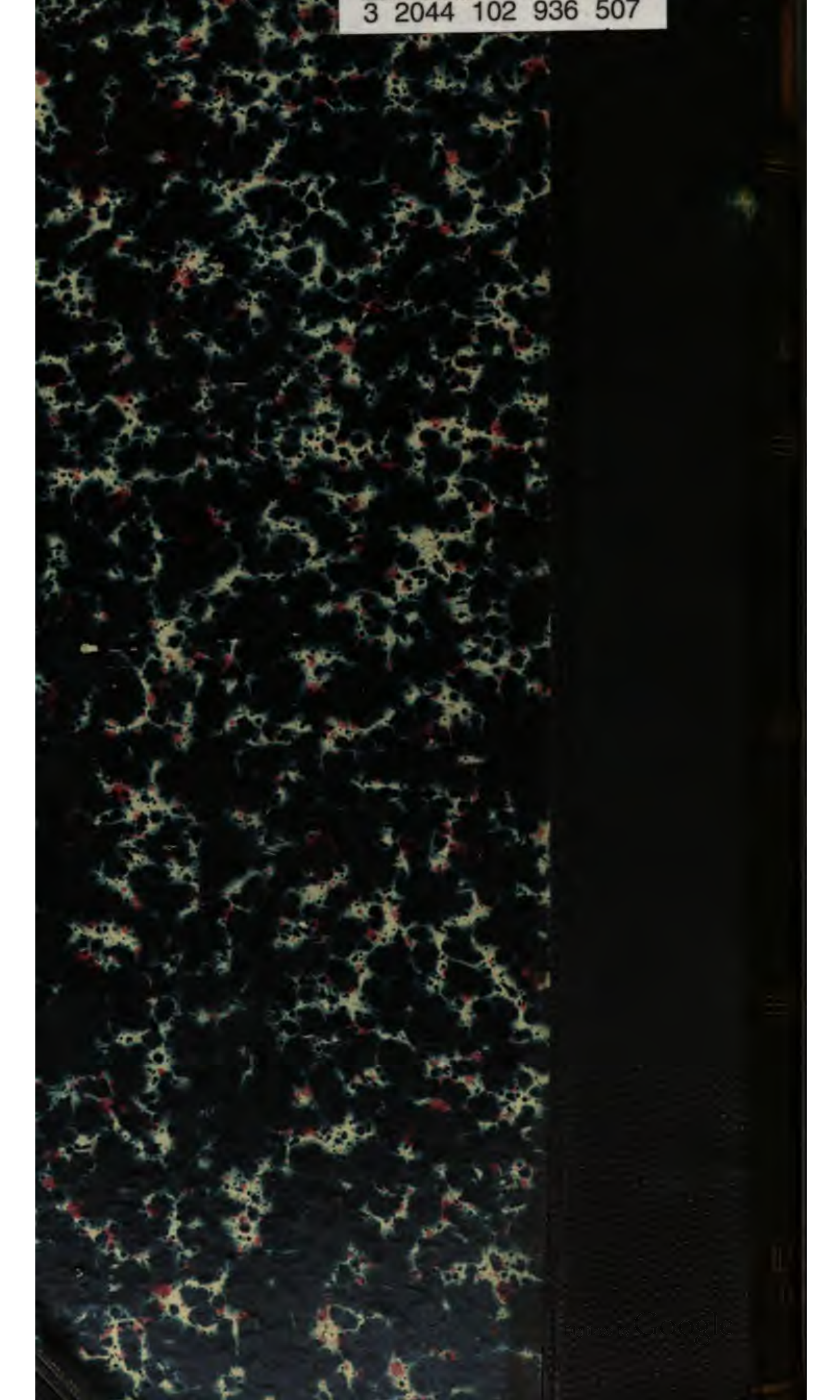
Trigonometrie.
6. verbesserte Auflage.
Bearbeitet von
Dr. W. Dahl,
Oberlehrer a. Realgymn. in Braunschweig.
Mit 5 Figurentafeln.
1 Mk. 60 Pfg.

Sphärische Trigonometrie.
Mit 2 Figurentafeln.
1 Mk.

Algebraische Analysis.
Mit 1 Figurentafel.
2 Mk.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.


3 2044 102 936 507